

Anneaux noethériens, résultant.

Soit A un anneau commutatif (unitaire).

Exercice 1. Calculer le discriminant du polynôme $X^3 + pX + q$.

Exercice 2. Trouver tous les nombres premiers p tels que $X^3 + X^2 - X + 1$ ait une racine double dans \mathbb{F}_p .

Exercice 3. 1 Calculer le résultant par rapport à X des polynômes XY et $XY - 1$.

2 Trouver les racines communes des polynômes $X^2 - XY + Y^2 - 1$ et $2X^2 + Y^2 - Y - 2$.

Exercice 4. Soient $n \geq 1, m \geq 1$ et $F(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k, G(X) = \sum_{k=0}^m b_k X^k$.

1 Calculer $\text{res}_{1;1}(a_1 X + a_0; b_1 X + b_0)$.

2 Montrer que $\text{res}_{n;m+r}(F(X); G(X)) = a_n^r \cdot \text{res}_{n;m}(F(X); G(X))$ si $\deg G(X) \leq m$.

3 Montrer que $\text{res}_{n;m}(F(X) + X^r G(X); G(X)) = \text{res}_{n;m}(F(X); G(X))$ si $m + r \leq n$.
En déduire que $\text{res}_{n;m}(F(X) + G(X)H(X); G(X)) = \text{res}_{n;m}(F(X); G(X))$ si $H(X) \in A[X]$ est tel que $\deg H(X) \leq n - m$.

Exercice 5. Soient $P(X), Q(X) \in \mathbb{K}[X]$ unitaires de degré n et m et soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tels que $P(\alpha) = 0, Q(\beta) = 0$.

1 Montrer que $\text{res}_{n,m}(P(X), Q(Y - X))$ est un polynôme unitaire de $\mathbb{K}[Y]$ ayant $\alpha + \beta$ comme racine.

2 Montrer que $\text{res}_{n,m}(P(X), X^m Q(\frac{Y}{X}))$ est un polynôme unitaire de $\mathbb{K}[Y]$ ayant $\alpha\beta$ comme racine.

Exercice 6. Montrer que $\cup_{i \geq 1} \mathbb{K}[X_1, \dots, X_i]$ n'est pas noethérien.

Exercice 7. Soit A un anneau noethérien et B un anneau commutatif unitaire.

1 Montrer que pour tout idéal I de A , l'anneau A/I est noethérien.

2 Montrer que si $f : A \rightarrow B$ est un morphisme d'anneaux surjectif alors B est noethérien.

3 Soit $f : A \rightarrow A$ un morphisme surjectif, montrer que f est un isomorphisme en considérant les idéaux de la forme $\text{Ker}(f^n)$.

Exercice 8. Soient $I \subseteq J$ des idéaux de A .

1 Si I est de type fini, est-ce que J est de type fini ?

2 Si J est de type fini, est-ce que I est de type fini ?