Université Bordeaux I - 2011
N1MA5011
Liste d'exercices 4

Polynômes, multiplicité des racines, polynômes symétriques.

Soit A un anneau commutatif (unitaire).

Exercice 1. Soit $P(X)$ un polynôme. Sachant que le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $X-a$ est 1 et celui de $P(X)$ par $X-b$ est -1 (avec $a \neq b$), quel est le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $(X-a)(X-b)$?

Exercice 2. Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $P(x) \geq 0$. Montrer qu'il existe $U(X), V(X) \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X) = U(X)^2 + V(X)^2$.

Exercice 3. **1** Montrer que le polynôme $P(X) = X^5 - X^2 + 1$ admet une unique racine réelle et que celle-ci est irrationnelle.

2 Montrer que le polynôme $Q(X) = 2X^3 - X^2 - X - 3$ a une racine rationnelle (qu'on calculera). En déduire sa décomposition en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 4. Soit $n \geq 2$ et $P_n(X) := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} X^k$. Le polynôme $P_n(X)$ a-t-il une racine double dans $\mathbb{C}$?

Exercice 5. Montrer que les polynômes homogènes symétriques de degré 1 sont de la forme as_1 avec $a \in A$, les polynômes homogènes symétriques de degré 2 sont de la forme $as_1^2 + bs_2$ avec $a, b \in A$ et que les polynômes homogènes symétriques de degré 3 sont de la forme $as_1^3 + bs_1s_2 + cs_3$ avec $a, b, c \in A$.

Exercice 6. Exprimer les polynômes suivants à l'aide des polynômes symétriques élémentaires :

1 $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$.

2 $X_1^3 + X_2^3 + X_3^3$.

3 $X_1^2X_2 + X_1X_2^2 + X_1^2X_3 + X_1X_3^2 + X_2^2X_3 + X_2X_3^2$.

Exercice 7. Soient x_1, x_2 et x_3 les racines de $X^3 - 2X^2 + X + 3$. Calculer $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$.

Exercice 8. Montrer que le discriminant de $X^3 + aX^2 + bX + c$ est $a^2b^2 + 18abc + -4a^3c - 4b^3 - 27c^2$. Calculer le discriminant du polynôme $X^3 + pX + q$.

Exercice 9.

1. Exprimer $(X_1+X_2)(X_1+X_3)(X_2+X_3)$ en fonction des polynômes symétriques élémentaires.
2. Soit $P(X) := X^3 - 3X^2 - X - 2$ ayant a, b, c pour racines dans $\mathbb{C}$. Calculer $(ab^{-1} + 1)(bc^{-1} + 1)(ca^{-1} + 1)$.

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de polynômes unitaires de degré n à coefficients entiers ayant toutes leurs racines de module inférieur ou égal à 1.