Université Bordeaux I - 2011
N1MA5011
Liste d'exercices 9

Corps de rupture, corps de décomposition.

Exercice 1. Soient $\mathbb{L}$ une extension algébrique finie de $\mathbb{K}$, $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme irréductible de degré m et $n := [\mathbb{L} : \mathbb{K}]$. Montrer que si $1 = \text{pgcd}(m, n)$ alors $P(X)$ est un irréductible de $\mathbb{L}[X]$.

Exercice 2. Montrez que $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$ n'est pas un corps de décomposition de $X^3 - 2$ sur $\mathbb{Q}$. Quel est le corps de décomposition $\mathbb{L}$ de ce polynôme sur $\mathbb{Q}$? Calculer $[\mathbb{L} : \mathbb{Q}]$.

Exercice 3. Soit $\alpha := \sqrt{1 + \sqrt{5}}$.

1. Déterminer le polynôme minimal $P(X)$ de α sur $\mathbb{Q}$. Quel est le degré de α sur $\mathbb{Q}$?
2. Déterminer les racines de $P(X)$.
3. Montrer $\mathbb{K} := \mathbb{Q}(\alpha, i\sqrt{2})$ est un corps de décomposition de $P(X)$.
4. Calculer le degré de $\mathbb{K}$ sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 4. Soit $P(X) = X^3 - X + 1$.

1 Montrer que $P(X)$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

2 Montrer que $P(X)$ possède une racine réelle et deux racines complexes.

3 Le discriminant d'un polynôme de la forme $X^3 + pX + q$ étant $-4p^3 - 27q^2$, calculer le discriminant de $P(X)$. Soit $\mathbb{L}$ un corps de décomposition de $P(X)$, montrer que $\sqrt{-23} \in \mathbb{L}$.

4 Montrer que $[\mathbb{L} : \mathbb{Q}] = 6$ et que $\mathbb{L} = \mathbb{K}(\sqrt{-23})$ où $\mathbb{K}$ est un corps de rupture de $P(X)$.

Exercice 5. Comment exprimer un corps de décomposition en fonction des corps de rupture d'un polynôme $P(X) \in \mathbb{K}[X]$? Soient n le degré de $P(X)$ et $\mathbb{L}$ un corps de décomposition de $P(X)$, montrez que $[\mathbb{L} : \mathbb{K}] \leq n!$.

Exercice 6. Décrire un corps $\mathbb{K}$ à 4 éléments. A-t-on un isomorphisme $\mathbb{K} \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$?

Exercice 7. **1** Montrez que $X^3 - 3$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

2 Montrez que $X^3 - 3$ est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ pour toute extension quadratique $\mathbb{K}/\mathbb{Q}$.

3 Déterminez une base d'un corps de décomposition de $X^3 - 3$ sur $\mathbb{Q}$.

4 Soit $P(X) = X^6 + 9$ et soit $\mathbb{L} = \mathbb{Q}[x]$ un corps de rupture de $P(X)$ avec $P(x) = 0$. Montrez que $\mathbb{L}$ contient $\mathbb{Q}[i]$.

5 Montrez que $\mathbb{L}$ contient une racine du polynôme $Y^3 - 3$.

6 Montrez que $P(X)$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.