CORRIGE RAPIDE DS 2

Matière: Mathématiques
Date: 30 avril 2012
Durée: 1h30
Enseignants: M. Fischer

Année universitaire
2011 - 2012
$2^{\text{ième}}$ année - $4^{\text{ième}}$ semestre
Filière MP

Exercice 1 : On considère le problème de Cauchy suivant:

$$(P) \qquad \begin{cases} t^2y' + y + y^2 = 0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

1. Ecrire l'équation différentielle de ce problème de Cauchy comme une équation à variables séparables.

$$(P) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y'(t) = -\dfrac{1}{t^2}\left(y^2 + y\right) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

2. Le problème de Cauchy a-t-il une solution ?
(P) est un problème à variables séparables du type $y'(t) = a(t)f(y)$. La fonction $a(t)$ est discontinue en 0. On se place sur $\Omega_{t_0} =]-\infty, 0[$ ou sur $\Omega_{t_0} =]0, +\infty[$ en fonction de t_0. Sur cette restriction, on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz, et conclure à l'existence d'une solution unique pour chaque condition initiale.

3. En fonction des conditions initiales (t_0, y_0), combien de cas faudrait-il étudier pour résoudre ce problème ?
On se place sur $\Omega_{t_0} =]-\infty, 0[$ ou sur $\Omega_{t_0} =]0, +\infty[$ en fonction de t_0, et sur $\Omega_{y_0} =]-\infty, -1[, \Omega_{y_0} =]-1, 1[$ ou sur $\Omega_{y_0} =]1, +\infty[$ en fonction de y_0. Ce qui nous donne 6 cas à étudier.

4. Afin d'en simplifier la résolution, on propose le changement d'inconnues suivant : $z(t) = \dfrac{1}{y(t)}$.
Si $y(t)$ est une solution du problème (P), écrire le problème de Cauchy (Q) vérifié par $z(t)$.

On exprime $y(t)$ en fonction de $z(t)$, on remplace dans (P), et on obtient une équation sur $z(t)$:

$$(Q) \qquad \begin{cases} z'(t) = \dfrac{1}{t^2}(z+1) \\ z(t_0) = z_0 = \dfrac{1}{y(t_0)} = \dfrac{1}{y_0} \end{cases}$$

5. En fonction des conditions initiales (t_0, z_0), combien de cas faudrait-il maintenant étudier pour résoudre ce problème ?
   (Q) est une équation à variables séparables du type $z'(t) = b(t)g(z)$. La fonction $b(t)$ est discontinue en 0, et la fonction $g(z)$ possède 1 racine $z = -1$. Il n'y aura plus que 4 cas à étudier en fonction de (t_0, z_0). On se place sur $\Omega_{t_0} =]-\infty, 0[$ ou sur $\Omega_{t_0} =]0, +\infty[$ en fonction de t_0, et sur $\Omega_{z_0} =]-\infty, -1[$, ou sur $\Omega_{z_0} =]-1, +\infty[$ en fonction de z_0.

6. Résoudre le problème de Cauchy (Q) en supposant que les conditions initiales vérifient: $z(t_0) = z_0 < -1$ et $t_0 < 0$.
   On applique le théorème vu en cours et on obtient, après calculs:
   $G(z) = t_0 + \left|\dfrac{z+1}{z_0+1}\right|$, $B(t) = t_0 + \dfrac{1}{t_0} - \dfrac{1}{t}$ *sur $\Omega_{t_0} =]-\infty, 0[$ et $\Omega_{z_0} =]-\infty, -1[$. On obtient alors $z(t) = (z_0+1)\, e^{1/t_0}.e^{-1/t} - 1$ définie sur $I =]-\infty, 0[$. On peut ensuite se ramener à la solution $y(t)$ en appliquant le changement de variables.*

Exercice 2 : On considère dans $\mathbb{R}^2$ (muni d'un repère orthonormé (O, i, j)) le cercle $\mathcal{C}$ de centre 0 et de rayon a. Soient M un point du cercle, et N et P ses projections respectives sur les axes des abscisses et des ordonnées.

1. Etudier les variations de l'aire du rectangle $ONMP$ en fonction de a.
   On peut exprimer l'aire du rectangle à l'aide des coordonnées polaires ou cartésiennes. Nous choisissons ici les coordonnées cartésiennes. Le choix des coordonnées polaires redonne évidemment les mêmes résultats. On note x la distance ON et y la distance OP. L'aire du rectangle est alors donnée par $A(x, y) = |xy|$. La variable y s'exprime en fonction de x : $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$ et on obtient pour l'aire du rectangle: $S(x) = |x|\sqrt{a^2 - x^2}$. Pour trouver les variations de $S(x)$, on calcule la dérivée, et on fait le tableau de variations. On obtient $S'(x) = \dfrac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ qui s'annule en $x = \pm\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

2. Où doit se situer le point M pour que cette aire soit maximale ?
   L'aire est maximale pour $x = \pm\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Exercice 3 : Soit $\mathcal{C}$ la courbe de $\mathbb{R}^2$ (muni d'un repère orthonormé (O, i, j)) d'équation $f(x, y) = ye^x + e^y \sin(2x) = 0$.

1. Montrer qu'il existe une fonction $g(y)$ telle que $f(g(y), y) = 0$ au voisinage de $(0, 0)$.
   On va appliquer le théorème des fonctions implicites. Pour cela, on doit vérifier toutes les hypothèses du théorème. On veut résoudre en x, c'est-à-dire trouver une solution locale du type $x = g(y)$. On commence par calculer les dérivées partielles:

$\partial_1 f(x,y) = ye^x + 2e^y\cos(2x), \quad \partial_2 f(x,y) = e^x + e^y\sin(2x)$.
$\partial_1 f(0,0) = 2 \neq 0$, *c'est donc un isomorphisme de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. $(0,0)$ *est solution* ($f(0,0) = 0$). *On peut donc appliquer le T.F.I.:* $\exists U_1$ *voisinage de 0,* $\exists U_2$ *voisinage de 0,* $\exists !\, g : U_2 \to U_1$ *telle que* $\forall (x,y) \in U_1 \times U_2, f(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = g(y)$. *De plus* g *est* $\mathcal{C}^\infty$ *et on a:*

$$\forall y \in U_2, \quad g'(y) = -\frac{e^{g(y)} + e^y\sin(2g(y))}{ye^{g(y)} + 2e^y\cos(2g(y))}.$$

2. Déterminer la limite de $\dfrac{x}{y}$ quand (x,y) tend vers $(0,0)$ le long de la courbe $\mathcal{C}$.
   Autour de $(0,0)$, *on a* $\dfrac{x}{y} = \dfrac{g(y)}{y} = \dfrac{1}{y}\left(g(0) + g'(0)y + y\epsilon(y)\right) = g'(0) + \epsilon(y)$, *avec* $g'(0) = -1/2$.
   La limite recherchée est donc $-1/2$.