Université Bordeaux I - 2012
N1MA5011
Liste d'exercices 1

Anneaux, éléments inversibles et nilpotents, idéaux.

Soit A un anneau commutatif (unitaire).

Exercice 1. Lesquels de ces ensembles sont des anneaux ? Des corps ?

1. $\mathbb{N}$
2. $\mathbb{Q}[i] := \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$
3. Pour $n \geq 2$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
4. $\mathbb{Z}[i] := \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$
5. $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} 10^{-n}\mathbb{Z}$

Exercice 2.

1. Montrer que si $x.y$ est inversible dans A alors x et y sont inversibles dans A.
2. Montrer que dans un anneau non nul, un inversible n'est pas un diviseur de zéro et un diviseur de zéro n'est pas inversible.

Exercice 3. Déterminer les inversibles des anneaux de l'exercice 1.

Exercice 4. Démontrer que si $x \in A$ est nilpotent alors $1 + x$ est inversible dans A. Si x et y sont nilpotents et commutent, montrer que xy et $x + y$ sont nilpotents.

Exercice 5. L'anneau $C := A \times A$ est-il intègre ? Décrire les ensembles des éléments inversibles, des diviseurs de zéro et des éléments nilpotents de l'anneau C.

Exercice 6. Trouver les éléments inversibles et les éléments nilpotents de $\mathbb{Z}/81\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

Exercice 7. Montrer qu'un anneau fini intègre est un corps.

Exercice 8. Soit I un idéal de A, montrer les propriétés suivantes :

1. $I = A$ si et seulement si I contient un inversible.
2. L'anneau A est un corps si et seulement si $A \neq \{0\}$ et les seuls idéaux de A sont (0) et A.

Exercice 9. Déterminer tous les idéaux de $\mathbb{Z}$. Soit K un corps, déterminer tous les idéaux de K.

Exercice 10. Soit A un anneau distinct de $\{0\}$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. L'anneau A est un corps.
2. Tout morphisme de A dans un anneau non nul est injectif.

Exercice 11. Soient I et J des idéaux de A, soit $p : A \to A/I$ la surjection canonique.

1. Montrer que $\overline{J} := p(J)$ est un idéal de A/I.
2. Montrer que l'on a une bijection entre les idéaux de A contenant I et les idéaux de A/I.
3. Montrer qu'on a l'isomorphisme suivant : $(A/I)/\overline{J} \simeq A/(I+J)$.