Université Bordeaux I - 2011
N1MA5011
Devoir Maison 1

A rendre la semaine du 10 Octobre 2011.

Exercice 1. Soit $A := \mathbb{Z}/81\mathbb{Z}$.

1 Trouver les diviseurs de 0 de A.

2 Déterminer l'ordre du groupe des inversibles de A.

3 Déterminer les inversibles de A qui sont égaux à leur inverse.

4 Déterminer les idéaux de A.

5 Montrer que A possède un unique idéal maximal $\mathfrak{m}$ et déterminer $A/\mathfrak{m}$.

Exercice 2. Soit α une racine dans $\mathbb{C}$ du polynôme $p(X) = X^2 - X + 3$. Soit $\phi : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{C}$ l'homomorphisme d'anneaux donné par $\phi(X) = \alpha$. On note $P := \mathrm{Ker}(\phi)$ et $A := \mathrm{Im}(\phi)$.

1 Montrer que $P = p(X)\mathbb{Z}[X]$ (Indication : on pourra effectuer la division euclidienne par $p(X)$ dans $\mathbb{Z}[X]$). En déduire que $p(X)\mathbb{Z}[X]$ est un idéal premier de $\mathbb{Z}[X]$.

2 Soient a et b des nombres entiers, $a > 0$. On pose :

$$M_{a,b} := a\mathbb{Z}[X] + (X - b)\mathbb{Z}[X],$$

et $s : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$ la surjection canonique. On note $\psi : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$ l'unique morphisme d'anneau tel que $\psi(X) = s(b)$ et $\psi(m) = s(m)$ pour $m \in \mathbb{Z}$.

a) Montrer qu'on a un isomorphisme :

$$\mathbb{Z}[X]/M_{a,b} \simeq \mathbb{Z}/a\mathbb{Z}.$$

b) Montrer que $M_{a,b}$ est maximal si et seulement si a est un nombre premier.

c) Soit l un nombre premier. Montrer que $M_{l,b}$ contient P si et seulement si $p(b) \equiv 0\ [l]$.

3 On pose $I_0 = 3A + \alpha A$ et $I_1 = 3A + (\alpha - 1)A$.

a) Montrer que $\phi^{-1}(I_0) = M_{3,0}$ et $\phi^{-1}(I_1) = M_{3,1}$ (Indication : prouver une inclusion et remarquer que $M_{3,0}$ et $M_{3,1}$ sont maximaux).

b) Montrer que $\mathbb{Z}[X]/M_{3,0} \simeq A/I_0$ et $\mathbb{Z}[X]/M_{3,1} \simeq A/I_1$.

c) Montrer que I_0 et I_1 sont deux idéaux maximaux distincts contenant $3A$.

d) Montrer que $3A = I_0 \cap I_1$ (Indication : montrer que $I_0 + I_1 = A$, en déduire que $I_0 I_1 = I_0 \cap I_1$ puis conclure).

e) Montrer que $A/3A \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. L'idéal $3A$ est-il un idéal premier de A ?

Exercice 3. On note I le noyau du morphisme :

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{Z}[X,Y] &\to \mathbb{Z}[T] \\ a \in \mathbb{Z} &\mapsto a \\ X &\mapsto T+1 \\ Y &\mapsto 2T. \end{aligned}$$

1. Est-ce-que I est un idéal premier ? maximal ?
2. Montrer que I contient un élément qui est à la fois de degré 1 en X et en Y.
3. Est-ce que l'idéal I est un idéal principal ?