IUT HSE
Introduction aux probabilités et statistiques

Philippe Jaming

Institut Mathématique de Bordeaux
Philippe.Jaming@gmail.com
http://www.math.u-bordeaux1.fr/˜ pjaming/

Ensembles et dénombrements

Ensemble= collection/ classe d'objets appelés *éléments*.
$x \in E$ signifie x est un élément de E ou encore x appartient à E.

Exemple

E= ensemble des résultats d'un lancer de dés (=6 faces).
$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

$\emptyset$= ensemble n'ayant aucun élément.

E, F deux ensembles, on dit que F est *inclus* dans E et on note $F \subset E$ si tous les éléments de F sont aussi des éléments de E.

Exemple

E= ensemble des résultats d'un lancer de dés, F ceux dont le résultat est pair :
$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $F = \{2, 4, 6\}$.

E_1, E_2 deux ensembles

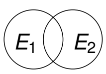
Definition

La *réunion* de E_1, E_2 est l'ensemble noté $E_1 \cup E_2$ qui contient tous les éléments de E_1 et tous les éléments de E_2.

N.B. Un élément n'est listé qu'une seule fois.

exemple

$E_1 = \{1, 2, 4, 5\}$ et $E_2 = \{2, 4, 6\}$ alors $E_1 \cup E_2 = \{1, 2, 4, 5, 6\}$.



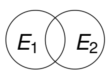
Réunion

Definition

L'*intersection* de E_1, E_2 est l'ensemble noté $E_1 \cap E_2$ qui contient tous les éléments *commun* de E_1 et de E_2.

exemple

$E_1 = \{1, 2, 4, 5\}$ et $E_2 = \{2, 4, 6\}$ alors $E_1 \cap E_2 = \{2, 4\}$.



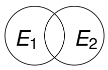
Intersection

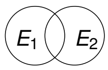
Definition

La *différence* de E_1, E_2 est l'ensemble noté $E_1 - E_2$ ou $E_1 \setminus E_2$ qui contient tous les éléments de E_1 qui ne sont pas dans E_2.
La différence symmétrique est $E_1 \Delta E_2 = (E_1 - E_2) \cup (E_2 - E_1)$.

exemple

$E_1 = \{1, 2, 4, 5\}$ et $E_2 = \{2, 4, 6\}$ alors $E_1 \setminus E_2 = \{1, 5\}$ et $E_1 \Delta E_2 = \{1, 5, 6\}$.





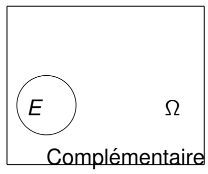
Différfence symétrique

Definition

Soit Ω un ensemble. Pour une partie E de Ω, $E \subset \Omega$, le *complémentaire* de E est l'ensemble des éléments de Ω qui ne sont pas dans E : $E^c = \overline{E} = \Omega \setminus E$.

exemple

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $E = \{2, 4, 6\}$ alors $E^c = \overline{E} = \{1, 3, 5\}$.



Definition

Le *produit cartésien* $E_1 \times E_2$ est l'ensemble des couples éléments de E_1 et de E_2 : $E_1 \times E_2 = \{(x, y) \,:\, x \in E_1, y \in E_2\}$.

Exemple

$E_1 = \{1, 2, 3\}$ et $E_2 = \{1, 2, 3\}$ alors

$$E1 \times E_2 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}.$$

Definition

Le *cardinal* d'un ensemble E est son nombre d'éléments. On le note $|E|$ ou card E.

Quelques formules

— $\mathrm{card}(A \cup B) = \mathrm{card}\, A + \mathrm{card}\, B - \mathrm{card}(A \cap B) \leq \mathrm{card}\, A + \mathrm{card}\, B$.
— $\mathrm{card}(A \times B) = \mathrm{card}\, A \times \mathrm{card}\, B$.

Quelques exemples d'ordre de grandeur :
—$10^{16} m$: une année-lumière, également le nombre de cellules dans le corps humain.
— 10^{50} : nombre d'atomes de la Terre.
— $32! \sim 10^{35}$: nombre de mélanges d'un jeu de 32 cartes.
$32! = 32 \times 31 \times 30 \times \cdot \times 2 \times 1$,
$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$: nombre de façons de classer n objets.

Modèle : on tire p boules dans une urne qui en contient n.
Exemple : lancer un dé = tirer une boule dans une urne qui en contient 6.
tirer 5 cartes dans un jeu de 32 = tirer 5 boules dans une urne qui en contient 32.
Question : avec ou sans remise, avec ou sans ordre ?

Avec ordre et avec remise

Le nombre de tirages de p boules dans une urne qui en contient n *avec ordre et avec remise* est n^p

Exemple. On tire 3 lettres dans l'alphabet (26 lettres) : il y a 26^3 mots : 26 possibilités pour la première lettre $\times$ 26 possibilités pour la seconde $\times$ 26 pour la troisième.

Avec ordre et sans remise

Le nombre de tirages de p boules dans une urne qui en contient n *avec ordre et sans remise* est

$$A_n^p = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Exemple. On veut écrire des mots de 3 lettres distintes (avec ordre). On a 26 possibilités pour la première lettre. Pour chacune, on a 25 possibilités pour la seconde. Pour chaque choix des 2 premières, on a 24 possibilités pour la dernière. Au total, il y a donc $26 \times 25 \times 24 = 15600$ mots.
En reprenant ce raisonnement avec p lettres parmi n, on retrouve la formule de A_n^p.

sans ordre et sans remise

Le nombre de tirages de p boules dans une urne qui en contient n *sans ordre et sans remise* est

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!}.$$

En effet, si on choisit p lettres distinctes parmi n on a A_n^p mots. Si on note C_n^p le nombre de mots dans lesquels l'ordre de lettres n'a pas d'importance ($abc = acb = bac = bca = cab = cba$ ici 3 lettres et $3! = 6$ façon de les classer), pour chaque choix de p lettres, on a $p!$ façons de les classer, donc $p!$ mots différents (c'est ici que le fait que les lettres soient distinctes joue un rôle).Ainci $C_n^p = A_n^p \times p!$.
Exemple. On veut choisir 3 lettres distintes. Il y a $C_{26}^3 = \frac{15600}{6} = 2600$ possibilités.

Proposition

$C_n^p = C_n^{n-p}$, $C_n^0 = C_n^n = 1$ et $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1