L3: Introduction au traitement du signal

Philippe Jaming

Institut Mathématique de Bordeaux
Philippe.Jaming@gmail.com
http://www.math.u-bordeaux1.fr/p̃jaming/

Cours 3: convolution et Fourier

Groupes et fonctions

G= groupe et $f : G \to \mathbb{C}$ fonction sur G

- $G = \mathbb{Z}^d$, $f : G \to \mathbb{C} : f = (f_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ suite.
- $N \geq 2$ entier, $G = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} = \{0, 1, \ldots, N-1\}$: $j + k$ signifie $j + k \pmod N$.
  $f : G \to \mathbb{C} : f = \big(f(0), f(1), \ldots, f(N-1)\big) \in \mathbb{C}^N$ou $f = (f_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ N-périodique $f_{k+N} = f_k$.
  $N, M \geq 1$ entiers $G = (\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$, $f : G \to \mathbb{C}$: matrice $M \times N$ ou suite $f_{j,k}$ M-périodique en j et N-périodique en k.
- $G = \mathbb{R}^d$, $f : G \to \mathbb{C}$ fonction de d variables.
- $G = \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z} = [0, 1)$ avec $x + y$ signifiant $x + y \pmod 1$.
  Alternative $G = \{e^{2i\pi x}, x \in [0, 1]\}$ avec la *multiplication* $e^{2i\pi x}e^{2i\pi y} = e^{2i\pi(x+y)}$.
  $f : G \to \mathbb{C}$= fonction 1-périodique $f(x + 1) = f(x)$.

Intégration sur G

$f : G \to \mathbb{C}$

- $G = \mathbb{Z}^d$: $\displaystyle\int_G f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} f_k$ (si ça converge).
- $G = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$: $\displaystyle\int_G f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f_k = \frac{1}{N}\sum_{k=k_0}^{k_0+N-1} f_k$
- $G = \mathbb{R}^d$: $\displaystyle\int_G f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} f(x_1, \ldots, x_d)\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_d$
- $G = \mathbb{T}$: $\displaystyle\int_G f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{a+1} f(t)\,\mathrm{d}t$

Espaces L^1, L^2, L^∞

$f : G \to \mathbb{C}$

- $L^\infty(G) = \{f : G \to \mathbb{C} : \|f\|_\infty := \sup_{x\in G}|f(x)| < +\infty\}$.
- $L^1(G) = \{f : G \to \mathbb{C} : \|f\|_1 := \int_G |f(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty\}$.
- $L^2(G) = \left\{f : G \to \mathbb{C} : \|f\|_2 := \left(\int_G |f(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} < +\infty\right\}$

$$\langle f, g\rangle = \int_G f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x.$$

- $\mathcal{C}_0(G) \subset L^\infty(G)$ fonctions continues ($G = \mathbb{R}^d, \mathbb{T}^d$) qui tendent vers 0 à l'infini ($G = Z^d, \mathbb{R}^d$).

Propriétés

1. $L^p(G)$ est un espace vectoriel.
2. $\|.\|_p$ est une norme.
3. $L^p(G), \|.\|_p$ est *complet*
4. Inclusions :
   - $G = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, $L^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) = L^2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) = L^\infty(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$
   - $G = \mathbb{Z}$, $L^1(\mathbb{Z}) \subset L^2(\mathbb{Z}) \subset L^\infty(\mathbb{Z})$
   - $G = \mathbb{T}$, $L^\infty(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T}) \subset L(\mathbb{T})$
   - $G = \mathbb{R}$ pas d'inclusion

Convolution

$f, g : G \to \mathbb{C}, f * g : G \to \mathbb{C}$

$$f * g(x) = \int_G f(y) g(x - y)\,\mathrm{d}x.$$

Propriétés

1. $f \in L^1(G)$ et $g \in L^\infty(G)$ (ou vice versa), $f * g \in L^\infty(G)$ avec $\|f * g\|_\infty \le \|f\|_1 \|g\|_\infty$.
2. $f, g \in L^2(G)$, $f * g \in \mathcal{C}_0(G)$ avec $\|f * g\|_\infty \le \|f\|_2 \|g\|_2$.
3. $f, g \in L^1(G)$, $f * g \in L^1(G)$ avec $\|f * g\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1$.
4. $f \in L^1(G)$ et $g \in L^2(G)$ (ou vice versa), $f * g \in L^2(G)$ avec $\|f * g\|_2 \le \|f\|_1 \|g\|_2$.

Propriétés - 2

1. $f * g = g * f$ et $(\lambda f + \mu \tilde{f}) * g = \lambda f * g + \mu \tilde{f} * g$
2. **Régularisation.** pour $G = \mathbb{T}^d$ ou $\mathbb{R}^d$: si $f \in \mathcal{C}^k(G)$ avec $\partial^j f \in L^\infty(G)$ $j = 0, \ldots, k$alors $f * g \in \mathcal{C}^k(G)$ avec $\partial^j (f * g) = (\partial^j f) * g$.
3. **Approximation par une fonction régulière.** $G = \mathbb{R}^d$, $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ $f \ge 0$, $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.
   Pour $\delta > 0$, $f_\delta(x) = \delta^{-d} f(x/\delta)$.
   $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $p = 1$ ou 2 ou $C_0(\mathbb{R}^d)$ ($p = \infty$),alors $f_\delta * g \to g$ quand $\delta \to 0$ dans $L^p(G)$.
4. $G = \mathbb{T}$, même chose avec f_δ t.q. $\int_{\eta < |x| < 1/2} f(x)\,\mathrm{d}x \to 0$ pour tout η.

Exercice

Si $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ (resp. g) est à support $\{0, \ldots, M\}$ (resp. $\{0, \ldots, N\}$)*i.e.* $f = (f_0, \ldots, f_M)$ et $g = (g_0, \ldots, g_m)$, on peut leur associer des polynômes $P_f(z) = \sum_{k=0}^{M} f_k z^k$, $P_g(z) = \sum_{k=0}^{N} g_k z^k$alors

$$P_{f*g}(z) = P_f(z) P_g(z).$$

Charactère

Un charactère de G est une fonction continue $\gamma : G \to \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ t.q. $\gamma(x+y) = \gamma(x)\gamma(y)$.
$\hat{G}$ l'ensemble des charactères de G.

- $G = \mathbb{Z}$, $\hat{G} = \{(e^{2i\pi j\xi})_{j\in\mathbb{Z}} : \xi \in [0,1)\} = \mathbb{T}$.
- $G = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, $\hat{G} = \{(e^{2i\pi jk/N})_{j=0,\ldots,N-1} : k = 0,\ldots,N-1\} = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.
- $G = \mathbb{R}^d$, $\hat{G} = \{t \to e^{2i\pi\langle\xi,t\rangle} : \xi \in \mathbb{R}^d\} = \mathbb{R}^d$.
- $G = \mathbb{T}$, $\hat{G} = \{t \to e^{2i\pi jt} : j \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$.

Transformée de Fourier

$f \in L^1(G)$, $\widehat{f} := \mathcal{F}[f] \in \mathcal{C}_0(\hat{G})$ défini par $\mathcal{F}[f](\gamma) = \displaystyle\int_G f(x)\overline{\gamma(x)}\,\mathrm{d}x$.
Explicitement :

- $G = \mathbb{T}$, $k \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{F}[f](k) = \displaystyle\int_0^1 f(t)e^{-2i\pi kt}\,\mathrm{d}t = c_k(f)$ *coefficient de Fourier*.
- $G = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, $\mathcal{F}[f](k) := \mathcal{F}_N[f](k) = \displaystyle\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f_k e^{-2i\pi jk/N}$ *transformée de Fourier discrète*
- $G = \mathbb{Z}$, $t \in [0,1)$, $\mathcal{F}[f](t) = \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k)e^{-2i\pi kt}$ *transformée de Fourier à temps discret*.
- $G = \mathbb{R}^d$, $\xi \in \mathbb{R}^d$, $\mathcal{F}[f](\xi) = \displaystyle\int_{R^d} f(x)e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle}\,\mathrm{d}x$.

Transformée de Fourier inverse

$f \in L^1(G)$, si $\mathcal{F}[f] \in L^1(\hat{G})$ alors $f \in \mathcal{C}_0(G)$ et

$$f(x) = c_G \int_{\hat{G}} \widehat{f}(\gamma)\gamma(x)\,\mathrm{d}\gamma$$

avec $c_G = 1$ sauf $c_{Z/N\mathbb{Z}} = N$.
Explicitement :

- $G = \mathbb{T}$, $t \in \mathbb{T}$, $f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)e^{2i\pi kt}$ *série de Fourier*.
- $G = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, $f(j) = \displaystyle\sum_{j=0}^{N-1}\widehat{f}_j e^{2i\pi jk/N}$
- $G = \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$, $f_k = \displaystyle\int_0^1 \widehat{f}(t)e^{2i\pi kt}$.
- $G = \mathbb{R}^d$, $x \in \mathbb{R}^d$, $f(x) = \displaystyle\int_{R^d} \mathcal{F}[f](\xi)e^{2i\pi\langle x,\xi\rangle}\,\mathrm{d}\xi$.

$$\sum_{j=0}^{N-1}\widehat{f}_j e^{2i\pi jk/N} = \sum_{j=0}^{N-1} e^{2i\pi jk/N}\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} f_l e^{-2i\pi jl/N}$$

$$= \sum_{l=0}^{N-1}\frac{1}{N}f_l\sum_{j=0}^{N-1} e^{2i\pi j(k-l)/N} = f_k$$

$f \in L^1(G)$

1. $a \in G$, $\tau_a f(t) = f(t-a)$, $\mathcal{F}[\tau_a f](\gamma) = \overline{\gamma(a)}\mathcal{F}[f](\gamma) = \gamma(-a)\mathcal{F}[f](\gamma)$

$$\mathcal{F}_N[\tau_\ell f](k) = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f_{j-\ell}e^{-2i\pi jk/N}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{j'=0}^{N-1} f_{j'}e^{-2i\pi(j'+\ell)k/N} = \mathcal{F}_N[f](k)e^{-2i\pi\ell k/N}$$

2. $\xi \in \hat{G}$, $M_\xi f(t) = \xi(t)f(t)$, $\mathcal{F}[M_\xi f](\gamma) = \mathcal{F}[f](\gamma - \xi)$

$$\mathcal{F}_N[M_\ell f](k) = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{2i\pi j\ell/N}e^{-2i\pi jk/N}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-2i\pi j(k-\ell)/N} = \mathcal{F}_N[f](k-\ell).$$

1. $G=\mathbb{R}^d$, $\delta>0$ $f_\delta(t)=\delta^{-d}f(t/\delta)$ $\mathcal{F}[f_\delta](\xi)=\mathcal{F}(\delta\xi)$.
2. $G=\mathbb{T}^d$ $\xi\in\mathbb{Z}^d$ ou $\mathbb{R}^d$ et $\xi\in\mathbb{R}^d$,

$$\mathcal{F}[\partial f](\xi)=2i\pi\xi\mathcal{F}[f](\xi)$$

Dans $\mathbb{T}$: $\displaystyle\mathcal{F}[\partial f](k)=\int_0^1 \partial f(t)e^{-2i\pi kt}\,\mathrm{d}t$

$$=\Big[f(t)\partial e^{-2i\pi kt}\Big]_0^1-\int_0^1 f(t)\partial e^{-2i\pi kt}\,\mathrm{d}t$$

$$=2i\pi k\int_0^1 f(t)e^{-2i\pi kt}\,\mathrm{d}t.$$

3. $G=\mathbb{Z}^d$ $\xi\in\mathbb{T}^d$ ou $\mathbb{R}^d$ et $\xi\in\mathbb{R}^d$, $\partial\mathcal{F}[f](\xi)=\mathcal{F}[-2i\pi tf(t)](\xi)$.

Parseval

$\|f\|^2_{L^2(G)}=c_G\left\|\widehat{f}\right\|^2_{L^2(\widehat{G})}$ c.a.d $\displaystyle\int_G|f(x)|^2\,\mathrm{d}x=c_G\int_{\widehat{G}}|\widehat{f}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi$ avec $c_G=1$ sauf si $G=\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ où $c_{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}=N$

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}|\widehat{f}(j)|^2&=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\widehat{f}(j)\overline{\widehat{f}(j)}\\&=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}f_ke^{-2i\pi jk/N}\overline{\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}f_le^{-2i\pi jl/N}}\\&=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}f_k\overline{f_l}\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}e^{-2i\pi j(k-l)/N}\\&=\frac{1}{N}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}f_k\overline{f_k}.\end{aligned}$$

Fourier et convolution

$$\mathcal{F}[f*g](\gamma)=\mathcal{F}[f](\gamma)\mathcal{F}[g](\gamma).$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_N[f*g](\ell)&=\tfrac{1}{N}\textstyle\sum_{k=0}^{N-1}f*g(k)e^{-2i\pi k\ell/N}\\&=\frac{1}{N}\sum_{k=0,\dots,N-1}\frac{1}{N}\sum_{j=0,\dots,N-1}f(j)g(k-j)e^{-2i\pi k\ell/N}\\&=\frac{1}{N}\sum_{j=0,\dots,N-1}f(j)\frac{1}{N}\sum_{k=0,\dots,N-1}g(k-j)e^{-2i\pi k\ell/N}\\&=\frac{1}{N}\sum_{j=0,\dots,N-1}f(j)\frac{1}{N}\sum_{k'=-j,\dots,N-1-j}g(k')e^{-2i\pi(k'+j)\ell/N}\\&=\frac{1}{N}\sum_{j=0,\dots,N-1}f(j)e^{-2i\pi j\ell/N}\frac{1}{N}\sum_{k'=-j,\dots,N-1-j}g(k')e^{-2i\pi k'\ell/N}\\&=\mathcal{F}_N[f](\ell)\mathcal{F}_N[g](\ell).\end{aligned}$$

P polynôme trigonométrique de degré M si

$$P(t)=\sum_{k=-M}^{M}c_ke^{2i\pi kt}$$

$\displaystyle c_k=c_k(P)=\int_0^1 P(t)e^{-2i\pi kt}\,\mathrm{d}t.$

Soit $f_j=P\left(\dfrac{j}{2M+1}\right)$, $j=0,\dots,2M+1$ (ou $k=-M,\dots,M$) et $f=(f_j)_{j=0,\dots,2M+1}$

Alors

$$c_k(P)=\mathcal{F}_{2M+1}[f](k)=\begin{cases}\mathcal{F}_{2M+1}[f](k)&\text{pour }k=0,\dots,M\\\mathcal{F}_{2M+1}[f](2M+1+k)&\text{pour }k=_M,\dots,-1\end{cases}.$$