

Soit A un anneau commutatif (unitaire).

1. Soit $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$. Quels sont les idéaux, les idéaux premiers, les idéaux maximaux de $\mathbb{Q}[X]/(P(X))$?
2. Soit $A := \mathbb{Q}[X]/(X^3 - X + 2)$ et $x := \overline{X} \in A$. Calculer l'inverse de x dans A .
3. Soit A un anneau, a-t-on : ($I \subseteq J$ idéaux de A avec J de type fini $\implies I$ de type fini) ?
4. Est-ce que l'ensemble des idéaux d'un anneau muni de la loi d'addition des idéaux est un groupe ?
5. Donner un exemple d'anneau non principal.
6. Donner des exemples d'anneaux non noethériens.
7. Soit $P(X) \in \mathbb{C}[X]$, déterminer $\text{pgcd}(P(X), P'(X))$ en fonction des racines de $P(X)$.
8. Ecrire $X^3Y^2 + X^2Y^3 + Z^3Y^2 + Z^2Y^3 + X^3Z^2 + X^2Z^3$ en fonction des polynômes symétriques élémentaires.