Université Bordeaux I - 2012
N1MA5011
Liste complémentaire 1

1. Déterminer les idéaux, les idéaux premiers et les idéaux maximaux de l'anneau $\mathbb{Q}[X]/((X^3-1)(X^2+1))$.
2. Soit A un anneau, soient $I \subseteq J$ des idéaux de A. A-t-on I de type fini $\Rightarrow J$ de type fini ? A-t-on J de type fini $\Rightarrow I$ de type fini ?
3. Est-ce que l'ensemble des idéaux d'un anneau muni de la loi d'addition des idéaux est un groupe ?
4. Donner un exemple d'anneau non principal. Donner des exemples d'anneaux non noethériens.
5. Soit A un anneau et I un idéal de A. Si A est intègre (resp. noethérien, resp. principal, resp. factoriel) est-ce que A/I est intègre (resp. noethérien, resp. principal, resp. factoriel) ?
6. Déterminer les nilpotents et les diviseurs de zéro de $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$.
7. Soit $P(X) \in \mathbb{C}[X]$, déterminer pgcd$(P(X), P'(X))$ en fonction des racines de $P(X)$.

Anneaux principaux.

On cherche les solutions dans $\mathbb{N}$ de l'équation :

$$X^2 + Y^2 = Z^2 \tag{1}$$

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ une solution de (1) et soit $d = \text{pgcd}(x, y, z)$.

1. Soient $a = x/d$, $b = y/d$, $c = z/d$. Montrez que $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ est une solution de (1) et que a, b, c sont premiers entre eux.
2. Montrez que c est impair et que soit a soit b est pair. Par exemple $a \equiv 0[2]$ et $b \equiv 1[2]$.
3. On écrit $a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$. Montrez que a et b sont premiers entre eux, que $\delta := \text{pgcd}(a + ib, a - ib)$ divise 2 puis que $\delta = 1$.
4. Montrez qu'il existe $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $a + ib = (m + in)^2$.
5. Montrez que $\text{pgcd}(m, n) = 1$ et que $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, $c = m^2 + n^2$.
6. Conclure.

Polynômes irréductibles.

1. Le polynôme $Y^7 + Y^6 + 7Y^4 + XY^3 + 3X^2Y^2 - 5Y + X^2 + X + 1$ est-il un irréductible de $\mathbb{R}[X, Y]$? de $\mathbb{Z}[X, Y]$?
2. Montrer que l'anneau $\mathbb{R}[X, Y]/(X^2 + Y^2 + 1)$ est intègre.
3. Le polynôme $Y^5 + X^2Y^3 + 1 + 2XY + 2X + X^2 + X^3$ est-il un irréductible de $\mathbb{Z}[X, Y]$?
4. Le polynôme $W^2 - W - T^3$ est-il un irréductible de $\mathbb{F}_2[W, T]$? de $\mathbb{F}_3[W, T]$?
5. Le polynôme $X^8 + Y^7 + 1$ est-il un irréductible de $\mathbb{Q}[X, Y]$? de $\mathbb{Z}[X, Y]$?
6. Le polynôme $14X^{10} - 21$ est-il un irréductible de $\mathbb{Z}[X]$? de $\mathbb{Q}[X]$?
7. L'anneau $\mathbb{Z}[X]/(X^4 - 5X^3 + 12X^2 - 2X - 1)$ est-il intègre ? est-ce un corps ?
8. L'idéal $(2, X^2 + X + 1)$ est-il premier de $\mathbb{Z}[X]$? maximal de $\mathbb{Z}[X]$?
9. L'idéal $(4, X^2 + X + 1)$ est-il premier de $\mathbb{Z}[X]$? premier de $\mathbb{Q}[X]$?

Anneaux quotients, théorème de factorisation.

Exercice. On note I le noyau du morphisme :

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{Z}[X, Y] &\to \mathbb{Z}[T] \\ a \in \mathbb{Z} &\mapsto a \\ X &\mapsto T + 1 \\ Y &\mapsto 2T. \end{aligned}$$

1. Est-ce-que I est un idéal premier ? maximal ?
2. Montrer que I contient un élément qui est à la fois de degré 1 en X et en Y.
3. Est-ce que l'idéal I est un idéal principal ?