Contrôle continu oral Algèbre 4 2011/2012

Le contrôle continu oral consiste en une présentation, par binômes d'élèves volontaires, sur l'un des sujets ci-dessous. Le passage à l'oral consistera en un exposé de 20 minutes suivi de 10 minutes de questions. Les dates de passage seront fixées soit dans la semaine du 5 ou 9 décembre soit en fin de semaine suivante après les examens. Bien entendu, les autres élèves sont autorisés (encouragés) à venir assister aux exposés. A priori, chaque étudiant peut s'inscrire à ce contrôle continu oral pour 2 UE.

1. Après avoir défini le *pgcd* dans un anneau factoriel, présenter, avec des exemples les résultats et les différences concernant l'identité de Bezout dans le cadre des anneaux euclidiens, principaux et factoriels.

2. Définir la caractéristique d'un anneau et d'un corps. Définir le morphisme de Frobénius sur un corps de caractéristique p. Illustrer à l'aide d'exemples et de contre-exemples quelques-unes des différences vues en cours pour les polynômes sur un corps de caractéristique 0 ou p.

3. On appelle théorème de transfert tout théorème qui dit que si anneau A vérifie une propriété, alors $A[X]$ vérifie aussi cette propriété. Présenter les théorèmes de transfert vus en cours et donner des contre-exemples pour les théorèmes de transfert qui ne marchent pas.

4. Présenter la démonstration de: A factoriel implique $A[X]$ factoriel.

5. Présenter la démonstration de: A noethérien implique $A[X]$ noethérien.

6. * Soit p premier, montrer que -1 est un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ si et seulement si $p=2$ ou $p \equiv 1 (mod 4)$. On pourra consulter le livre: Cours d'algèbre de Perrin page 74-75.

7. * Soit P le polynôme $P = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$. Montrer que le discriminant de P tel que défini dans le cours vaut aussi

   $$\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{a_n} Res(P,P').$$

   On pourra se servir des notes que l'on trouve sur la page internet:

   http://agreg-maths.univ-rennes1.fr/documentation/docs/Revelim.pdf

8. * Présenter le lemme de Zorn et son utilisation pour montrer l'existence d'idéaux maximaux ainsi que son utilisation pour montrer le théorème de Krull:

   Soit I idéal d'un anneau commutatif A. Soit $\sqrt{I} = \{a \in A, \exists n \geq 1, a^n \in I\}$ le radical de I. Alors $\sqrt{I}$ est l'intersection des idéaux premiers de A contenant I.