Les idéaux premiers de $\mathbb{Z}[X]$.

Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $\mathbb{Z}[X]$.

1. Les idéaux de $\mathbb{Z}[X]$ suivants sont-ils premiers ? maximaux ?

$$(2, X) \quad (X^2 + X + 1) \quad (X^4 + 1) \quad (4, X)$$

2. Montrer qu'on a un morphisme injectif

$$\mathbb{Z}/(\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}[X]/\mathfrak{p}.$$

   En déduire que $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = \{0\}$ ou $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$ avec p un nombre premier.

3. Montrer qu'il existe des $f_i \in \mathbb{Z}[X]$, $1 \leq i \leq n$ tels que $\mathfrak{p} = f_1\mathbb{Z}[X] + \dots f_n\mathbb{Z}[X]$.

4. On suppose ici que $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$. On note $q : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{F}_p[X]$ la surjection canonique.
   (a) Montrer que $p \in \mathfrak{p}$.
   (b) Montrer que $q(\mathfrak{p})$ est un idéal premier de $\mathbb{F}_p[X]$ puis qu'il existe $P(X) \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire tel que $q(\mathfrak{p}) = q(P(X)).\mathbb{F}_p[X]$ où $q(P(X)) \in \mathbb{F}_p[X]$ est irréductible.
   (c) Montrer que $\mathfrak{p} \supseteq (p, P(X))$.
   (d) Montrer que $\mathfrak{p} \subseteq (p, P(X))$.

5. On suppose ici que $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = \{0\}$ et $\mathfrak{p} \neq \{0\}$.
   (a) Montrer que $\mathfrak{p}\mathbb{Q}[X] = P(X).\mathbb{Q}[X]$ avec $P(X) \in \mathbb{Z}[X]$, cont $(P) = 1$.
   (b) Montrer que $\mathfrak{p} \subseteq P(X).\mathbb{Z}[X]$.
   (c) Montrer que $P(X).\mathbb{Z}[X] \subseteq \mathfrak{p}$