

**Résultant et discriminant.**

Soit  $A$  un anneau commutatif (unitaire).

**Exercice 1.** Calculer le discriminant du polynôme  $X^3 + pX + q$ .

**Exercice 2.** Trouver tous les nombres premiers  $p$  tels que  $X^3 + X^2 - X + 1$  ait une racine double dans  $\mathbb{F}_p$ .

**Exercice 3. 1** Calculer le résultant par rapport à  $X$  des polynômes  $XY$  et  $XY - 1$ .

**2** Trouver les racines communes des polynômes  $X^2 - XY + Y^2 - 1$  et  $2X^2 + Y^2 - Y - 2$ .

**Exercice 4.** Montrer que  $\cup_{i \geq 1} \mathbb{K}[X_1, \dots, X_i]$  n'est pas noethérien.

**Exercice 5.** Soit  $A$  un anneau noethérien et  $B$  un anneau commutatif unitaire.

**1** Montrer que pour tout idéal  $I$  de  $A$ , l'anneau  $A/I$  est noethérien.

**2** Montrer que si  $f : A \rightarrow B$  est un morphisme d'anneaux surjectif alors  $B$  est noethérien.

**3** Soit  $f : A \rightarrow A$  un morphisme surjectif, montrer que  $f$  est un isomorphisme en considérant les idéaux de la forme  $\text{Ker}(f^n)$ .

**Exercice 6.** Soient  $I \subseteq J$  des idéaux de  $A$ .

**1** Si  $I$  est de type fini, est-ce que  $J$  est de type fini ?

**2** Si  $J$  est de type fini, est-ce que  $I$  est de type fini ?