Université Bordeaux I - 2011
N1MA5011
Liste d'exercices 2

Idéaux premiers et maximaux, anneaux quotients

Soit A un anneau commutatif (unitaire).

Exercice 1. Soit I un idéal de A, montrer les propriétés suivantes :

1. $I = A$ si et seulement si I contient un inversible.
2. L'anneau A est un corps si et seulement si $A \neq \{0\}$ et les seuls idéaux de A sont (0) et A.

Exercice 2. Déterminer tous les idéaux de $\mathbb{Z}$. Soit K un corps, déterminer tous les idéaux de K.

Exercice 3. Soit A un anneau intègre dans lequel toute suite décroissante d'idéaux est stationnaire. Montrer que A est un corps.

Exercice 4. Soit A un anneau distinct de $\{0\}$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
i/ A est un corps.
ii/ Tout morphisme (d'anneaux unitaires) de A dans un anneau non nul est injectif.

Exercice 5. Soit I un idéal de A, on définit *le radical de* I par $\sqrt{I} := \{x \in A | \exists n \geq 0, x^n \in I\}$. Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A contenant I.

Exercice 6. Déterminer le radical de $18\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$. Soit $n \in \mathbb{Z}$ avec $n \neq 0$, déterminer le radical de $n\mathbb{Z}$.

Exercice 7. Soient I et J deux idéaux de A. On note $\sqrt{I}$ le radical de I. Montrer les propriétés suivantes :

1 Si $I \subseteq J$ alors $\sqrt{I} \subseteq \sqrt{J}$.

2 $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.

3 $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$.

4 $\sqrt{I} = (1)$ si et seulement si $I = (1)$.

5 $\sqrt{I + J} = \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}$

6 Si I est premier, $\sqrt{I^n} = I$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 8. Soient I et J des idéaux de A, soit $p : A \to A/I$ la surjection canonique.

1 Montrer que $\overline{J} := p(J)$ est un idéal de A/I.

2 Montrer que l'on a une bijection entre les idéaux de A contenant I et les idéaux de A/I.

3 Montrer qu'on a l'isomorphisme suivant : $(A/I)/\overline{J} \simeq A/(I+J)$

Exercice 9. Soit B un sous-anneau de A et I un idéal de A

1 Montrer que $B \cap I$ est un idéal de B que $B + I := \{b + i, b \in B, i \in I\}$ est un anneau et que I en est un idéal.

2 Monter que $B/(B \cap I) \simeq (B+I)/I$.

Exercice 10. Soit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$ des idéaux de A. Montrer que l'on a :

1 $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}).\mathfrak{c} = \mathfrak{a}.\mathfrak{c} + \mathfrak{b}.\mathfrak{c}$.

2 $\mathfrak{a}.\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ et si $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = A$ alors $\mathfrak{a}.\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$.