Université Bordeaux I - 2012
N1MA5011
Liste d'exercices 2

Idéaux premiers et maximaux, anneaux quotients

Soit A un anneau commutatif (unitaire).

Exercice 1. Soient $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$ des idéaux de A. Montrer que l'on a :

1 $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}).\mathfrak{c} = \mathfrak{a}.\mathfrak{c} + \mathfrak{b}.\mathfrak{c}$.

2 $\mathfrak{a}.\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ et si $\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = A$ alors $\mathfrak{a}.\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$.

3 Si $\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = A$, montrer qu'on a un isomorphisme

$$A/\mathfrak{a}.\mathfrak{b} \simeq A/\mathfrak{a} \times A/\mathfrak{b}.$$

Exercice 2. Soit A un anneau, on note $\mathrm{Spec}(A)$ l'ensemble des idéaux premiers de A. Pour I un idéal de A on définit $V(I) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid I \subseteq \mathfrak{p}\}$.

1 $V(0) = \mathrm{Spec}\, A$.

2 Soient I et J des idéaux de A, on a $V(I \cap J) = V(I) \cup V(J) = V(IJ)$.

3 Soit $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille d'idéaux de A, alors $\cap_{\lambda\in\Lambda} V(I_\lambda) = V(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda)$.

Exercice 3. Soit I un idéal de A. Montrer que I est premier si et seulement si A/I est intègre et que I est maximal si et seulement si A/I est un corps. L'idéal (X) de $\mathbb{Z}[X]$ est-il premier ? maximal ?

Exercice 4. Soit $\phi : A \to B$ un morphisme d'anneaux et soit $\mathfrak{p} \subset A$ (resp. $\mathfrak{q} \subset B$) un idéal premier.

1 Montrer que $\phi^{-1}(\mathfrak{q})$ est un idéal premier.

2 On suppose ici que ϕ est surjectif.

2-a Si $\mathfrak{p}$ contient $\mathrm{Ker}\, \phi$, prouver que $\phi(\mathfrak{p})$ est premier.

2-b Etablir une bijection entre les idéaux premiers de B et les idéaux premiers de A contenant $\mathrm{Ker}\, \phi$.

2-c Etablir une bijection entre les idéaux maximaux de B et les idéaux maximaux de A contenant $\mathrm{Ker}\, \phi$.

3 Si ϕ n'est pas surjectif, l'idéal de B engendré par $\phi(\mathfrak{p})$ est-il premier ? (on pourra considérer l'injection $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$).

Exercice 5. Soit A un anneau intègre. Montrer que le noyau du morphisme

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{Z} &\to A \\ n &\mapsto n.1_A, \end{aligned}$$

est de la forme $p\mathbb{Z}$ pour p premier ou bien est (0). En déduire que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ou bien $\mathbb{Z}$ s'injecte dans A puis qu'un corps contient soit un corps fini, soit un corps isomorphe à $\mathbb{Q}$.

Exercice 6. Soit B un sous-anneau de A et I un idéal de A

1 Montrer que $B \cap I$ est un idéal de B, que $B + I := \{b + i, b \in B, i \in I\}$ est un anneau et que I en est un idéal.

2 Monter que $B/(B \cap I) \simeq (B + I)/I$.