Mathématiques Appliquées Bordeaux

Licence d' Ingénierie Mathématiques

Année 2 et 3

L4MIngMa3: modèles et méthodes d'optimisation

Leçon 2:

Introduction à la programmation linéaire

Sommaire:

1. Qu'est ce qu' un programme linéaire
   - Hypothèses faites en programmation linéaire
   - Représentation graphique d'un LP
   - Solution graphique d'un LP
2. Méthode de résolution: algorithme du Simplex
3. Dégénerecence
4. Dualité et interprétation économique

François Vanderbeck, MAB, Bur.: A33:257, Email: fv@math.u-bordeaux.fr

Exemple de PL: Production de verre

Une entreprise fabrique des verres à jus et à cocktail

	jus	coktail	capacité
profit	500	450	
produire 100 boites	6 heures	5 heures	60 h/sem
espace de stockage	$10\ p^3$/boite	$20\ p^3$/boite	$15000\ p^3$
# maximum vendu	8		

<u>Formulation:</u>

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\max & 500 & x_1 & + & 450 & x_2 & & \\
\text{s.a.} & 6 & x_1 & + & 5 & x_2 & \leq & 60 \\
 & 10 & x_1 & + & 20 & x_2 & \leq & 150 \\
 & & x_1 & & & & \leq & 8 \\
 & & x_1 & , & & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Qu'est-ce qu'un programme linéaire (LP)?

Exemple 1:

$$\begin{array}{lrcrcl} \min & -3\,x_1 + x_2 & & & & \\ \text{s.a.} & x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & 2\,x_1 & + & 2\,x_2 & \geq & 10 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Exemple 2:

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & x_1 - x_2 & & & & \\ \text{s.a.} & -2\,x_1 & + & x_2 & \leq & -1 \\ & -\,x_1 & - & 2\,x_2 & \leq & -2 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Variables:

variables réelles: $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

Objectif:

Fonction objectif linéaire: $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$

Contraintes:

équations linéaires: $a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1$

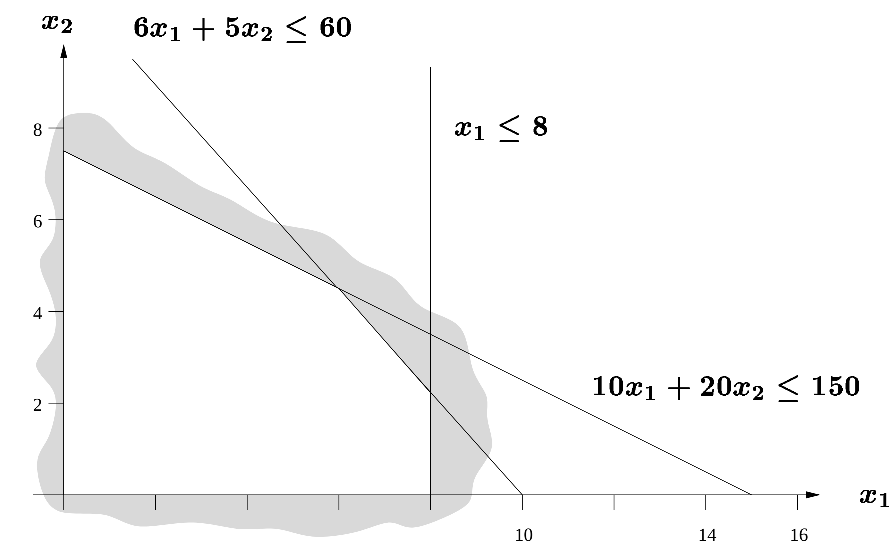
inéqualités linéaires: $\begin{cases} a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n \leq b_2 \\ a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + \ldots + a_{3,n}x_n \geq b_3 \end{cases}$

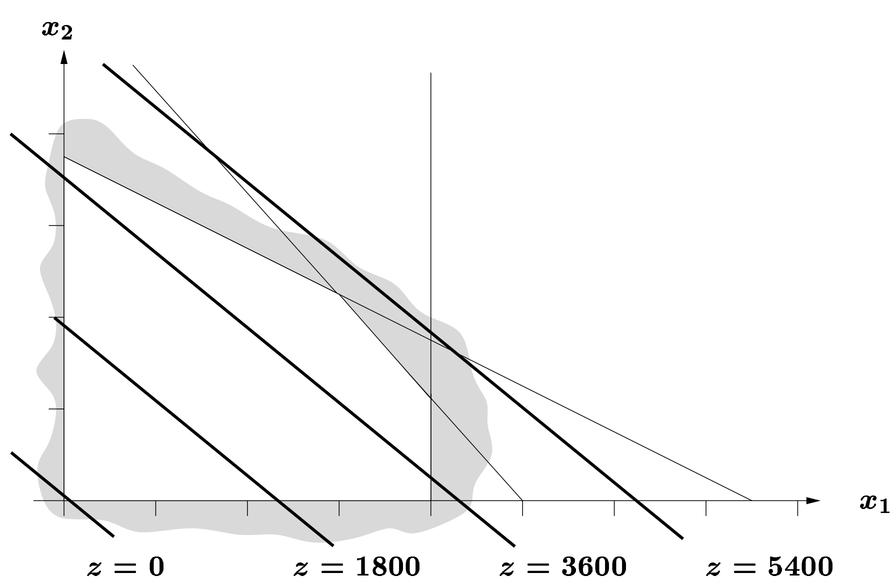
Hypothèses fondamentales:

Linéarité: coût/profit par unité et consommation des ressources par unité reste constant.

Continuité: les variables peuvent prendre n'importe quelle valeur réelle.

Représentation graphique





Résolution graphique

Translater l'hyperplan "équi-profit" vers un profit maximum tant qu'il a une intersection non vide avec la région réalisable.

Observations

1. solution optimale $\notin$ intérieur de la région réalisable

2. la solution optimale en un sommet (point extrême)

3. s'il y a de multiples solutions optimales, on peut en trouver une en un sommet

$\Rightarrow$ **il suffit d'examiner les sommets**

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{PL} \subseteq$ {problèmes d'optimisation combinatoire}

4. le long d'une arête,

   (a) l'objectif croît, ou

   (b) l'objectif reste constant, ou

   (c) l'objectif décroît.

Algorithme (procédure de résolution) géométrique

1. Commencer à n'importe quel sommet réalisable, $\boldsymbol{x}$.

2. A partir de $\boldsymbol{x}$, trouver une arête le long de laquelle l'objectif croît.
   Si il n'y en a pas, $\boldsymbol{x}$ est optimal, STOP.

3. Aller au point $\boldsymbol{y}$ au bout de cette arête tq

$$\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{y} < \boldsymbol{c}\,\boldsymbol{x}$$

   redéfinir $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$; et
   retourner en 2.

L'ALGORITHME DU SIMPLEX sur un exemple

Problème linéaire:

$$\begin{array}{rrcl} \max & 5\,x_1 + 4\,x_2 + 3\,x_3 & & \\ \text{s.a.} & 2\,x_1 + 3\,x_2 + 1\,x_3 & \leq & 5 \\ & 4\,x_1 + 1\,x_2 + 2\,x_3 & \leq & 11 \\ & 3\,x_1 + 4\,x_2 + 2\,x_3 & \leq & 8 \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

On introduit des variables d'écart et une variable de profit

$$\begin{array}{rcl} x_4 & = & 5 - 2\,x_1 - 3\,x_2 - 1\,x_3 \\ x_5 & = & 11 - 4\,x_1 - 1\,x_2 - 2\,x_3 \\ x_6 & = & 8 - 3\,x_1 - 4\,x_2 - 2\,x_3 \\ z & = & 5\,x_1 + 4\,x_2 + 3\,x_3 \end{array}$$

Ce système s'appelle un **dictionnaire**;
les variables de gauche sont appelées **variables de base**;
les variables de droite sont appelées **variables hors base**.

Le problème devient

$$\max\{z : \ z = \ldots, \ x_4 = \ldots, \ x_5 = \ldots, \ x_6 = \ldots$$

$$x_1, \ x_2, \ldots, \ x_6 \geq 0\}$$

On trouve une solution initiale

$$x_1 = 0, \ x_2 = 0, \ x_3 = 0, \ x_4 = 5, \ x_5 = 11, \ x_6 = 8, \ z = 0$$

On tente d'améliorer cette solution

Augmenter x_1 en gardant $x_2 = x_3 = 0$. De combien peut-on augmenter x_1 en restant réalisable: $x_4, x_5, x_6 \geq 0$?

Réponse: $\boldsymbol{x_4 \geq 0 x_1 \leq \frac{5}{2}}$, $\boldsymbol{x_5 \geq 0 x_1 \leq \frac{11}{4}}$, $\boldsymbol{x_6 \geq 0 x_1 \leq \frac{8}{3}}$. Donc, la solution suivante sera

$$\boldsymbol{x_1 = \frac{5}{2},\ x_2 = 0, x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = 1,\ x_6 = \frac{1}{2},\ z = \frac{25}{2}}$$

Peut-on encore l'améliorer? Difficile à voir sans un système d'équations aussi simple qu'au départ.
Exprimons $\boldsymbol{x_1, x_5, x_6}$ et $\boldsymbol{z}$ en termes de $\boldsymbol{x_2, x_3, x_4}$.

On reconstruit le système d'équations: Exprimons la variable entrante $\boldsymbol{x_1}$ en utilisant l'équation de la variable sortante $\boldsymbol{x_4}$:

$$\boldsymbol{x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\, x_2 - \frac{1}{2}\, x_3 - \frac{1}{2}\, x_4}$$

Ensuite, on remplace $\boldsymbol{x_1}$ dans les équations définissant $\boldsymbol{x_5, x_6}$ et $\boldsymbol{z}$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x_5} &= \boldsymbol{11 - 4\,(\tfrac{5}{2} - \tfrac{3}{2}\,x_2 - \tfrac{1}{2}\,x_3 - \tfrac{1}{2}\,x_4) - 1\,x_2 - 2\,x_3} \\
\boldsymbol{x_6} &= \boldsymbol{8 - 3\,(\tfrac{5}{2} - \tfrac{3}{2}\,x_2 - \tfrac{1}{2}\,x_3 - \tfrac{1}{2}\,x_4) - 4\,x_2 - 2\,x_3} \\
\boldsymbol{z} &= \boldsymbol{5\,(\tfrac{5}{2} - \tfrac{3}{2}\,x_2 - \tfrac{1}{2}\,x_3 - \tfrac{1}{2}\,x_4) + 4\,x_2 + 3\,x_3}
\end{aligned}$$

Le nouveau système (**dictionnaire**) s'écrit

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x_1} &= \boldsymbol{\tfrac{5}{2} - \tfrac{3}{2}\,x_2 - \tfrac{1}{2}\,x_3 - \tfrac{1}{2}\,x_4} \\
\boldsymbol{x_5} &= \boldsymbol{1 + 5\,x_2 - 0\,x_3 - 2\,x_4} \\
\boldsymbol{x_6} &= \boldsymbol{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\,x_2 - \tfrac{1}{2}\,x_3 + \tfrac{3}{2}\,x_4} \\
\boldsymbol{z} &= \boldsymbol{\tfrac{25}{2} - \tfrac{7}{2}\,x_2 + \tfrac{1}{2}\,x_3 - \tfrac{5}{2}\,x_4}
\end{aligned}$$

On réitère le processus:

Augmentons x_3 dont le coéfficient dans l'objectif est positif, tout en maintenant $x_2 = x_4 = 0$ et $x_1, x_5, x_6 \geq 0$.

x_3 peut augmenter jusqu'à 1 (la borne étant dictée par $x_6 \geq 0$). Donc x_6 quite la solution courante et le nouveau système devient:

$$\begin{aligned}
x_3 &= 1 + 1\,x_2 + 3\,x_4 - 2\,x_6 \\
x_1 &= 2 - 2\,x_2 - 2\,x_4 + 1\,x_6 \\
x_5 &= 1 + 5\,x_2 + 2\,x_4 + 0\,x_6 \\
z &= 13 - 3\,x_2 - 1\,x_4 - 1\,x_6
\end{aligned}$$

Jusqu'à ce que la solution courante soit optimale:

Dans la solution courante, augmenter x_2, x_4 ou x_6 fait décroître l'objectif z. On en déduit que pour toutes solutions réalisables $z \leq 13$ et que donc la solution courante de profit $z = 13$ est optimale.

Dégénérescence:

Quand il y a plusieurs candidats “variable sortante”, la nouvelle solution de base aura une ou plusieurs variables de base prenant la valeur zéro:

$$\bar{b}_i = 0 \quad \text{pour certain } i \in \mathcal{B} \text{ .}$$

On dit alors que la solution de base est dégénérée.

EXEMPLE:

$$\begin{array}{rcl} x_4 &=& 1 + 0\,x_1 + 0\,x_2 - 2\,x_3 \\ x_5 &=& 3 - 2\,x_1 + 4\,x_2 - 6\,x_3 \\ x_6 &=& 2 + 1\,x_1 - 3\,x_2 - 4\,x_3 \\ z &=& 0 + 2\,x_1 - 1\,x_2 + 8\,x_3 \end{array}$$

Solution de base associée $x = (0, 0, 0, 1, 3, 2)$ et $z = 0$

$$\begin{array}{rcl} x_3 &=& \frac{1}{2} + 0\,x_1 + 0\,x_2 - \frac{1}{2}\,x_4 \\ x_5 &=& 0 - 2\,x_1 + 4\,x_2 + 3\,x_4 \\ x_6 &=& 0 + 1\,x_1 - 3\,x_2 + 2\,x_4 \\ z &=& 4 + 2\,x_1 - 1\,x_2 - 4\,x_4 \end{array}$$

Solution de base associée $x = (0, 0, \frac{1}{2}, 0, 0, 0)$ et $z = 4$

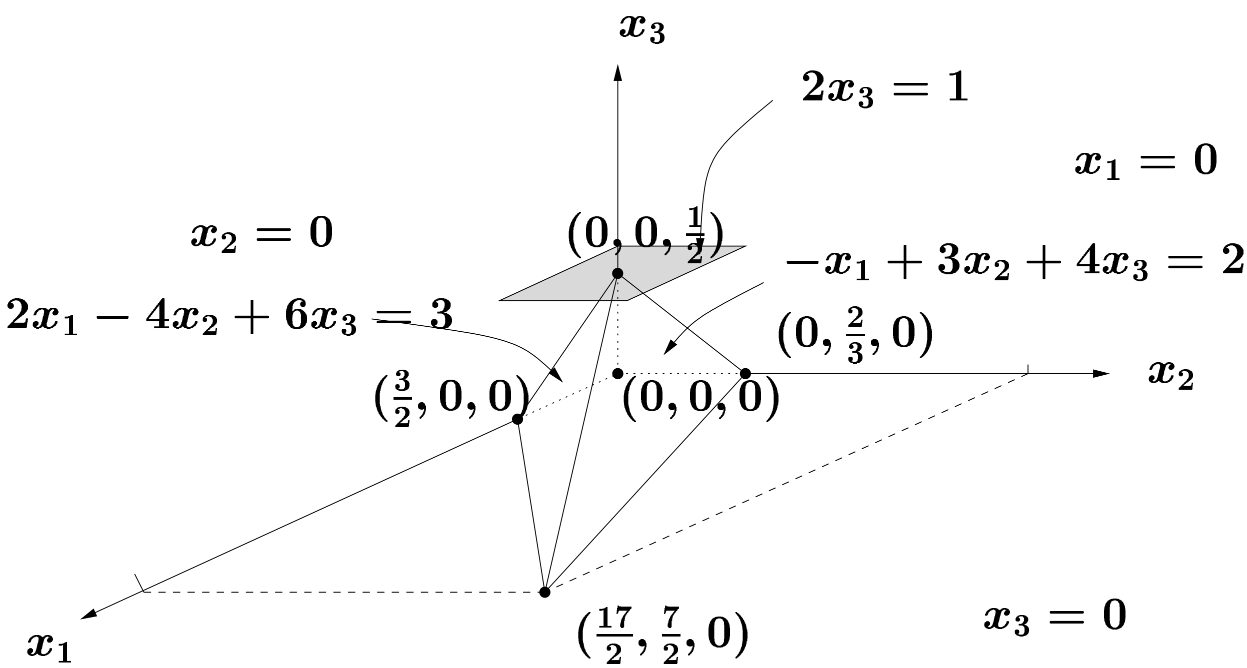
A l’itération suivante,

$$\begin{array}{rcl} x_1 &=& 0 + 2\,x_2 + \frac{3}{2}\,x_4 - \frac{1}{2}\,x_5 \\ x_3 &=& \frac{1}{2} + 0\,x_2 - \frac{1}{2}\,x_4 + 0\,x_5 \\ x_6 &=& 0 - 1\,x_2 + \frac{7}{2}\,x_4 - \frac{1}{2}\,x_5 \\ z &=& 4 + 3\,x_2 - 1\,x_4 - 1\,x_5 \end{array}$$

Solution de base associée $x = (0, 0, \frac{1}{2}, 0, 0, 0)$ et $z = 4$

Illustration de la géométrie du Simplex

$$\begin{array}{rrcl} \max & 2\,x_1 - 1\,x_2 + 8\,x_3 & & \\ \text{s.a.} & 0\,x_1 + 0\,x_2 + 2\,x_3 & \leq & 1 \\ & 2\,x_1 - 4\,x_2 + 6\,x_3 & \leq & 3 \\ & -1\,x_1 + 3\,x_2 + 4\,x_3 & \leq & 2 \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$



Cas de dégénérescence:

1. base $\{x_4, x_5, x_6\}$: sommet $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$
2. base $\{x_3, x_5, x_6\}$: sommet $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, \frac{1}{2})$
3. base $\{x_1, x_3, x_6\}$: sommet $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, \frac{1}{2})$
4. base $\{x_1, x_2, x_3\}$: sommet $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, \frac{1}{2})$
5. base $\{x_1, x_2, x_4\}$: sommet $(x_1, x_2, x_3) = (\frac{17}{2}, \frac{7}{2}, 0)$

TERMINOLOGIE

Région réalisable: Ensemble des points qui satisfont aux contraintes du problème

$$\boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \ \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, \ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$$

Solution réalisable: Une solution $\boldsymbol{x}$ est réalisable si les valeurs numériques $\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots, x_n}$ satisfont à l'ensemble des contraintes du problème.

$$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$$

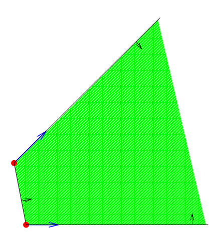
Solution optimale: Une solution réalisable $\boldsymbol{x^*}$ est optimale si la valeur qu'elle donne à la fonction coût est $\leq$ aux valeurs données par les autres solutions réalisables. (Pas nécessairement unique.)

$$\boldsymbol{x}^* \in \boldsymbol{X} \ \text{ et } \ \boldsymbol{c}\,\boldsymbol{x}^* \leq \boldsymbol{c}\,\boldsymbol{x} \ \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$$

Problème irréalisable: Un programme linéaire est irréalisable s'il n'y a pas de solution réalisable (cfr exemple 1).

$$\boldsymbol{X} = \emptyset$$

Problème non borné: Un programme linéaire est non borné si quelle que soit la borne donnée $\boldsymbol{B}$, il existe une solution réalisable de coût inférieur à cette borne (cfr exemple 2): $\forall \boldsymbol{B}, \ \exists \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X} : \ \boldsymbol{c}\,\boldsymbol{x} < \boldsymbol{B}$.



Forme Normale / Standard:

Normale	**Standard**
$\begin{array}{rrl} & \max & \boldsymbol{c}\,\boldsymbol{x} \\ \text{s.a.} & \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} & \leq \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} & \geq 0 \end{array}$	$\begin{array}{rrl} & \max & \boldsymbol{c}\,\boldsymbol{x} \\ \text{s.a.} & \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} & = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} & \geq 0 \end{array}$

Transformation:

- $$\min \boldsymbol{c}\,\boldsymbol{x} \Leftrightarrow \max \boldsymbol{c}'\,\boldsymbol{x} \quad \text{où } \boldsymbol{c}' = -\boldsymbol{c}$$

- $$\boldsymbol{a}\;\;\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}'\,\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}' \quad \text{où } \boldsymbol{a}' = -\boldsymbol{a} \text{ et } \boldsymbol{b}' = -\boldsymbol{b}$$

- $$\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{b} \text{ et } \boldsymbol{w} \geq 0$$

- $$\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}\,\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \text{ et } \boldsymbol{a}\,\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$$

- si une variable, $\boldsymbol{x}_i$, est libre (peut prendre des valeurs négatives ou positives), on l'élimine du système d'équations:
  - on choisit une équation contenant $\boldsymbol{x}_i$ ($\exists$?),
  - on isole $\boldsymbol{x}_i$:

    $$\boldsymbol{x}_i = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}_i} - \frac{\boldsymbol{a}_1}{\boldsymbol{a}_i}\boldsymbol{x}_1 - \ldots - \frac{\boldsymbol{a}_{i-1}}{\boldsymbol{a}_i}\boldsymbol{x}_{i-1} - \frac{\boldsymbol{a}_{i+1}}{\boldsymbol{a}_i}\boldsymbol{x}_{i+1} - \ldots - \frac{\boldsymbol{a}_n}{\boldsymbol{a}_i}\boldsymbol{x}_n$$
  - on remplace $\boldsymbol{x}_i$ par cette expression dans les autres contraintes

DUALITÉ: Motivation

Obtenir une borne supérieure sur le profit maximum

- Toute **solution réalisable**, nous donne une **borne inférieure**, LB, sur le profit.
- Une **borne supérieure**, UB, permet de juger de la qualité de cette solution (et éventuellement de prouver son optimalité si $LB = UB$).

Exemple: production de boites de verres (ex 5, leçon 1).

$$\begin{array}{lrcrcrcrl}
\max & 500 & x_1 & + & 450 & x_2 & & & \\
\text{s.a.} & 6 & x_1 & + & 5 & x_2 & \leq & 60 & (1) \\
 & 10 & x_1 & + & 20 & x_2 & \leq & 150 & (2) \\
 & & x_1 & & & & \leq & 8 & (3) \\
 & & x_1 & , & & x_2 & \geq & 0 &
\end{array}$$

$$90\ (1) \Rightarrow 540\, x_1 + 450\, x_2 \leq 5400 = UB$$

$$80\ (1) + 3\ (2) \Rightarrow 510\, x_1 + 460\, x_2 \leq 5250 = UB$$

Pour obtenir la meilleure borne possible (i.e. trouver les meilleurs multiplicateurs y_1, y_2, y_3), on résout

$$\begin{array}{lrcl}
\min & 60\, y_1 + 150\, y_2 + 8\, y_3 & & \\
\text{s.a.} & 6\, y_1 + 10\, y_2 + 1\, y_3 & \geq & 500 \\
 & 5\, y_1 + 20\, y_2 + 0\, y_3 & \geq & 450 \\
 & y_1, y_2, y_3 & \geq & 0
\end{array}$$

SOL: $y_1^* = 78\frac{4}{7}$, $y_2^* = 2\frac{6}{7}$, $y_3^* = 0$ $UB = 5142\frac{6}{7}$.

Les problèmes linéaires vont par paires

$$\text{PRIMAL} \left\{ \begin{array}{rrcll} \max & \sum_j c_j\, x_j & & & \\ \text{s.a.} & \sum_j a_{i,j}\, x_j & \leq & b_i & i = 1, \ldots, m \\ & x_j & \geq & 0 & j = 1, \ldots, n\ . \end{array} \right.$$

$$\text{DUAL} \left\{ \begin{array}{rrcll} \min & \sum_i b_i\, y_i & & & \\ \text{s.a.} & \sum_i a_{i,j}\, y_i & \geq & c_j & j = 1, \ldots, n \\ & y_i & \geq & 0 & i = 1, \ldots, m\ . \end{array} \right.$$

Dualité

Théorème 1 $\boxed{\textbf{Dualité faible}}$
Pour toute solution réalisable x du problème primal et toute solution réalisable y du problème dual,

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i\, y_i$$

Théorème 2 $\boxed{\textbf{Dualité forte}}$
Si P a une solution optimale $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$, alors D a une solution optimale $y^* = (y_1^*, \ldots, y_m^*)$ tel que

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i\, y_i^*$$

Interprétation économique du dual

- Sans ressource, le profit serait nul. D'où l'idée d'essayer d'évaluer la contribution de chaque ressource au profit observé. Dans ce contexte, les

$$y_i \geq 0 \quad \text{pour } i = 1, \ldots m$$

représente les **valeurs** unitaire des ressources i: y_i est la mesure de la contribution d'une unité de i au profit. C'est donc aussi le **prix** au quel on évalue la ressource i (prix auquel on serait près à vendre la ressource au lieu de l'utiliser).

- Un système de prix $(y_1, \ldots, y_n)$ (auxquels on serait prêt à vendre nos ressources) pour être **acceptable** doit nous compenser pour le profit qu'on aurait pu faire en utilisant ces ressources. Donc, if faut que

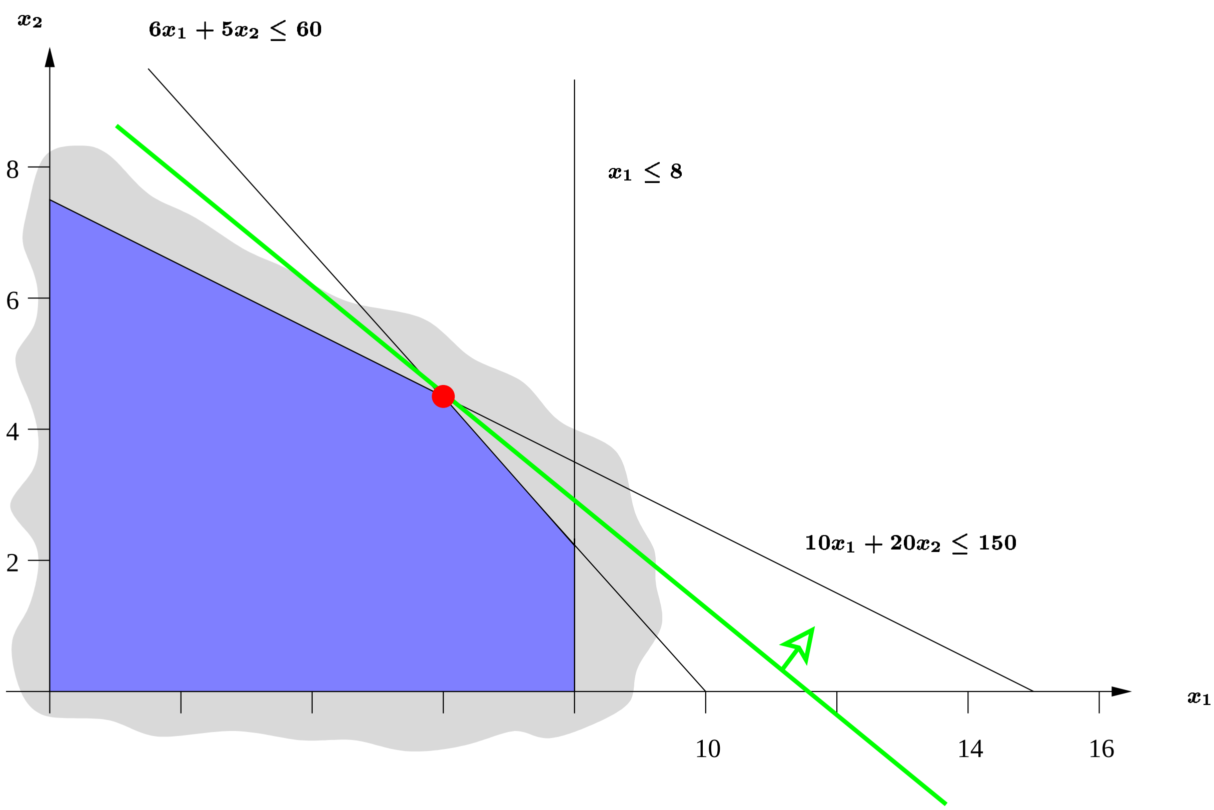
$$\sum_i a_{i,j}\, y_i \geq c_j \quad \text{pour } j = 1, \ldots, n$$

ce qu'on interprète aussi comme le fait que la valeur des ingrédients doit justifier entièrement le profit attribué à chaque produit.

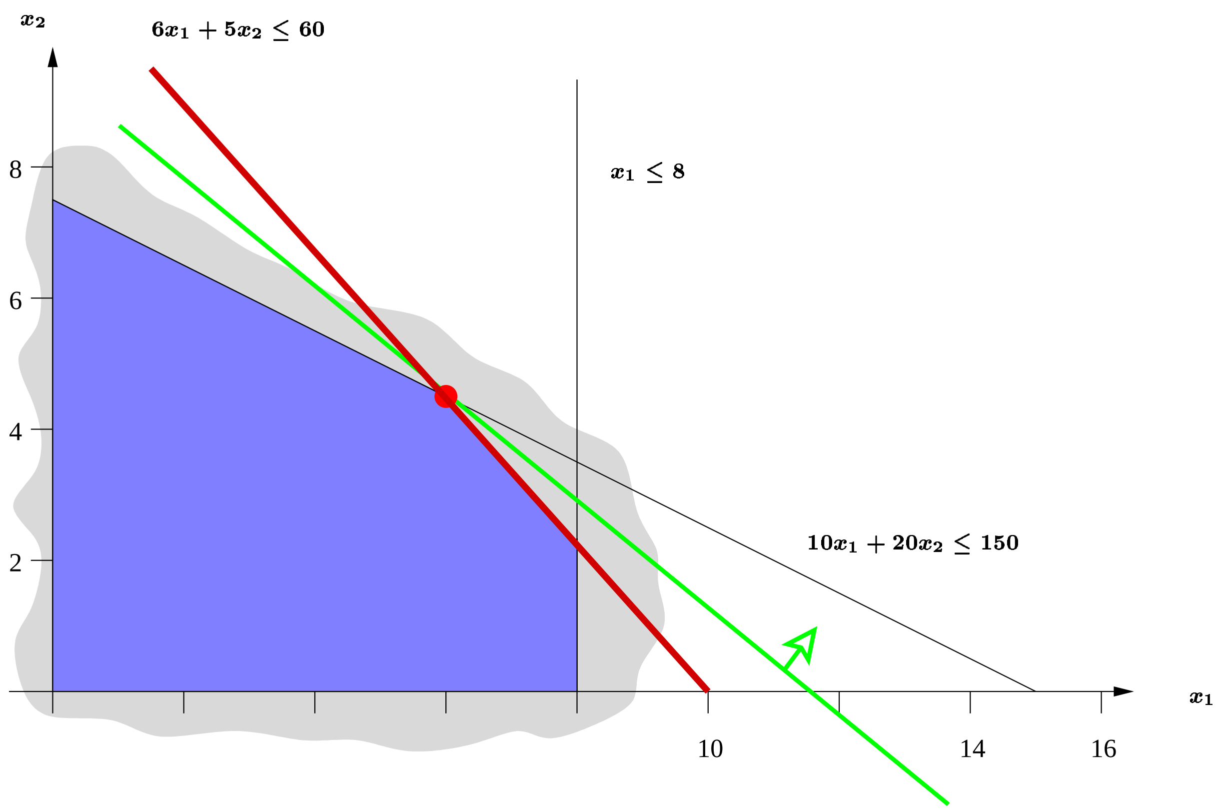
- Enfin, l'acheteur de nos ressources veillera à minimiser le coût total d'achat

$$\min \sum_i b_i\, y_i$$

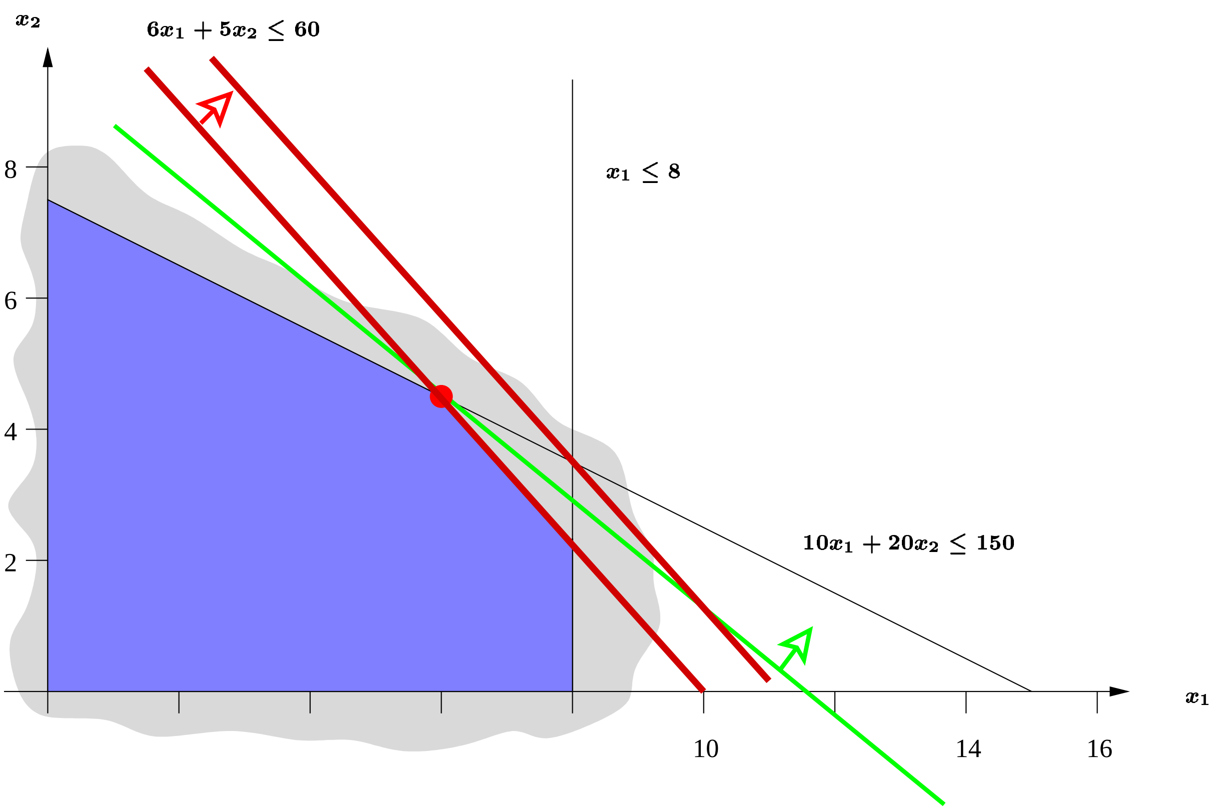
Interprétation économique d'une solution optimale du dual (en cas de non dégénérescence)



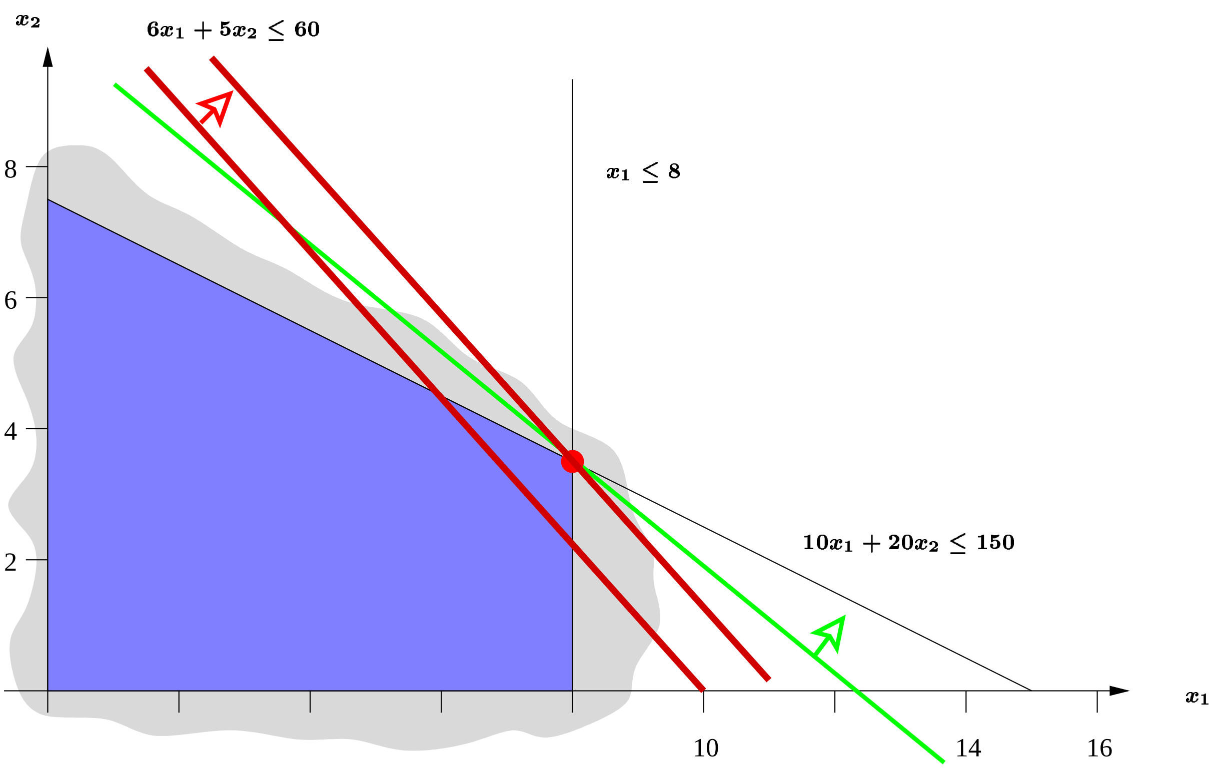
Interprétation économique d'une solution optimale du dual (en cas de non dégénérescence)



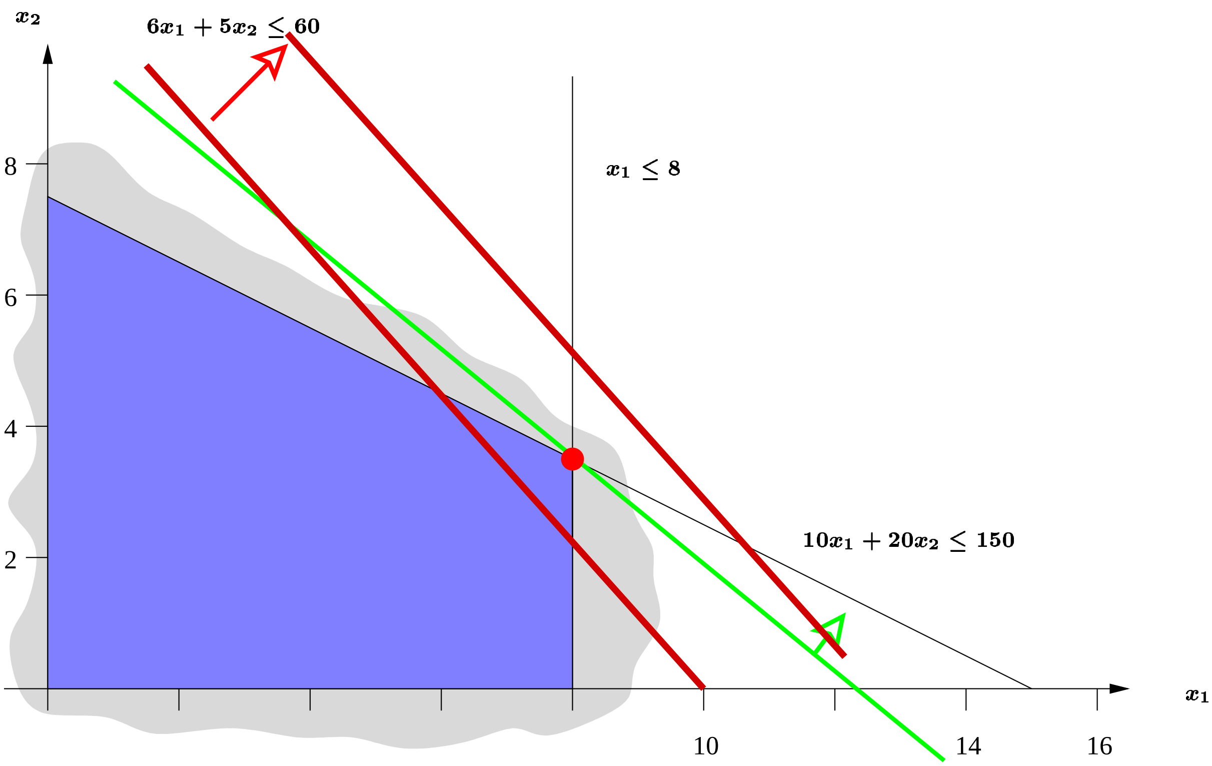
Interprétation économique d'une solution optimale du dual (en cas de non dégénérescence)



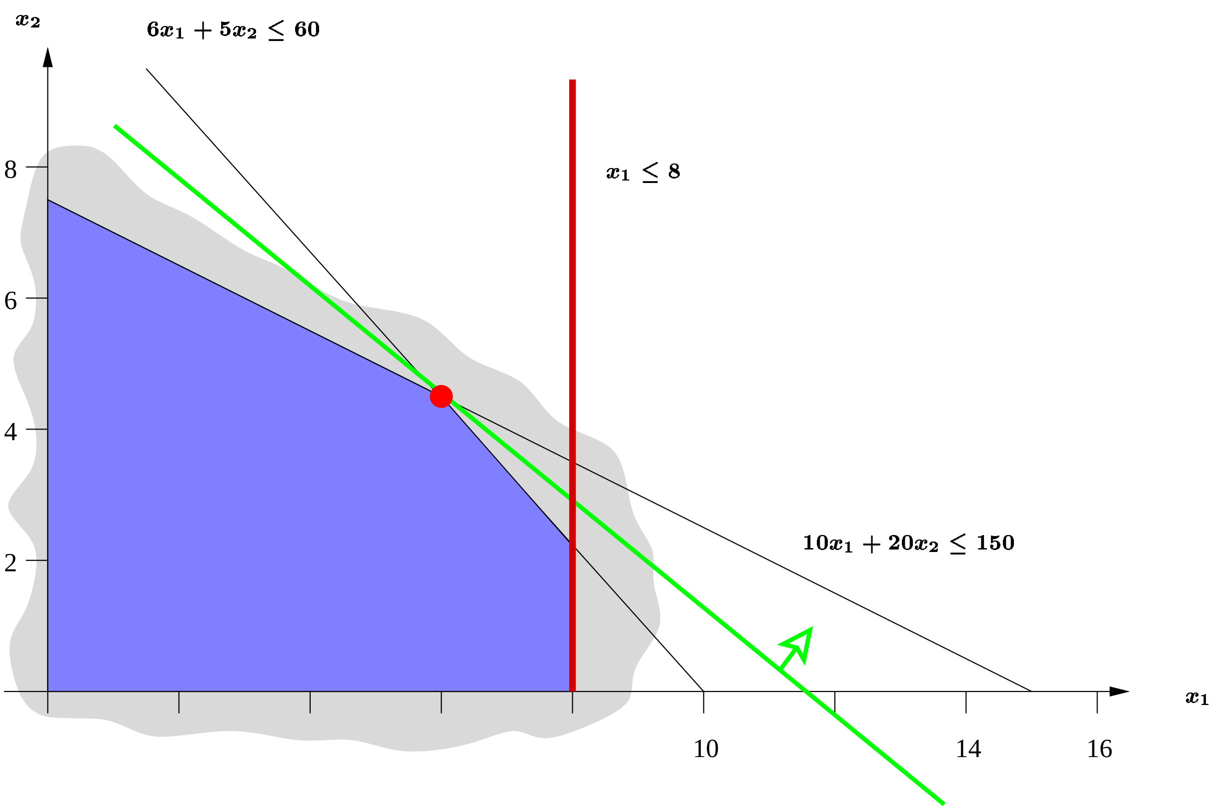
Interprétation économique d'une solution optimale du dual (en cas de non dégénérescence)



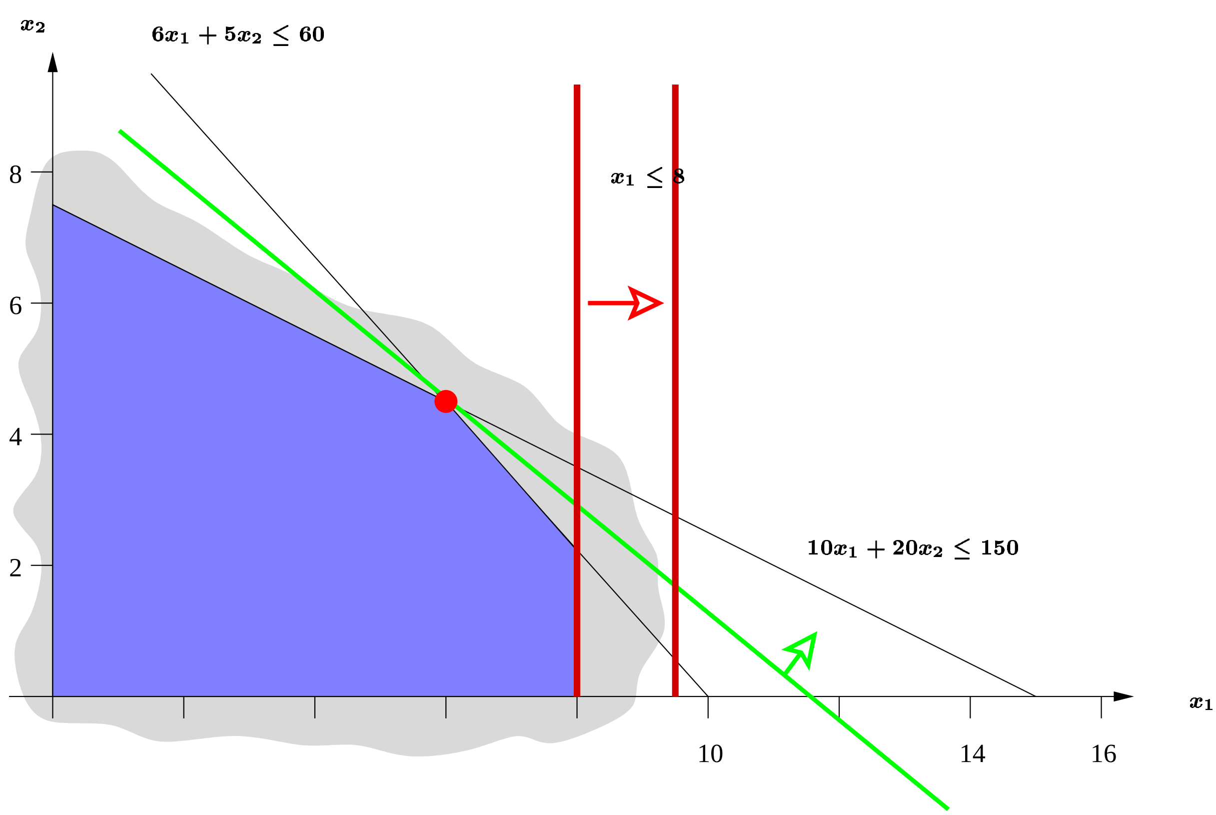
Interprétation économique d'une solution optimale du dual (en cas de non dégénérescence)



Interprétation économique d'une solution optimale du dual (en cas de non dégénérescence)



Interprétation économique d'une solution optimale du dual (en cas de non dégénérescence)



Relations de complémentarité

A l'optimum,

$$z^* = \sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j^* \;=\; \sum_{i=1}^{m} b_i\, y_i^*$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, x_j^* \leq b_i \;\leftrightarrow\; (y_i^*) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{m} a_{i,j}\, y_i^* \geq c_j \;\leftrightarrow\; (x_j^*)$$

- Si une ressource n'est pas limitative du profit, sa valeur (expliquant de combien le profit augmenterait si la capacité était augmentée) doit être nulle:

  $$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, x_j^* < b_i \quad \Rrightarrow \quad y_i^* = 0$$

  Inversément (contra-positive),

  $$y_i^* > 0 \quad \Rrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, x_j^* = b_i$$

- Si la valeur totale des ressources utilisées pour produire j dépasse le profit escompté, on ne produira pas j:

  $$\sum_{i=1}^{m} a_{i,j}\, y_i^* > c_j \quad \Rrightarrow \quad x_j^* = 0$$

  Inversement (contra-positive),

  $$x_j^* > 0 \quad \Rrightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} a_{i,j}\, y_i^* = c_j$$

RELATIONS PRIMAL DUAL

- Le dual du dual est le primal.

$$\text{DUAL}\left\{\begin{array}{rrcll} \max & \sum_{i=1}^{m}(-b_i)\, y_i & & & \\ \text{s.a.} & \sum_{i=1}^{m}(-a_{i,j})\, y_i & \leq & (-c_j) & j=1,\ldots,n \\ & y_i & \geq & 0 & i=1,\ldots,m\ . \end{array}\right.$$

$$\text{DUAL DUAL}\left\{\begin{array}{rrcll} \min & \sum_{j=1}^{n}(-c_j)\, x_j & & & \\ \text{s.a.} & \sum_{j=1}^{n}(-a_{i,j})\, x_j & \geq & (-b_i) & i=1,\ldots,m \\ & x_j & \geq & 0 & j=1,\ldots,n\ . \end{array}\right.$$

-

		DUAL		
		optimum ∃	irréalisable	non-borné
	optimum ∃	*possible*	*impossible*	*impossible*
PRIMAL	irréalisable	*impossible*	*possible*	*possible*
	non-borné	*impossible*	*possible*	*impossible*

Prendre le dual d'un primal

- Mettre le primal sous la forme

$$\text{PRIMAL}\quad\begin{cases}\max & \boldsymbol{c}\,\boldsymbol{x} \\ \text{s.a.} & \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}\end{cases}$$

le dual est

$$\text{DUAL}\quad\begin{cases}\min & \boldsymbol{b}\,\boldsymbol{y} \\ \text{s.a.} & \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\,\boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{0}\end{cases}$$

- Définir une variable duale pour chaque contrainte de P et une contrainte duale pour chaque variable de P:

$$\text{PRIMAL}\quad\begin{cases}\max & \sum_{j=1}^{n} c_j\,x_j & & \\ \text{s.a.} & \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\,x_j \le b_i & i = 1,\ldots,p \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\,x_j = b_i & i = p+1,\ldots,q \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\,x_j \ge b_i & i = q+1,\ldots,m \\ & x_j \ge 0 & j = 1,\ldots,r \\ & x_j \le 0 & j = s+1,\ldots,n\end{cases}$$

$$\text{DUAL}\quad\begin{cases}\min & \sum_{i=1}^{m} b_i\,y_i & \\ \text{s.a.} & \sum_{i=1}^{m} a_{i,j}\,y_i \ge c_j & j = 1,\ldots,r \\ & \sum_{i=1}^{m} a_{i,j}\,y_i = c_j & j = r+1,\ldots,s \\ & \sum_{i=1}^{m} a_{i,j}\,y_i \le c_j & j = s+1,\ldots,n \\ & y_i \ge 0 & i = 1,\ldots,p \\ & y_i \le 0 & i = q+1,\ldots,m\end{cases}$$