IUT HSE — Probabilités et statistiques

Université de Bordeaux 1 — 2013/2014

Contrôle du 21/01/2014.

Exercice 1.

(1) Calculer C_6^5.

(2) Une grille de mots croisés 10×10 est un carré de 10 cases par 10 cases dont certaines peuvent être noires. Combien de telles grilles existe-t-il ?

Peut-on les lister?

(3) De combien de façons peut-on classer (sans ex aequo) 35 étudiants d'un groupe de TD ?

Peut-on les lister?

Exercice 2.
En cas de fièvre 7 patients sur 10 prennent de l'efferalgant (ou équivalent), 1 sur 10 ne prennent aucun médicament et 2 sur 10 prend un médicamment M présentant des effets secondaires. Avec l'efferalgant, 75% des patients n'ont plus de fièvre au bout de 3 jours. Avec le médicament M, 90% des patients n'ont plus de fièvre au bout de 3 jours, sans médicament, 45% des patients n'ont plus de fièvre au bout de 3 jours

(i) Quel est le taux global de personnes guéries ?

(ii) Quel est la probabilité pour un patient de ne pas avoir pris de médicament sachant qu'il est guéri ?

Exercice 3. Dans cet exercice $p \in [0, 1]$ est fixé.

Un grand magasin souhaite installer un système de caméras pour la surveillance d'un de ses rayons. Deux solutions sont proposées:

– La première nécessite 3 caméras numérotées 1 à 3. Pour $i = 1$ à 3, on considère la variable aléatoire X_i qui vaut 0 si la caméra numéro i est opérationnelle et 1 si elle est défaillante (panne, obstruction, mauvais éclairage...).

– La deuxière nécessite 4 caméras numérotées de 1 à 4 et on considère la variable aléatoire Y_i qui vaut 0 si la caméra numéro i est opérationnelle et 1 si elle est défaillante.

Avec les premier systèmes, il faut 2 caméras opérationnelles pour que l'ensemble du rayon soit couvert, avec le second, il en faut 3.

Dans les deux cas, les caméras sont indépendantes et ont toutes la même probabilité p d'être défaillantes.

(i) Quelles lois suivent X_i et Y_i.

(ii) On note S et T les deux variables aléatoires $S = X_1 + \cdots + X_3$ et $T = Y_1 + \cdots + Y_4$. Quelles valeures peuvent prendre S et T et quelles lois suivent-elles ?

Que représentent ces deux variables aléatoires?

(iii) Calculez $\mathbb{P}(S = 0) + \mathbb{P}(S = 1)$ en fonction de p. Que représente cette quantité?

(iv) Calculez $\mathbb{P}(T = 0) + \mathbb{P}(T = 1)$ en fonction de p. Que représente cette quantité?

(v) Quelle solution choisissez vous? (Discutez en fonction de p).

T.S.V.P.

Exercice 4. On place un hamster dans une cage. Il se trouve face à 5 portillons qui ouvrent sur des couloirs vitrés. Un seul des 5 partillons lui permet d'accéder à de la nourriture, les 4 autres aboutissent à une parroi en verre qui le sépare de sa récompense. Lorsqu'il atteint cette parroi, il est replacé au centre de la cage.

(1) On suppose d'abord que le hamster n'est pas doué de mémoire et qu'il choisisse de façon équiprobable entre les 5 solutions à chaque nouvel essai. Déterminez la probabilité des évènements suivants:
  (a) le hamster sort au premier essai
  (b) le hamster sort au troisième essai

(2) Le hamster mémorise maintenant les essais infructueux et choisit de façon équiprobable entre les portillons qu'il n'a pas encore essayés. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'essais effectués.
  (a) Quelles valeurs peut prendre X ? Déterminez sa loi de probabilité.
  (b) Déterminez l'espérence $\mathbb{E}[X]$ et interprétez le résultat.
  (c) Déterminez la variance $Var(X)$.

Solution de l'exercice 1. (1) $C_6^5 = C_6^1 = 6$.

(2) Il y a $10 \times 10 = 100$ cases. Pour chaque case, il y a 2 possibilités. Il y a donc 2^{100} grilles. Comme $2^4 = 16 > 10$, $2^{100} = 2^{4\times 25} = (2^4)^{25} > 10^25$ grilles, c'est un nombre à au moins 25 chiffres. C'est bien trop pour en faire la liste.

(3) On donne un numéro de 1 à 35. Il y a 35! façons de classer $\{1, \ldots, 35\}$ donc de classer ces éléments.

$$35! = (1\times 2\times 3\times 4)\times(5\times 6)\times(7\times 8\times 9)\times 10\times\cdots\times 35 > 10\times 10\times 100\times 10^{26} = 10^{30}$$

ce nombre a au moins 30 chiffres, impossible de lister toutes les possibilités.

Solution de l'exercice 2. Notons S les patients soignés, E ceux ayant pris de l'efferalgant, M ceux ayant pris l'autre médicamment et N ceux n'ayant rien pris.

(i) Le taux global de personnes soulagées:

$$\mathbb{P}(S) = \frac{7}{10}\times 0,75 + \frac{2}{10}\times 0,9 + \frac{1}{10}\times 0,45 = 0,75.$$

(ii) La probabilité de ne pas avoir pris de médicamment sachant qu'on est guéri

$$\mathbb{P}(N|S) = \frac{\mathbb{P}(N\cap S)}{\mathbb{P}(S)} = \frac{\mathbb{P}(S|N)\mathbb{P}(N)}{\mathbb{P}(S)} = \frac{0.45\times\frac{1}{10}}{0.75} = 0.06 = 6\%$$

Solution de l'exercice 3. i) les X_i et Y_i suient une loi de Bernouilli $B(p)$ de para mètre p.

ii) S peut prendre les valeurs $0, 1, 2$ ou 3: le nombre de X_i qui valent 1 c'est-à-dire le nombre de caméras en panne pour la première solution. Une somme de k Bernouilli p est une binomiale $B(k, p)$ donc S suit une loi binomiale $B(3, p)$.

$$\mathbb{P}(S = k) = C_3^k p^k (1-p)^{3-k}.$$

De même, T peut prendre les valeurs $0, 1, 2, 3$ ou 4: le nombre de Y_i qui valent 1 c'est-à-dire le nombre de caméras en panne pour la deuxième solution. T suit une loi binomiale $B(4, p)$.

$$\mathbb{P}(T = k) = C_4^k p^k (1-p)^{4-k}.$$

iii) $\mathbb{P}(S=0)+\mathbb{P}(S=1) = C_3^0 p^0(1-p)^{3-0} + C_3^1 p^1 (1-p)^{3-1} = (1-p)^3 + 3p(1-p)^2 = (1+2p)(1-p)^2$ c'est la probabilité qu'il y ait au plus une caméra défaillante dans la solution 1 ou encore qu'il y ait au moins 2 caméras opérationnelles.

iv) $\mathbb{P}(T=0)+\mathbb{P}(T=1) = C_4^0 p^0(1-p)^{4-0} + C_4^1 p^1 (1-p)^{4-1} = (1-p)^4 + 4p(1-p)^3 = (1+3p)(1-p)^3$ c'est la probabilité qu'il y ait au plus une caméra défaillante dans la solution 2 ou encore qu'il y ait au moins 2 caméras opérationnelles.

v) On choisit la deuxième solution si $\mathbb{P}(T=0)+\mathbb{P}(T=1) \geq \mathbb{P}(S=0)+\mathbb{P}(S=1)$ et la première sinon. On veut donc résoudre $(1+3p)(1-p)^3 \geq (1+2p)(1-p)^2$ soit $1+2p-3p^2 = (1+3p)(1-p) \geq 1+2p$ ou encore $3p^2 \leq 0$.

On ne chosit donc la deuxième solution que si les caméras ont une probabilité nulle de tomber en panne.

Remarque: En pratique, on a fait entrer la possibilité d'obstruction dans la probabilité p, donc plus on a de caméra, plus celle-ci est faible. Pour la deuxième solution, on aurait donc une probabilité $\tilde{p} < p$ de défaillance. Celle-ci serait intéressante si $1+2\tilde{p}-3\tilde{p}^2 \geq$

$1+2p$ Ou encore $\tilde{p}^2 - \frac{2}{3}\tilde{p} + \frac{2}{3}p \leq 0$, mais il n'y a toujours pas de solution. Le fait d'avoir plus de caméra n'est intéressant que si on peut se passer de plus de caméras (donc si aumoins 2 caméras peuvent être défaillantes).

Solution de l'exercice 4. 1) Pour un essai, de deux choses l'une :

— ou bien le hamster trouve le bon portillon, c'est le succs, probabilit $p = 1/5$,

— ou bien le hamster ne trouve pas le bon portillon, c'est l'chec, probabilit $q = 1p = 4/5$.

Le fait de regarder si, pour un essai, le hamster trouve ou non le bon portillon constitue une épreuve de Bernoulli, dans laquelle la probabilité du succès est toujours la même, $p = 1/5$. Lorsqu'on répète cette épreuve de Bernoulli jusqu'à l'obtention d'un succès, le nombre d'essai nécessaire X suit une loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre $p = 1/5$.

$$\mathbb{P}(X = k) = q^{k1}p = \frac{4^{k-1}}{5^k}, k \in \mathbb{N}^*.$$

Les probabilités demandées s'en déduisent : $\mathbb{P}(X = 1) = p = 1/5$ et $\mathbb{P}(X = 3) = q^2p = 16/125$.

2) Soit toujours X le nombre d'essai nécessaire. Comme on élimine une porte à chaque fois X prend les valeurs de 1 à 5.

Soit comme précédemment X_k la variable aléatoire définie par $X_k = 1$ en cas de succès au k-ième essai et $X_k = 0$ en cas d'échec. Il y a une chance sur 5 de succès et 4/5 d'échec donc $\mathbb{P}(X_k = 0) = 4/5$ et $\mathbb{P}(X_k = 1) = 1/5$.

Le fait que le hamster réussisse au k-ième essai signifie qu'il a échoué $k-1$ fois puis réussit. La probabilité cherchée est donc

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(\{X_k = 1\} \cap \{X_1 = 0\} \cap \{X_2 = 0\} \cap \cdots \cap \{X_{k-1} = 0\})$$

puisque $X = k$ si on a échoué aux essais 1 à $k-1$ et réussit à l'essai k.

Le Hamster a maintenant une mémoire. Si on a échoué aux éssais 1 à $k-1$ on a éliminé $k-1$ portillons. Au k-ième essai, il reste donc $5 - (k-1) = 6 - k$ portillons à essayer et ils sont tous équiprobables donc

$$\mathbb{P}(X_k = 1 | \{X_1 = 0\} \cap \{X_2 = 0\} \cap \cdots \cap \{X_{k-1} = 0\}) = \frac{1}{6-k}$$

(la probabilité de succès à l'essai k sachant les résultats des $k-1$ premiers essais) et

$$\mathbb{P}(X_k = 0 | \{X_1 = 0\} \cap \{X_2 = 0\} \cap \cdots \cap \{X_{k-1} = 0\}) = 1 - \frac{1}{6-k}.$$

Mais alos $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{5}$ puisque les 5 portillons sont équiprobables. Puis

$$\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(\{X_2 = 1\} \cap \{X_1 = 0\}) = \mathbb{P}(\{X_2 = 1\} | \{X_1 = 0\})\mathbb{P}(X_1 = 0) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5}.$$

Puis

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=3) &= \mathbb{P}(\{X_3=1\}\cap\{X_2=0\}\cap\{X_1=0\})\\
&= \mathbb{P}(\{X_3=1\}|\{X_2=0\}\cap\{X_1=0\})\mathbb{P}(\{X_2=0\}\cap\{X_1=0\})\\
&= \mathbb{P}(\{X_3=1\}|\{X_2=0\}\cap\{X_1=0\})\mathbb{P}(\{X_2=0\}|\{X_1=0\})\mathbb{P}(X_1=0)\\
&= \frac{1}{3}\times(1-\frac{1}{4})\frac{4}{5}=\frac{1}{5}.
\end{aligned}$$

et ensuite

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=4) &= \mathbb{P}(\{X_4=1\}\cap\{X_3=0\}\cap\{X_2=0\}\cap\{X_1=0\})\\
&= \mathbb{P}(\{X_4=1\}|\{X_3=0\}\cap\{X_2=0\}\cap\{X_1=0\})\times\\
&\quad \times\mathbb{P}(\{X_3=0\}\cap\{X_2=0\}\cap\{X_1=0\})\\
&= \mathbb{P}(\{X_4=1\}|\{X_3=0\}\cap\{X_2=0\}\cap\{X_1=0\})\times\\
&\quad \times\mathbb{P}(\{X_3=0\}|\{X_2=0\}\cap\{X_1=0\})\mathbb{P}(\{X_2=0\}\cap\{X_1=0\})\\
&= \mathbb{P}(\{X_4=1\}|\{X_3=0\}\cap\{X_2=0\}\cap\{X_1=0\})\times\\
&\quad \times\mathbb{P}(\{X_3=0\}|\{X_2=0\}\cap\{X_1=0\})\times\\
&\quad \times\mathbb{P}(\{X_2=0\}|\{X_1=0\})\mathbb{P}(\{X_1=0\})=\frac{1}{5}.
\end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=5) &= \mathbb{P}(\{X_5=1\}\cap\{X_4=0\}\cap\{X_3=0\}\cap\{X_2=0\}\cap\{X_1=0\})\\
&= \mathbb{P}(\{X_5=1\}|\{X_4=0\}\cap\{X_3=0\}\cap\{X_2=0\}\cap\{X_1=0\})\times\\
&\quad \times\mathbb{P}(\{X_4=0\}|\{X_3=0\}\cap\{X_2=0\}\cap\{X_1=0\})\times\\
&\quad \times\mathbb{P}(\{X_3=0\}|\{X_2=0\}\cap\{X_1=0\})\mathbb{P}(\{X_2=0\}|\{X_1=0\})\mathbb{P}(\{X_1=0\})=\frac{1}{5}.
\end{aligned}$$