Université Bordeaux I - 2011
N1MA5011
Devoir Maison 2

A rendre la semaine du 21 Novembre 2011.

Exercice 1. Soit $j \in \mathbb{C}$ une racine primitive 3-ième de l'unité. On pose :

$$\mathbb{Z}[j] := \{a + bj | a, b \in \mathbb{Z}\}$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on note $N(z) = z\bar{z}$.

1. Structure d'anneau. (a) Montrer que $\mathbb{Z}[j]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$ stable par conjugaison complexe et que $\mathbb{Q}(j) = \mathbb{Q}[j]$.

(b) Montrer que pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ on a $N(z_1 z_2) = N(z_1)N(z_2)$.

2. Inversibles. (a) Soit $u = a + bj \in \mathbb{Z}[j]$. Montrer que $u \in \mathbb{Z}[j]^\times$ si et seulement si $N(u) = 1$.

(b) Soit $u = a + bj \in \mathbb{Z}[j]$ avec $N(u) = 1$. Montrer que $ab \geq 0$ et que $u = \pm 1, \pm j$ ou $\pm(1 + j)$ (écrire $N(u) = (a - b)^2 + ab$).

(c) Montrer que $\mathbb{Z}[j]^\times = \{\pm 1, \pm j, \pm(1 + j)\}$.

3. L'anneau est principal. (a) Montrer que $N(\alpha + \beta j) \leq \alpha^2 + \beta^2 + |\alpha\beta|$ pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$.

(b) Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[j]$ avec $z_2 \neq 0$. Pourquoi existe-t-il $r, s \in \mathbb{Q}$ tels que $z_1/z_2 = r + sj$?

(c) Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $|r - a| \leq 1/2$, $|s - b| \leq 1/2$. Posons $R = z_2(a + bj) - z_1$. Montrer que $N(R) < N(z_2)$.

(d) En déduire que $\mathbb{Z}[j]$ muni de l'application $N : \mathbb{Z}[j] \to \mathbb{N}$ est un anneau euclidien et qu'il est principal.

4. Eléments irréductibles. (a) Soit $f \in \mathbb{Z}[j]$ un élément irréductible.

(i) Montrer que $\mathbb{Z} \cap f\mathbb{Z}[j] \neq \{0\}$.

(ii) En déduire qu'il existe un nombre premier $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{Z} \cap f\mathbb{Z}[j] = p\mathbb{Z}$.

(iii) Montrer que $N(f) = p$, ou $N(f) = p^2$ et $p \notin N(\mathbb{Z}[j])$.

(b) Soit $z \in \mathbb{Z}[j]$.

(i) Montrer que si $N(z) = p$ alors z est irréductible dans $\mathbb{Z}[j]$.

(ii) Supposons $N(z) = p^2$ et $p \notin N(\mathbb{Z}[j])$. Montrer que z est irréductible dans $\mathbb{Z}[j]$.

(c) Parmi les éléments $2 + j, 2 + 3j, 3 + 8j$, lesquels sont irréductibles dans $\mathbb{Z}[j]$?

Exercice 2. 1. Les anneaux $\mathbb{Z}[X, Y]/(2XY - 3)$, $\mathbb{Z}[X, Y]/(2XY - 6)$ et $\mathbb{Q}[X, Y]/(2XY - 6)$ sont-ils intègres ?

2. Quel est le nombre de racines de l'équation polynomiale $a^2 = 1$ sur $A = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$? sur $B = \mathbb{Z}/53\mathbb{Z}$?

Exercice 3. Soit $A := \mathbb{Q}[X, Y]/(X^2 + Y^2 - 1)$. On note s la surjection canonique $\mathbb{Q}[X, Y] \to A$ et on pose $x = s(X)$, $y = s(Y)$.

1. Montrer que $X^2 + Y^2 - 1$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[Y][X]$. En déduire que A est intègre.

2. Montrer que pour tout élément a de A il existe un unique couple $(P(Y), Q(Y)) \in \mathbb{Q}[Y]^2$ tel que $a = P(y) + xQ(y)$.

3. Montrer que A/xA est isomorphe à $\mathbb{Q}[Y]/(Y^2 - 1)$.

4. Montrer que x n'est pas premier dans A.

5. Montrer que x est un élément irréductible dans A. (*Indication :* on pourra remarquer que si $x = (P(y) + xQ(y))\,(R(y) + xS(y))$, alors $P = [P^2 + (Y^2 - 1)Q^2]S$.)

6. L'anneau A est-il factoriel?