Université Bordeaux I - 2012
N1MA5011
Liste d'exercices 3

Polynômes

Soit A un anneau commutatif (unitaire).

Exercice 1. Soient $n, m \geq 1$ et $P(X) := \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in A[X]$.

1 Prouver que $P(X)$ est nilpotent si et seulement si $a_0, \ldots, a_n$ sont nilpotents.

2-a Soit $Q(X) := \sum_{k=0}^{m} b_k X^k \in A[X]$ tel que $P(X)Q(X) = 1$. Montrer que pour $0 \leq k \leq m$, $a_n^{k+1} b_{m-k} = 0$. En déduire que a_n est nilpotent.

2-b Montrer que $P(X) \in A[X]^\times$ si et seulement si $a_0 \in A^\times$ et $a_1, \ldots, a_n$ sont nilpotents.

Exercice 2. Soit $P(X) \in \mathbb{Z}[X]$ et $m \in \mathbb{Z}$. On note $\overline{P(X)}$ la réduction de $P(X)$ mod m (i.e. si $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, $\overline{P(X)} = \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i} X^i$ où $\overline{a}$ désigne la classe de a modulo m).

1 Montrer qu'on a un isomorphisme :

$$\mathbb{Z}[X]/(m, P(X)) \simeq (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}[X])/(\overline{P(X)}).$$

2 Montrer que si $m = p$ est un nombre premier et que $\overline{P(X)}$ est irréductible alors l'idéal $(p, P(X))$ est maximal dans $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 3. 1 Soit A un anneau principal et soit I un idéal propre de A (c'est à dire $I \neq \{0\}$ et $I \neq A$). Prouver que I est maximal si et seulement si I est premier.

2 Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. Montrer que $\mathbb{K}[X]$ est principal. Quels sont les idéaux premiers et les idéaux maximaux de $\mathbb{K}[X]$?

Exercice 4. Déterminer les idéaux de l'anneau

$$\mathbb{R}[X]/(X^2(X^2+1)).$$

Exercice 5. Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif et $\alpha \in \mathbb{K}$. On note $I_\alpha := (X - \alpha Y)\mathbb{K}[X, Y]$.

1 Soit $P(X, Y) \in \mathbb{K}[X, Y]$, montrer qu'il existe $Q(X, Y) \in \mathbb{K}[X, Y]$ et $R(Y) \in \mathbb{K}[Y]$ tels que $P(X, Y) = (X - \alpha Y).Q(X, Y) + R(Y)$.

2 Soit Φ le morphisme :

$$\begin{aligned}\Phi\ :\mathbb{K}[X,Y] &\to \mathbb{K}[T]\\ k\in\mathbb{K} &\mapsto k\\ X &\mapsto \alpha T\\ Y &\mapsto T\end{aligned}$$

Montrer que Ker $\Phi = I_\alpha$.

3 En déduire que $\mathbb{K}[X,Y]/I_\alpha \simeq \mathbb{K}[T]$ et que I_α est un idéal premier.

4 Déterminer un idéal maximal de $\mathbb{K}[X,Y]$ contenant I_α.

Exercice 6. Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et $A := \mathbb{K}[X_1,\dots,X_n]$.

1 Pour $\boldsymbol{z} := (z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{K}^n$, on note $\mathfrak{m}_{\boldsymbol{z}}$ l'idéal $(X_1 - z_1,\dots,X_n - z_n)$. Montrer que $\mathfrak{m}_{\boldsymbol{z}}$ est le noyau du morphisme d'évaluation en $\boldsymbol{z}$ (i.e. le morphisme qui à X_i associe z_i et vaut l'identité sur les éléments de $\mathbb{K}$).

2 En déduire que $\mathfrak{m}_{\boldsymbol{z}}$ est un idéal maximal et que $\mathfrak{m}_{\boldsymbol{z}} = \mathfrak{m}_{\boldsymbol{z'}}$ si et seulement si $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z'}$.

3 Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de $\mathbb{K}[X_1,\dots,X_n]$ tel que la composée des applications naturelles $\mathbb{K}\to A\to A/\mathfrak{m}$ soit un isomorphisme, montrer qu'il existe $\boldsymbol{z}\in\mathbb{K}^n$ tel que $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_{\boldsymbol{z}}$.