

UNIVERSITÉ DE BORDEAUX
Département Sciences et Technologie

Mémoire présenté pour obtenir
le diplôme d'habilitation à diriger des recherches
de l'université de Bordeaux
Spécialité : Mathématiques

par
Pierre Mounoud

Sur quelques problèmes de géométrie lorentzienne

Rapporteurs :

Paolo Piccione, Jean-Marc Schlenker, Abdelghani Zeghib

Soutenu le 27 novembre 2015 devant le jury composé de :

- | | |
|-------------------------|---------------------------------------|
| M. Alain Bachelot, | Professeur université de Bordeaux, |
| M. Christophe Bavard, | Professeur université de Bordeaux, |
| M. Marc Herzlich, | Professeur université de Montpellier, |
| M. Vladimir Matveev, | Professeur université d'Iéna, |
| M. Jean-Marc Schlenker, | Professeur université du Luxembourg, |
| M. Abdelghani Zeghib, | Directeur de recherche ENS Lyon. |

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mes amis et collègues de l'équipe de géométrie. L'ambiance unique qui y règne a permis à mes travaux de voir le jour dans les meilleures conditions qu'il soit. Parmi eux, je remercie tout particulièrement Christophe Bavard avec qui j'ai la chance de travailler depuis quelques années et qui m'a fait le plaisir d'accepter de faire partie de mon jury. Une mention spéciale également aux fidèles du Haut-Carré, je veux parler de Manh N'Guyen, Nicolas Gourmelon, Jean-François Quint, Vincent Koziarz et Laurent Bessières, pour toutes ces discussions mathématiques et extra-mathématiques.

Je n'oublie pas tous les membres de l'IMB avec qui j'ai partagé des enseignements, des réunions, des parties de foot, des chasses aux champignons, des bières ou simplement des cafés. Tous ces moments ont contribué à leur façon à ce que ce mémoire voit le jour. Qu'ils en soient remerciés.

Je dois bien entendu beaucoup à mes coauteurs. Un grand merci donc à Charles Boubel notamment pour son approvisionnement régulier en délicieux biscuits strasbourgeois. Merci à Stefan Suhr pour son accueil que ce soit à Hambourg ou à Paris, à Vladimir Matveev qui m'a fait le plaisir de venir depuis Iéna pour participer à mon jury. Merci enfin à Cedric Tarquini que j'ai hélas perdu de vue depuis 2006.

Je suis heureux de remercier Paolo Piccione, Jean-Marc Schlenker et Abdelghani Zeghib qui m'ont fait le plaisir et l'honneur d'accepter d'être rapporteur de ce travail. Merci à Marc Herzlich et Alain Bachelot d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Elle ne lira pas ces lignes mais je remercie aussi Joanna Newsom pour sa musique et sa voix qui ont véritablement constitué la bande son de ces années bordelaises.

Merci à Clara et Ulysse. Ils ne sont plus les bébés que je remerciais dans ma thèse mais de merveilleuses personnes. Merci à la non moins merveilleuse Elísabet.

Table des matières

1	Introduction	2
2	Espace des métriques lorentziennes	4
2.1	Propriétés topologiques et métriques	4
2.2	Propriétés dynamiques	5
3	Feuilletages totalement géodésiques	7
3.1	Feuilletages de codimension 1	8
3.2	Feuilletages de dimension 1	11
3.2.1	Complétude des feuilletages de type lumière	11
3.2.2	Feuilletages totalement géodésiques dont toutes les feuilles sont fermées	12
4	Variétés géodésiquement équivalentes	14
4.1	Variétés ayant un grand degré de mobilité et équation d’Obata	15
4.2	Variétés affinement équivalentes	17
5	Surfaces ayant un champ de Killing	19
5.1	Observation clef	19
5.2	Classification des tores possédant un champ de Killing	21
5.3	Extension des tores non élémentaires.	23
5.4	Points conjugués	27
5.5	Surfaces spatialement Zoll	30

Chapitre 1

Introduction

L'essentiel de mon travail de recherche (en fait tout sauf [11] qui étudie la topologie de l'espace des configurations de certains systèmes articulés) concerne la géométrie pseudo-riemannienne c'est-à-dire l'étude de variétés différentielles (on les supposera toujours connexes et dénombrables à l'infini et souvent compactes et sans bords) munies d'un champ lisse de formes quadratiques non-dégénérées sur les espaces tangents. Un tel champ sera souvent noté g . La connexité de la variété et le fait que les formes ne puissent dégénérer empêche la signature des formes g_x de bouger. Le cas le plus étudié est bien-sûr le cas où g est définie positive. Ce cas est très particulier notamment parce qu'à g est associée une distance, d'ailleurs g est qualifié de *métrique* riemannienne. Pour les autres signatures, une telle distance n'existe plus, toutefois l'usage fait que l'on parle encore de « métrique » pseudo-riemannienne. De plus alors que toute variété peut être équipée d'une métrique riemannienne (il suffit de la plonger dans un espace euclidien), il n'en va pas de même des métriques pseudo-riemanniennes. Si une variété est munie d'une métrique de signature (p, q) alors elle possède un champ de plans tangents de dimension p , ce qui constitue une obstruction topologique.

Je me suis surtout intéressé aux métriques de signature $(n - 1, 1)$, on parle alors de géométrie *lorentzienne*, on peut la voir comme le premier pas hors du cadre métrique, le cadre où le défaut de compacité du groupe orthogonal reste raisonnable. Bien entendu, la géométrie lorentzienne est aussi le cadre de la relativité générale. Le vocabulaire en porte la marque. Ainsi, un vecteur tangent $v \neq 0$ sera dit de type espace si $g(v, v) > 0$, de type temps si $g(v, v) < 0$ et de type lumière si $g(v, v) = 0$. Mes travaux n'ont que rarement un rapport direct avec la relativité essentiellement en raison de la compacité des variétés étudiées. Mais certaines problématiques abordées comme la possibilité d'étendre les variétés ou l'existence de métriques partageant les mêmes géodésiques, intéressent les relativistes.

À une variété pseudo-riemannienne (M, g) sont associés un certain nombre d'objets intéressants. Le premier, en tout cas celui qui mobilisera notre attention, est sans doute son flot géodésique. Une géodésique est la trajectoire que suit un point lancé avec une vitesse initiale et qui va ensuite droit devant lui. Autrement dit ce sont les solutions d'une certaine équation différentielle autonome d'ordre 2 c'est-à-dire les projections sur M des courbes intégrales d'un champ de vecteurs vivant sur le tangent à M . Le flot géodésique est le flot (local) associé à ce champ de vecteurs. En tant que solution maximale d'une équation différentielle une géodésique a un certain domaine de définition, s'il est égal à \mathbf{R} on dira que la géodésique est complète. Contrairement au cas riemannien, la complétude géodésique est plutôt l'exception, en tout cas

la compacité de la variété ne suffit pas à l'assurer. En effet, même si la variété est compacte le générateur infinitésimal du flot géodésique est un champ de vecteurs sur le fibré tangent qui n'est pas compact et les niveaux de l'intégrale première donnée par l'énergie ne sont pas non plus compacts (ce sont des fibrés en cônes ou en hyperboloïdes). Remarquons, même si ce n'est pas le point de vue que nous adopterons, que l'on peut voir les géodésiques comme les points critiques d'une fonctionnelle hamiltonnienne. C'est à partir des géodésiques (plutôt de la connexion de Levi-Civita mais il s'agit essentiellement de la même chose) que sont définies les différentes notions de courbure dont je ne dirai rien de plus ici.

Les travaux présentés ici ont été regroupés selon quatre thèmes : l'espace des métriques lorentziennes (ce qui correspond à mon travail de thèse), les feuilletages totalement géodésiques, les variétés géodésiquement équivalentes et enfin les surfaces admettant un champ de Killing. On verra que l'étude du comportement du flot géodésique et l'envie de comprendre certaines de ses pathologies (existence de feuilletages invariants, périodicité, absence de points conjugués entre autres) est ce qui fait le lien entre les différents chapitres.

Chapitre 2

Espace des métriques lorentziennes

Les travaux que je vais présenter ici ont été réalisés pendant ma thèse, effectuée sous la direction de J. Lafontaine et soutenue en 2001. Ils ont donné lieu aux publications [6] et [7]. Leur principal objet d'étude est l'espace des métriques lorentziennes d'une variété compacte. Ces espaces sont équipés des topologies C^k (en fait C^∞ dans la partie dynamique), voir [39] pour plus de détails sur celles-ci.

2.1 Propriétés topologiques et métriques

Il est bien connu que l'espace des métriques riemanniennes d'une variété donnée est un espace convexe et donc connexe et contractile. Il n'y a donc pas grand chose à dire sur sa topologie. L'espace des métriques lorentziennes n'a aucune raison d'être ni connexe, ni simplement connexe (encore moins contractile). Il est facile de voir (par exemple avec un argument de diagonalisation simultanée avec une métrique riemannienne) que toute variété lorentzienne possède des champs de droites de type temps. Il existe donc deux surfaces compactes admettant des métriques lorentziennes : le tore et la bouteille de Klein. Ce champ de droites variant continument avec la métrique on obtient :

Proposition 2.1.1 (voir [6]). *Les composantes connexes de $\mathcal{L}(M)$ sont en bijection avec les classes d'homotopies de champs de droites de M .*

Si M est compacte et de dimension 2 ou 3 alors $\mathcal{L}(M)$ a une infinité de composantes connexes. Par contre $\mathcal{L}(S^7)$ a seulement 2 composantes connexes.

Le champ de droites de type temps obtenu définit un feuilletage sur M . Lorsque M est un tore ou une bouteille de Klein, on sait lire la classe d'homotopie sur ce feuilletage. Lorsque $M = \mathbf{T}^2$, un feuilletage est homotope à un feuilletage linéaire ou il possède des feuilles compactes (toutes homotopes). Cette classe d'homotopie (libre), notons la $[F]$, est un premier invariant. Pour donner le second invariant, on se donne une courbe fermée simple γ telle que $([\gamma], [F])$ forme une base de $H_1(\mathbf{T}^2, \mathbf{Z})$. La restriction du champ de droite à γ définit une application de S^1 dans S^1 . Le degré de cette application donne le second invariant. Ce degré n'est rien d'autre que le nombre de composantes de Reeb (comptées avec un signe) du feuilletage. Reinhart a montré [54] que ces deux invariants caractérisent la classe d'homotopie du champ de droite.

Une bouteille de Klein a deux familles de courbes particulières : ses méridiens et ses âmes. Les méridiens sont les fibres de la fibration sur le cercle et les âmes sont les sections de celle-ci. La

restriction du fibré projectif tangent à un méridien est isomorphe à un tore. Sa restriction à une âme est par contre isomorphe à une bouteille de Klein. Si on restreint le champ de droite à un méridien, on obtient une section de la fibration du tore sur le cercle qui a un certain degré $n \in \mathbf{Z}$ (le relevé tautologique du méridien définit la section de degré 0). Il n'y a par contre que deux classes d'homotopie de sections de la bouteille de Klein, ce qui donne un élément $m \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Ce couple (n, m) caractérise la classe d'homotopie du champ de droite, voir [1].

Si M est orientable et de dimension 3 alors elle est parallélisable. Modulo le choix d'une trivialisaton, un champ de droites peut donc être vu comme une application de M à valeurs dans le plan projectif \mathbf{P}^2 . On montre [6] qu'il existe une infinité de classes d'homotopie de champs de droites obtenus en composant une application de M dans la sphère S^3 avec l'application de Hopf de S^3 dans S^2 puis avec la projection de S^2 sur \mathbf{P}^2 .

On montre aussi dans [6] qu'il existe des variétés M telles que $\mathcal{L}(M)$ a des composantes connexes non simplement connexes. C'est le cas par exemple de S^3 , des espaces lenticulaires ou encore de \mathbf{T}^2 .

La fin de l'article [6] est consacrée à l'étude de la distance entre les composantes connexes de $\mathcal{L}(M)$. Pour cela, on définit une distance (induisant la topologie C^0) sur l'espace des métriques à l'aide d'une métrique riemannienne auxiliaire α . Pour toute métrique $g \in \mathcal{L}(M)$ on désigne par \tilde{g} l'endomorphisme tel que $\alpha(\tilde{g}, \cdot) = g(\cdot, \cdot)$, on pose ensuite $d(g, g') = \sup_{x \in M} (\text{tr}(\tilde{g}_x - \tilde{g}'_x)^2)^{1/2}$. Par la suite, cette distance a été réutilisé par différents auteurs, voir par exemple [22] ou [21]. Comme l'espace des métriques est un cône toutes composantes sont bien-sûr à distance nulle. On s'intéresse donc aux composantes connexes des métriques à forme volume fixée. On montre que les distances entre ces composantes sont encore nulles si et seulement si M n'est pas une surface.

2.2 Propriétés dynamiques

L'opération consistant à prendre l'image réciproque d'une métrique par un difféomorphisme (le « pull-back », qui n'est qu'une sorte de changement de variables) définit une action du groupe des difféomorphismes de M sur $\mathcal{L}(M)$. Contrairement au cas riemannien (voir [32]) cette action n'est pas propre en général. L'espace quotient $\mathcal{L}(M)/\text{Diff}(M)$ (qui est plus intéressant que $\mathcal{L}(M)$) n'est pas toujours un espace séparé. Si on considère P l'espace des tores lorentziens *plats* de dimension 2, on peut voir que l'action du groupe des difféomorphismes sur P est ergodique (on se ramène à l'action de $\text{GL}(2, \mathbf{Z}) \simeq \text{Diff}(T^2)/\text{Diff}_0(T^2)$ sur $\text{SL}(2, \mathbf{R})/\text{SO}(1, 1) \simeq P/\text{Diff}_0(T^2)$). On sait aussi que les stabilisateurs (c'est-à-dire les groupes d'isométrie) ne sont pas toujours compacts. On peut considérer par exemple un quotient de $\text{PSL}(2, \mathbf{R})$ muni de la forme de Killing (qui est une forme bilinéaire biinvariante de signature $(2, 1)$) par l'action à droite d'un réseau cocompact Γ . On voit alors que $\text{PSL}(2, \mathbf{R})$ agit isométriquement (et fidèlement) sur la variété lorentzienne $\text{PSL}(2, \mathbf{R})/\Gamma$. Bien entendu cette construction ne marche pas pour beaucoup de groupes de Lie. La classification des différents groupes connexes pouvant agir isométriquement sur une variété compacte lorentzienne a été obtenue simultanément par Adams et Stuck [18] et par Zeghib [64]. On sait dans certains cas (notamment lorsque l'action est transitive) décrire les métriques.

Dans [7], j'ai étudié la propriété de cette action. En adaptant l'approche de Zeghib de [66], j'ai étudié la dynamique des suites de difféomorphismes (ϕ_n) *non équicontinues* (ie n'admettant aucune sous-suite convergente) envoyant une suite *convergente* de métriques $(g_n)_n$ sur une

suite convergente (la suite $(\phi_n^* g_n)_n$). L'idée consiste à étudier les vecteurs « approximativement stables » de la suite $(\phi_n)_n$, c'est-à-dire des vecteurs $v \in TM$ qui sont limites d'une suite de vecteurs $(v_n)_n$ telle que la suite $(d\phi_n(v_n))_n$ est bornée. On montre que l'ensemble des vecteurs approximativement stables forment une distribution lipschitzienne de codimension 1 qui est intégrable, totalement géodésique et de type lumière. Ce qui a pour conséquence :

Théorème 2.2.1 (M— [7]). 1) *L'action du groupe des difféomorphismes sur l'espaces des métriques lorentziennes non plates du tore T^2 est propre.*

2) *L'action du groupe des difféomorphismes sur l'espaces des métriques lorentziennes de la bouteille de Klein (respectivement de la sphère S^3 , resp. de la sphère S^5) est propre.*

Dans le cas 2) la propriété découle du fait qu'il n'existe aucune métrique sur les variétés considérées possédant un feuilletage de codimension 1 totalement géodésique et de type lumière. Le fait que S^3 ne possède pas de tel feuilletage a été montré par Zeghib dans [65]. Le résultat analogue sur S^5 est une conséquence immédiate du célèbre résultat de J.F. Adams [17] concernant le nombre maximal de champs de vecteurs linéairement indépendants sur les sphères (sur une variété simplement connexe possédant un feuilletage de codimension 1 de type lumière ce nombre est au moins 2). Par contre toute métrique sur le tore en possède un. Le point 1) est obtenu en montrant dans un premier temps que la courbure de la métrique g_∞ est constante le long d'un feuilletage de type lumière et dans un deuxième temps à montrer que cela implique que g_∞ est plate. L'élément essentiel de la preuve de ce dernier point (outre la classification des feuilletages du tore) est une variante du théorème de Gauss-Bonnet lorentzien concernant les cylindres dont le bord est formé de courbes de type lumière.

Le corollaire le plus classique de la propriété de l'action du groupe des difféomorphismes sur l'espace des métriques riemanniennes est le fait que l'ensemble des métriques sans isométries est un ouvert dense (c'est une conséquence du théorème de tranche de Ebin [32] mais il existe des preuves plus élémentaires [42]). Dans le cas lorentzien ceci n'a plus de raison de subsister même si comme le dit Gromov « everybody knows that $\text{Is}(V; g) = \text{Id}$ for generic pseudo-Riemannian metrics g on V , for $\dim(V) \geq 2$ ». En regardant des suites de métriques dont le revêtement universel est $\text{PSL}(2, \mathbf{R})$ muni d'une métrique invariante à gauche, j'ai montré qu'effectivement cet ensemble n'est pas toujours ouvert. Récemment, j'ai donné une courte preuve [13] de ce fait connu de tous mais dont aucune preuve n'était disponible. L'élément principal de cette preuve consiste à fournir un ouvert dense de l'espace des métriques sur lequel l'action du groupe des difféomorphismes est propre. Ces résultats mis ensembles donnent :

Théorème 2.2.2 (M— [7] et [13]). *Soit M une variété compacte telle que $\mathcal{L}(M) \neq \emptyset$. L'espace des métriques sans isométries contient un ouvert dense de $\mathcal{L}(M)$ mais n'est pas toujours ouvert.*

Les structures géométriques pour lesquelles un tel résultat subsiste sont certainement très nombreuses. On est par exemple raisonnable de penser qu'il est encore vrai pour n'importe quelle géométrie de Cartan.

Chapitre 3

Feuilletages totalement géodésiques

Un feuilletage \mathcal{F} de dimension d sur une variété M de dimension n est grosso-modo une partition de M en sous-variétés (appelées feuilles) de dimension d . Plus précisément, \mathcal{F} est la donnée d'une décomposition locale de M en un produit $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{n-d}$ telle que les sous-ensembles $\mathbf{R}^d \times \{y\}$ se recollent bien entre eux par changement de cartes. On a ainsi ce qu'on appelle un atlas feuilleté, les parties transverses des changements de cartes, celles qui disent quelle feuille du premier ouvert se recollent sur quelle feuille du deuxième, engendrent un pseudo-groupe de difféomorphismes, c'est ce qu'on appelle le *pseudo-groupe d'holonomie* du feuilletage. Les propriétés préservées par ce pseudo-groupe seront qualifiées de *transverse*. L'exemple de feuilletage le plus célèbre est sans doute le feuilletage de Reeb de la sphère S^3 , il est donné par la réunion de 2 feuilletages de Reeb d'un tore plein, voir figure 3.1.



FIGURE 3.1 – feuilletage de Reeb d'un tore plein (source Wikipedia)

Si M est munie d'une métrique pseudo-riemannienne, on dira qu'un feuilletage \mathcal{F} est totalement géodésique si toute géodésique tangente à une feuille en un point est contenue dans cette feuille. Les feuilletages totalement géodésiques sont des objets très particuliers. Ils apparaissent notamment lors de l'étude de la dynamique des isométries lorentziennes (voir les travaux de Zeghib [66], [67] et aussi [7]), c'est comme cela que je suis venu à m'y intéresser. Les feuilletages totalement géodésiques riemanniens ont été étudiés abondamment dans les années 80, on peut

citer entre autres les contributions de Cairns, Carrière, Ghys, Hebda ou Molino.

3.1 Feuilletages de codimension 1

On aimerait caractériser les feuilletages de codimension 1 des variétés compactes (principalement de dimension 3) pour lesquels il existe une métrique les rendant totalement géodésiques ou plus modestement les variétés admettant de tels feuilletages. La situation riemannienne est bien comprise. Carrière et Ghys [29] ont montré que tout feuilletage totalement géodésique de codimension 1 d'une variété riemannienne compacte de dimension 3 est soit transverse à un fibré de Seifert soit conjugué au feuilletage faiblement stable d'un flot d'Anosov obtenu par suspension d'un difféomorphisme d'Anosov du tore. Ce résultat a ensuite été étendu en toutes dimensions par Ghys [35]. Ces travaux sont basés sur le fait que l'orthogonal d'un feuilletage totalement géodésique de codimension 1 engendre un feuilletage transversalement riemannien (c.-à-d. dont le pseudo-groupe d'holonomie préserve une métrique riemannienne). La dynamique de ces derniers feuilletages est très particulière [45], c'est dû au fait qu'en un sens les feuilles restent toujours à égale distance. C'est le phénomène que l'on observe par exemple sur un feuilletage linéaire d'un tore. Carrière a d'ailleurs montré [28] que l'adhérence d'une feuille d'un feuilletage riemannien de dimension 1 est un tore et que le feuilletage restreint à ce tore est conjugué à un feuilletage linéaire.

Contrairement au cas riemannien, les feuilletages totalement géodésiques lorentziens se répartissent en plusieurs familles. Si F est une feuille de \mathcal{F} totalement géodésique alors la signature de la restriction de g à F est constante. On a donc des feuilles de type espace (si $g|_F$ est définie positive), de type temps ($g|_F$ de signature $(1, 1)$) ou de type lumière (signature $(1, 0)$). Si toutes les feuilles sont de type espace alors le feuilletage orthogonal est transversalement riemannien et on retrouve le cas riemannien. Si toutes les feuilles sont de type temps cette fois l'orthogonal est transversalement lorentzien et très peu de choses sont connues sur de tels feuilletages. Enfin, dans les autres cas, c'est-à-dire dès qu'il existe des feuilles de type lumière, il n'existe pas de structure transverse aussi remarquable sur le feuilletage orthogonal. En particulier, ils ne sont plus nécessairement tendus (ou taut, c'est-à-dire transverse à un flot préservant le volume), on verra qu'ils peuvent contenir des composantes de Reeb.

Les feuilletages totalement géodésiques de type lumière ont été principalement étudiés par Zeghib [65]. Il montre notamment que le revêtement universel d'une variété compacte de dimension 3 admettant un feuilletage totalement géodésique de codimension 1 dont toutes les feuilles sont de type lumière est difféomorphe à \mathbf{R}^3 .

Dans [4], en collaboration avec C. Boubel et C. Tarquini nous avons étudié les feuilletages totalement géodésiques de type temps. Les objets centraux de cet article sont en fait les flots transversalement lorentziens. Remarquons qu'un feuilletage de codimension 2 est transversalement lorentzien si et seulement il est l'intersection de deux feuilletages transverses de codimension 1 et il préserve une forme volume transverse. Leur dynamique est beaucoup plus compliquée que celle des feuilletages transversalement riemanniens, essentiellement parce qu'il n'existe plus de distance préservée entre feuilles. Comme leurs analogues riemanniens, ils se relèvent au fibré des repères transverses en un feuilletage à la dynamique triviale (car transversalement parallélisable) mais comme ce fibré n'est pas compact cela ne trivialise pas la dynamique du feuilletage lui-même. Nous n'avons pu classer ces flots que sous une hypothèse de complétude et nous avons aussi construit des exemples non complets. Cette hypothèse de complétude rigidifie les choses.

Lorsqu'elle est satisfaite, le feuilletage est soit partout soit nulle part équicontinu. On en déduit qu'il est soit transversalement riemannien (et alors il est dans la liste établie par Y. Carrière [28]), soit il s'agit d'un flot d'Anosov algébrique (flot géodésique d'une variété hyperbolique ou suspension d'un Anosov du tore).

On donne maintenant une idée de la construction et de la dynamique de l'exemple non complet que l'on a construit. On équipe \mathbf{R}^2 de la métrique singulière $g_U = \frac{2d\varphi d\psi}{\cos^2 \varphi \sin^2 \psi + \sin^2 \varphi \cos^2 \psi}$ et on note T_U le quotient de (\mathbf{R}^2, g_U) par $(\pi\mathbf{Z})^2$. Il s'agit d'un tore lorentzien avec 2 points singuliers. On remarquera que ce tore singulier possède un champ de Killing $K = \sin(2\varphi)\partial_\varphi + \sin(2\psi)\partial_\psi$. Soit Σ une surface orientable compacte de genre 2. On commence par projeter Σ sur T_U comme indiqué sur la figure 3.2. On pousse ensuite le point obtenu par le flot de K . On obtient ainsi une

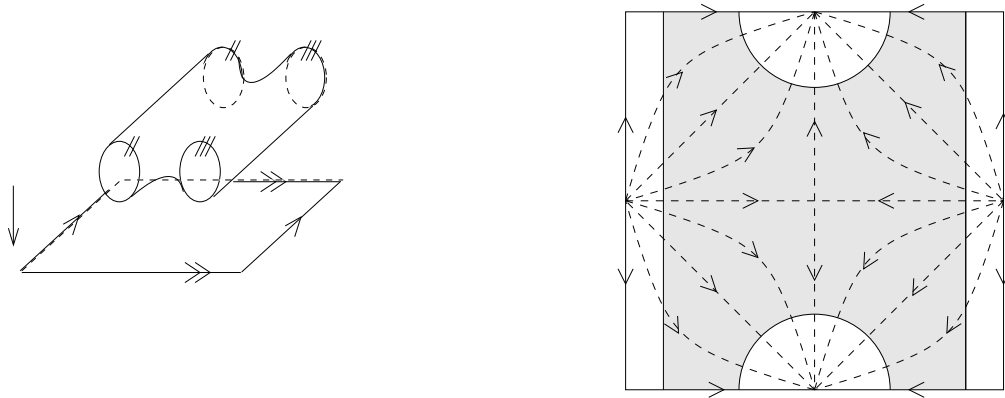


FIGURE 3.2 – La submersion

submersion (le bord de l'image de Σ est transverse au flot de K) de $\Sigma \times \mathbf{R}$ dans T_U d'image T_U privé de ses points singuliers. Les fibres de cette submersion définissent un feuilletage lorentzien sur $\Sigma \times \mathbf{R}/\mathbf{Z}$. On peut en faire la description suivante : on part de deux copies du feuilletage ci-dessous :

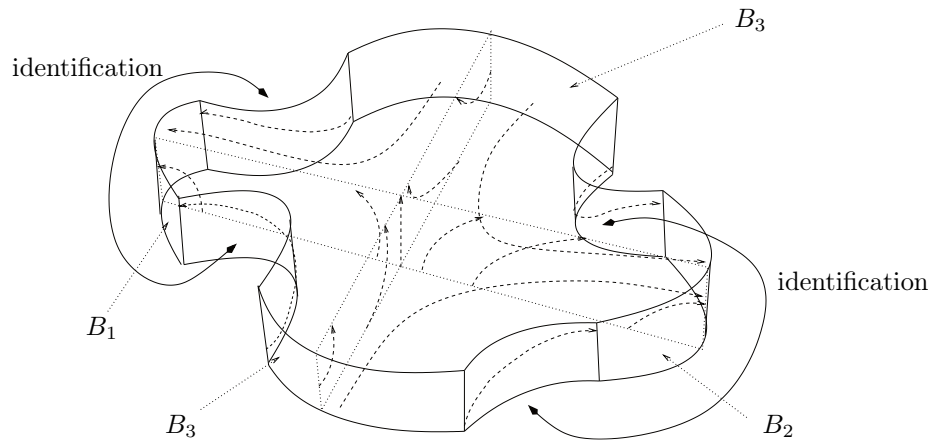


FIGURE 3.3 – Demi-feuilletage lorentzien non complet

Sur la figure 3.3, le haut et le bas sont identifiés ainsi que les deux paires de portions de bord indiquées. Ainsi chacune des composantes de bord B_1 , B_2 et B_3 est difféomorphe à un tore et

transverse au feuilletage. Le feuilletage final est obtenu en recollant ensemble les bords de même indice de chaque copie. Toutes les feuilles sont des cercles, sauf celles tracées sur les deux tores se croisant au milieu de la figure.

Côté feuilletages totalement géodésiques cette étude nous permet de montrer :

Théorème 3.1.1 (Boubel, M—, Tarquini [4]). *Les feuilletages totalement géodésiques de type temps géodésiquement complets sont les feuilletages transverses à un flot linéaire du tore ou à un flot d’Anosov obtenu par suspension.*

Il existe un feuilletage totalement géodésique de codimension 1 de type temps (non complet) transverse au feuilletage décrit ci-dessus.

Si un feuilletage totalement géodésique de type temps est géodésiquement complet alors son orthogonal satisfait notre hypothèse de complétude. Celle-ci est cependant plus faible. On peut remarquer que les feuilletages de codimension 1 transverse au flot géodésique d’une surface hyperbolique n’apparaissent pas dans la liste ci-dessus. En effet, nous montrons que ces feuilletages ne peuvent pas être géodésiquement complets même si le flot géodésique vérifie l’hypothèse de complétude. Cette impossibilité est montré via un résultat de Ponge et Reckziegel [52] qui, généralisant un théorème riemannien de Blumenthal et Hebda [24], affirme que si le feuilletage \mathcal{F} est géodésiquement complet alors le couple de $(\mathcal{F}, \mathcal{F}^\perp)$ se remonte au revêtement universel en un feuilletage produit. Sans hypothèse de complétude, on ne connaît pas d’obstruction topologique spécifique à l’existence d’un feuilletage totalement géodésique de type temps et de codimension 1. Mais, en dimension 3, comme ces feuilletages sont tendus, on sait qu’il ne contiennent pas de composantes de Reeb et le revêtement universel de la variété est donc difféomorphe à \mathbf{R}^3 (d’après le théorème Palmeira [48]).

Comme on l’a dit plus haut, dès qu’on autorise la présence de feuilles de lumière dans un feuilletage de codimension 1, on n’a plus de caractérisation transverse du caractère totalement géodésique. Le premier exemple intéressant de feuilletage totalement géodésique *mixte* est dû à K. Yokumoto [62], il est sur la sphère S^3 et (forcément d’après le théorème de Novikov) contient de composantes de Reeb. Ce feuilletage est orthogonal (mais non transverse) au champ de Hopf de la sphère S^3 et invariant par celui-ci. Dans [9], j’ai étendu cette construction, tout d’abord aux fibrés en cercles :

Théorème 3.1.2 (M— [9]). *Tout fibré en cercle orientable de dimension $n \geq 2$ (et tout fibré de Seifert de dimension 3) possède un feuilletage totalement géodésique mixte (c.-à-d. ayant des feuilles de différents types) de codimension 1.*

Idée de preuve. Ces exemples sont construit plus ou moins de la même façon. On suppose ici qu’on a un fibré de Seifert compact de dimension 3, $p : M \rightarrow N$. On commence par retirer un nombre fini de tores pleins fibrés i.e. de la forme $p^{-1}(B_i)$ de telle sorte que $M \setminus \cup_i p^{-1}(B_i)$ soit trivialisable (on retire notamment les fibres exceptionnelles). On sait donc trouver sur cet ouvert un feuilletage transverse aux fibres. Ce feuilletage induit sur chaque bord de la variété un feuilletage trivial. On sait le perturber de sorte qu’il reste invariant sous l’action de S^1 , qu’il soit tangent au bord et que les feuilles de bord aient une holonomie infinitésimalement triviale à tout ordre. Chaque tore plein peut être muni d’un feuilletage de Reeb lui aussi invariant sous l’action de S^1 et dont la feuille de bord à une holonomie infinitésimalement triviale. Ces deux feuilletages se recollent en un feuilletage lisse \mathcal{F} de M .

Il nous reste à trouver une métrique lorentzienne. On note X un générateur infinitésimal de l'action de S^1 . On se donne une métrique riemannienne g invariante sous l'action de S^1 . Au voisinage de $p^{-1}(B_i)$, il existe un champ de vecteurs Z_i transverse à \mathcal{F} et invariant par l'action de S^1 (i.e. vérifiant $[X, Z_i] = 0$). Soit Y_i un champ de vecteurs $Y_i \in \text{Vect}(X, Z_i) \cap T\mathcal{F}$, de norme 1. Il existe des fonctions a_i et b_i telles que $Y_i = a_i X + b_i Z_i$. Comme $[X, Y_i] = 0$, on voit que $X.b_i = 0$. Soit h_i la métrique lorentzienne h_i telle que $h_i(v, \cdot) = g(v, \cdot)$ pour tout $v \in \text{Vect}(X, Z_i)^\perp$ et que $h_i(X, X) = -h_i(Z, Z) = -b_i$, $h_i(X, Z) = a_i$. Cette métrique est invariante sous l'action de S^1 et \mathcal{F} est h_i -orthogonal à X (il est facile de voir que la feuille $p^{-1}(\partial B_i)$ est de type lumière pour h_i). Par conséquent, cette métrique rend \mathcal{F} totalement géodésique. Il reste juste à étendre ces métriques en une métrique sur M .

Quitte à retourner les composantes de Reeb, on peut supposer que les fonctions b_i ne changent pas de signe et quitte à remplacer Y_i par $-Y_i$ qu'elles sont positives. Par conséquent les métriques h_i sont toujours positives le long de $T\mathcal{F}$. Loin des feuilles de bord, on considère la métrique lorentzienne h_0 définie par $h_0(v, \cdot) = g(v, \cdot)$ pour tout $v \in T\mathcal{F}$ et $h_0(X, X) = -g(X, X)$. Elle est aussi S^1 -invariante. L'espace des métriques riemanniennes le long de \mathcal{F} étant convexe, il est facile de recoller les métriques h_i et h_0 de façon S^1 -invariante et de telle sorte que X est partout orthogonal à \mathcal{F} . Cette métrique rend \mathcal{F} totalement géodésique. \square

Dans la suite de l'article, je détermine quelles sont les positions relatives d'un feuilletage \mathcal{F} de codimension 1 et d'un flot transversalement riemannien \mathcal{X} (toute action localement libre de S^1 engendre un flot transversalement riemannien) pour qu'on puisse rendre \mathcal{F} totalement géodésique et orthogonal à \mathcal{F} . Chaque feuille de \mathcal{F} doit être soit transverse, soit tangente à \mathcal{X} , mais cela ne suffit hélas pas. Lorsque les feuilles deviennent dégénérées il y a une sorte de condition infinitésimale d'invariance qui apparaît. De plus les positions relatives des deux feuilletages forcent parfois les feuilles à changer de type, il faut donc aussi s'assurer que le long de tout lacet le type soit modifié un nombre pair de fois. C'est le phénomène qui nous a contraint à retourner les composantes de Reeb dans la preuve précédente.

3.2 Feuilletages de dimension 1

3.2.1 Complétude des feuilletages de type lumière

Je me suis intéressé dans [8] aux feuilletages totalement géodésiques de dimension 1 de type lumière sur les variétés compactes de dimension 3. Il s'agit d'objets assez courants, en effet si \mathcal{F} est un feuilletage de codimension 1 et si \mathcal{X} est un feuilletage de dimension 1 partout tangent à \mathcal{F} alors toute métrique rendant \mathcal{X} et \mathcal{F} orthogonaux (il en existe beaucoup) rend \mathcal{X} totalement géodésique et de type lumière. De plus en dimension 3, on a là tous les exemples possibles. J'ai montré que sur une variété compacte la complétude de ces géodésiques est entièrement déterminée par les feuilletages \mathcal{F} et \mathcal{X} et leurs positions relatives. Plus précisément, celle-ci est déterminée par des suites d'éléments du pseudo-groupe d'holonomie de \mathcal{F} , ces suites étant « choisies » par le feuilletage \mathcal{X} . Seule la dynamique de la paire de feuilletage à une importance. Il s'agit d'une généralisation du phénomène observé sur les surfaces dans [30] par Y. Carrière et L. Rozoy. Dans ce cas $\mathcal{F} = \mathcal{X}$, le résultat dit alors que la complétude géodésique ne dépend que du feuilletage.

Si \mathcal{F} a une feuille compacte F_0 attractive (au moins d'un côté) et si F_0 contient une feuille fermée γ_0 de \mathcal{X} elle-même attractive alors de nombreuses feuilles de \mathcal{X} appartenant à des feuilles

de \mathcal{F} attirée par F_0 vont s'accumuler sur γ_0 . En quantifiant le résultat évoqué ci-dessus on montre (en adaptant un argument de [30]) que presque toutes ces feuilles attirées sont des géodésiques incomplètes. Cette situation a toujours lieu lorsque le revêtement universel de la variété n'est pas difféomorphe à \mathbf{R}^3 . Tout d'abord d'après les théorèmes de Novikov [47] et Palmeira [48], les feuilletages de codimension 1 de ces variétés contiennent toujours une composante de Reeb. Ce qui fournit la feuille F_0 . Ensuite les propriétés de \mathcal{X} viennent essentiellement de l'étude par Davis et Willson [31] de la dynamique des flots tangents à un feuilletage de Reeb. On obtient donc :

Théorème 3.2.1 (M— [8]). *Tout feuilletage de dimension 1 totalement géodésique de type lumière sur une variété de dimension 3 dont le revêtement universel n'est pas \mathbf{R}^3 contient des géodésiques incomplètes. En particulier il n'existe pas sur ces variétés de champ de vecteurs géodésique de type lumière.*

Un champ de vecteurs est dit géodésique s'il est partout non nul et si ses courbes intégrales paramétrées sont des géodésiques paramétrées. Un champ de vecteurs géodésique engendre donc un feuilletage géodésique dont les feuilles sont complètes. Le fait qu'il puisse exister un feuilletage géodésique mais pas de champ géodésique tangent à celui-ci est lié à la présence de feuilles de type lumière. En effet, si on a un feuilletage totalement géodésique \mathcal{X} de dimension 1 *sans* feuilles de type lumière alors un champ de vecteurs X tangent à \mathcal{X} et vérifiant $|g(X, X)| = 1$ est géodésique.

3.2.2 Feuilletages totalement géodésiques dont toutes les feuilles sont fermées

On sait depuis 1976 et l'article [59] de Sullivan qu'il existe des feuilletages de variétés compactes dont toutes les feuilles sont des cercles de longueurs non bornées. L'article contient différentes variantes de l'exemple initial de Sullivan chacune attribuée à un auteur différent. La construction attribuée à Thurston est particulièrement frappante car elle est analytique et complètement explicite. On peut la décrire très facilement. Le flot de Thurston vit sur la variété $M = N \times T^2$ où N est le quotient du groupe d'Heisenberg H de dimension 3 par le réseau Γ constitué des matrices à coefficients entiers et T^2 est le tore de dimension 2. Soit $p : H \times \mathbf{R}^2 \rightarrow N \times T^2$ le revêtement universel de M . Soit (x, y, z) les coordonnées usuelles sur H et (t, u) celles de \mathbf{R}^2 .

Le champ de vecteurs de Thurston est simplement défini par :

$$X = \sin(2u)(\cos(t)\partial_x + \sin(t)(\partial_y + x\partial_z)) + 2\sin^2(u)\partial_t - \cos^2(u)\partial_z.$$

Il est invariant sous l'action de $\Gamma \times \mathbf{Z}^2$ et donc passe au quotient sur M . De plus, un calcul direct montre que le flot de $W = \frac{1}{2\sin^2(u)}X$ est périodique. On voit donc que lorsque $\sin u \neq 0$ les courbes intégrales de X sont des cercles dont la longueur tend vers l'infini lorsque $\sin u$ tend vers 0. Finalement, lorsque $\sin u = 0$ le champ coïncide avec ∂_z , ses courbes intégrales sont donc bien toutes des cercles.

Il découle du théorème de Wadsley [61] qu'il n'existe aucune métrique *riemannienne* rendant le flot de Thurston (ou aucune de ses variantes) totalement géodésique. En effet, il montre que si on paramètre par longueur d'arc un feuilletage totalement géodésique, alors le paramétrage obtenu est périodique. L'importance du résultat de Wadsley vient du fait qu'il s'applique à l'étude des variétés riemanniennes dont toutes les géodésiques sont fermées (voir paragraphe 5.5 pour une présentation du sujet). On en déduit que si toutes les géodésiques sont fermées alors elles ont une période commune. En effet, le flot géodésique d'une variété riemannienne (M, g) définit un feuilletage de dimension 1 de son fibré unitaire tangent. Il est bien connu que le générateur

infinitésimal de ce flot est le champ de Reeb d'une forme de contact (la restriction de la forme de Liouville). Or il est facile de trouver une métrique riemannienne rendant géodésique un champ de Reeb. Ici, on peut choisir la métrique de Sasaki, celle formée de deux copies orthogonales de g l'une horizontale, l'autre verticale. Si toutes les géodésiques de M sont fermées il suffit d'appliquer le théorème de Wadsley pour conclure.

En collaboration avec S. Suhr, nous nous sommes demandé dans [14], quel était l'analogue pseudo-riemannien du résultat de Wadsley. Nous avons obtenu :

Théorème 3.2.2 (M—, Suhr [14]). *Soit \mathcal{X} un feuilletage de dimension 1 sur une variété pseudo-riemannienne (M, g) dont toutes les feuilles sont des géodésiques fermées. Si l'ensemble des longueurs des feuilles de \mathcal{X} n'est pas borné alors \mathcal{X} contient des feuilles de type lumière. Inversement, si \mathcal{X} est de type mixte alors l'ensemble des longueurs de ses feuilles n'est pas borné.*

Il existe des feuilletages de dimension 1, totalement géodésiques et possédant des feuilles de chaque type dont toutes les feuilles sont des cercles.

Le dernier point du théorème ci-dessus est obtenu en construisant une métrique g de signature $(3, 2)$ rendant totalement géodésique une légère modification (hélas seulement C^∞) X' du champ de Thurston. Le long de ce qui est appelé le « bad set », c'est-à-dire l'hypersurface au voisinage de laquelle les longueurs des courbes explosent, on a bien entendu $g(X', X') = 0$. La modification est simplement nécessaire pour que la fonction $g(X', X')$ change effectivement de signe en traversant cette hypersurface.

Concernant les géodésiques des variétés pseudo-riemanniennes, on déduit de la première partie du théorème 3.2.2 que s'il existait une variété non-riemannienne dont toutes les géodésiques sont fermées (on ne sait pas si c'est le cas) alors sur le tangent à la variété vivrait un feuilletage totalement géodésique dont toutes feuilles sont des cercles mais dont les longueurs des feuilles ne sont pas bornées (car il a forcément des feuilles de chaque type). La dernière partie nous dit qu'on ne peut pas en déduire directement que ces variétés n'existent pas. Cependant, pour les surfaces nous parvenons à montrer :

Corollaire 3.2.3 (M—, Suhr [14]). *Toute surface lorentzienne dont toutes les géodésiques de type espace sont fermées est homéomorphe à un cylindre ou un ruban de Möbius. Il n'existe pas de surfaces lorentziennes dont toutes les géodésiques sont fermées.*

Chapitre 4

Variétés géodésiquement équivalentes

Soient g_1 et g_2 deux métriques pseudo-riemanniennes sur une même variété M . On va dire qu'elles sont *géodésiquement équivalentes* si toute géodésique de l'une peut-être reparamétrisée en une géodésique de l'autre. Il est tout à fait possible que les géodésiques de g_1 et g_2 soient tout simplement les mêmes, on dira alors qu'elles sont affinement équivalentes. On définit le *degré de mobilité* d'une métrique comme étant la dimension de l'espace des métriques qui lui sont géodésiquement équivalentes.

L'exemple le plus simple de métriques affinement équivalentes est donné par les familles de métriques de la forme $g_1 \oplus \lambda g_2$, $\lambda > 0$, sur $M_1 \times M_2$ et leurs quotients. Dans le cas riemannien il s'agit en fait des seuls exemples. Dans le cas lorentzien, il y a essentiellement une autre source d'exemple, si g est une métrique et X un champ de vecteurs de type lumière parallèle (c.-à-d. invariant par transport parallèle) alors la métrique g' définie par $g'(u, v) = g(u, v) + g(u, X)g(v, X)$ est affinement équivalente à g . En signature quelconque la situation devient vraiment plus compliquée.

Le prototype de métrique ayant un grand degré de mobilité est donné par la sphère usuelle $S = \{x \in \mathbf{R}^n, \|x\| = 1\}$ munie de la restriction de $\|\cdot\|$ sur chaque plan tangent. Considérons $\|\cdot\|'$ une autre norme euclidienne et $S' = \{x \in \mathbf{R}^n, \|x\|' = 1\}$ munie de la restriction de $\|\cdot\|'$ sur chaque plan tangent. Les géodésiques de S (resp. S') sont les intersections des plans passant par 0 et de S (resp. S'). Par projection radiale on rapatrie cette nouvelle métrique sur S , les grands cercles de S' se projetant sur ceux de S on voit que les deux métriques sont projectivement équivalentes. Le degré de mobilité est donc au moins (et en fait égal à) $n(n+1)/2$. Cette construction remonte à Beltrami (autour de 1865).

On peut associer à ces situations deux groupes de transformations : $\text{Aff}(M, g)$ le groupe des difféomorphismes préservant les géodésiques paramétrisées de (M, g) et $\text{Proj}(M, g)$ le groupe des difféomorphismes préservant les géodésiques à un reparamétrage près. Bien-sûr $\text{Is}(M, g) \subset \text{Aff}(M, g) \subset \text{Proj}(M, g)$. Pour une métrique « générique » tout ces groupes sont triviaux et une conjecture de Gromov (formulée dans un cadre plus général) dit que les situations où ces groupes sont « gros » sont classifiables.

Ainsi, en 2007 Matveev a montré dans [44] que si (M, g) est une variété riemannienne complète telle que $\text{Proj}(M, g)/\text{Aff}(M, g)$ est de dimension au moins 1 alors (M, g) est une sphère ronde. La conjecture dite de Lichnerowicz-Obata (que généralise la conjecture Gromov ci-dessus) affirme que même parmi les variétés pseudo-riemanniennes compactes ou complètes il s'agit des seuls exemples. On notera aussi que le résultat de Matveev a été étendu récemment au cas où

$\text{Proj}(M, g)/\text{Aff}(M, g)$ est infini par Zeghib, [68].

Du côté affine, il a été montré par Yano en 1952 que pour toute variété riemannienne compacte $\dim(\text{Aff}(g)/\text{Is}(g)) = 0$ et plus récemment Zeghib a décrit en 1997 les variétés riemanniennes compactes pour lesquelles $\text{Aff}(g)/\text{Is}(g)$ est grand, par exemple contient un sous-groupe isomorphe à un réseau de groupe de Lie de rang supérieur ou égal à 2.

4.1 Variétés ayant un grand degré de mobilité et équation d’Obata

L’équation d’Obata a tout d’abord été introduite en géométrie riemannienne. Il s’agit d’une équation différentielle satisfaite (avec $c = 1$) par les fonctions propres associées à la troisième valeur propre du laplacien de la sphère. Une fonction $\alpha : (M, g) \rightarrow \mathbf{R}$ est solution de cette équation si pour tout champ de vecteurs X, Y, Z

$$DDD\alpha(X, Y, Z) + c \cdot (2(D\alpha \otimes g)(X, Y, Z) + (D\alpha \otimes g)(Y, X, Z) + (D\alpha \otimes g)(Z, X, Y)) = 0, \quad (4.1)$$

où $c \in \mathbf{R}$, D est la connexion de Levi-Civita. Cette équation est plus compréhensible si on la traduit sur le cône au dessus de la variété. Le cône au-dessus de M est la variété pseudo-riemannienne $(\widehat{M}, \widehat{g})$ définie par $\widehat{M} = M \times \mathbf{R}_{>0}$ et $\widehat{g} = r^2g + dr^2$. Si M est une sphère ronde de dimension n alors \widehat{M} est isométrique à $\mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.

Proposition 4.1.1. *Une fonction $\alpha : (M, g) \rightarrow \mathbf{R}$ est solution de l’équation d’Obata si et seulement si la fonction $A : \widehat{M} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $A(x, r) = r^2\alpha(x)$ vérifie $\widehat{D}^3 A = 0$. De plus tout 2-tenseur symétrique parallèle sur \widehat{M} est la hessienne d’une telle fonction.*

On voit donc qu’une solution de l’équation d’Obata sur la sphère ronde n’est rien d’autre que la restriction d’une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 2. En 1978, Gallot et Tanno ont indépendamment montré, [34], [60], que les variétés riemanniennes complètes sur laquelle l’équation d’Obata a une solution non constante sont des quotients de la sphère.

Cette équation est également reliée aux propriétés projective de M . On peut montrer facilement, voir par exemple [12, Proposition 6.2], que s’il existe une solution non constante minorée ou majorée à l’équation d’Obata alors il existe une métrique projectivement mais non affinement équivalente à g . En effet, on peut alors associer à $\widehat{D}^2 A$ une métrique \widehat{g}_1 qui est \widehat{D} invariante, la métrique cherchée étant la restriction de \widehat{g}_1 à M . La réciproque n’est pas vraie. Cependant, dans [43] Kiosak et Matveev ont montré que lorsque le degré de mobilité d’une variété pseudo-riemannienne est supérieur ou égal à 3 et lorsqu’il existe au moins une métrique géodésiquement mais non affinement équivalente à g alors il existe une solution non constante à l’équation d’Obata.

Dans [5], en commun avec Matveev, nous avons alors étudié les variétés pseudo-riemanniennes compactes (M, g) admettant une telle solution. En utilisant les relations entre les points critiques de α et les vecteurs propres de la hessienne de A , on montre qu’une telle solution ne peut exister que sur une variété riemannienne. On peut donc appliquer le théorème de Gallot et Tanno pour conclure que (M, g) est revêtue par une sphère ronde. On trouve dans [19] par Alekseevsky et al., une version partielle de ce résultat. Le résultat de Kiosak et Matveev mentionné plus haut, a donc pour conséquence :

Théorème 4.1.2 (Matveev, M— [5]). *Une métrique pseudo-riemannienne compacte qui n'est pas revêtue par une sphère ronde et qui possède une métrique projectivement mais non affinement équivalente à un degré de mobilité inférieur ou égal à 2.*

En particulier s'il existe un contre-exemple à la conjecture de Lichnerowicz-Obata, son degré de mobilité est exactement 2.

Ce résultat est le point de départ de l'article [68] de Zeghib, dans lequel il montre qu'une variété compacte riemannienne qui n'est pas à courbure constante positive à un groupe projectif d'indice fini dans son groupe affine.

J'ai étudié ensuite dans [12] les variétés *non compactes* admettant une solution non constante à l'équation d'Obata. La situation est alors beaucoup plus riche, de nombreuses variétés possédant des solutions. Comme indiqué plus haut, pour chaque solution de l'équation on obtient un 2-tenseur symétrique parallèle sur \widehat{M} . On associe à ces tenseurs, via la métrique \hat{g} , un champ d'endomorphismes symétriques parallèle que l'on note E . On montre facilement que s'il existe une solution non constante alors il existe un champ E tel que E^2 est égal à E , -1 ou 0 . Si $E^2 = E$, on a affaire à un projecteur et cela signifie que le cône est décomposable c'est-à-dire qu'il possède des distributions parallèles non dégénérées (les noyaux de E et de $1 - E$) ou si l'on veut que la métrique du cône s'écrit localement comme un produit. Il s'agit du seul cas possible si le cône est riemannien. Si $E^2 = -1$, on a une structure complexe qui, contrairement aux structures complexes habituelles (c.-à-d. kähleriennes), est donnée par un tenseur symétrique (et non antisymétrique). Sur \widehat{M} le champ de formes quadratiques complexes $\hat{g}(\cdot, \cdot) - i\hat{g}(\cdot, E\cdot)$ est non dégénérée, c'est ce que l'on appelle parfois une métrique riemannienne holomorphe, la métrique du cône est forcément de signature neutre (i.e. $p = q$). Dans le troisième cas, $E^2 = 0$ l'interprétation géométrique n'est pas aussi simple, du moins pas aussi classique, on pourra consulter [26] à ce sujet.

J'ai obtenu premièrement une description locale de ces trois familles de métriques sur un ouvert dense de M . Si $C \in \mathbf{R}$ n'est pas une valeur propre de E alors l'hypersurface $\alpha^{-1}(C)$ est lisse et non dégénérée. De plus le champ d'endomorphisme E induit sur cette hypersurface un champ d'endomorphisme F_C qui est parallèle pour la métrique induite. Il y a bien-sûr la même relation entre E et E^2 qu'entre F_C et F_C^2 . Pour achever la description locale, il ne reste plus qu'à déterminer comment évoluent les métriques $g|_{\alpha^{-1}(C)}$ et les champs F_C lorsqu'ils sont poussés par le gradient de α . Ce qui se résout explicitement grâce aux propriétés remarquable de ce gradient. On obtient ainsi une description locale ayant pour paramètres la donnée d'une variété pseudo-riemannienne (N, g_N) munie d'un champ d'endomorphisme parallèle F .

Ensuite, j'ai donné une classification des métriques appartenant aux deux premières familles et satisfaisant certaines conditions de complétude (à savoir complétude géodésique ou propriété de la fonction solution). De telles hypothèses sont nécessaires pour dépasser le point de vue local. Cela permet d'étendre facilement la description locale évoquée ci-dessus à tout l'ouvert dense $U = \alpha^{-1}(\mathbf{R} \setminus \text{Sp}(E))$. Lorsque $E^2 = -1$, le spectre est contenu dans $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ alors $U = M$ et la description est globale. Lorsque $E^2 = E$, en reprenant et étendant des résultats [19] et de [34], on arrive à déterminer ce qu'il se passe au voisinage des niveaux singuliers de α : si $\alpha^{-1}(0)$ et $\alpha^{-1}(1)$ sont non vides alors \widehat{M} est plat et M à courbure constante égale à 1, si seulement l'un de ces deux niveaux est non vide on a une situation intermédiaire, \widehat{M} possède une distribution parallèle non dégénérée plate. Ce qui donne :

Théorème 4.1.3 (M— [12]). *Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne simplement connexe,*

α une solution de l'équation d'Obata et E le champ d'endomorphisme sur \widehat{M} associé à α . On suppose que (M, g) est géodésiquement complète ou que α est propre.

Si $E^2 = E$ alors soit M est à courbure constante égale à 1 soit il existe une variété (N, g_N) telle que $M = \mathbf{R}^n \times N$ et g s'écrive

$$-ds^2 - \sinh^2(s)g_S + \cosh^2(s)g_N,$$

où g_S est la métrique standard de la sphère S^{n-1} et donc $ds^2 + \sinh^2(s)g_S$ donne la métrique hyperbolique.

Si $E^2 = -1$ alors il existe une variété riemannienne holomorphe (N, g_N, F) telle que $M = \mathbf{R} \times N$ et

$$g = -ds^2 + g_N - \sinh(2s)\tilde{F},$$

où $\tilde{F}(\cdot, \cdot) = g_N(F, \cdot)$.

Mais la troisième famille est plus mystérieuse. Mis à part la description le long de l'ouvert U , j'ai seulement pu montrer qu'elle contient des exemples non triviaux c'est-à-dire à courbure non constante. Il apparaît que ses membres sont déformables, ce qui les rend difficiles à caractériser et encore plus à classer. L'exemple le plus simple s'obtient comme suit :

On part de $M = dS^3 = \{x \in \mathbf{R}^{3,1} \mid \langle x, x \rangle = 1\}$ muni de la métrique induite par $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Son cône est plat et égal $\{x \in \mathbf{R}^{3,1} \mid \langle x, x \rangle > 0\}$, le champ de vecteurs ∂_r étant donné par $\langle x, x \rangle^{-1/2}x$. On choisit des coordonnées dans lesquelles $\langle x, x \rangle = 2x_0x_1 + x_2^2 + x_3^2$ et on prend $A(x) = x_1^2$. Sa hessienne est clairement parallèle (c.-à-d. constante). Les niveaux de α sont simplement les intersections entre ceux de A et M . On voit que $\alpha^{-1}(0)$ est de type lumière mais lisse (parce que A est particulièrement simple). L'endomorphisme E est nilpotent de rang 1 et donc F est nul, ce qui simplifie les choses. Sur $U = M \setminus \alpha^{-1}(0)$ la métrique s'écrit $-ds^2 + e^{-2s}g_0$, où g_0 est la métrique plate euclidienne du plan et ∂_s est proportionnel au gradient de α lequel est facile à déterminer. Il n'est pas dur non plus de voir que si K est un compact d'intérieur non vide contenu dans U alors le saturé de K par le champ de gradient de α est un fermé disjoint de $\alpha^{-1}(0)$ (ce qui est possible car $\alpha^{-1}(0)$ est de type lumière). Ainsi si g_1 est une perturbation à support compact de g_0 , alors elle donne une perturbation lisse g' de g . Il reste juste à voir que α est toujours une solution de l'équation d'Obata pour ces nouvelles métriques. Sur U , $\alpha = e^{-2s}$ et l'écriture $g' = -ds^2 + e^{-2s}g_1$ nous assure que α est solution sur U donc partout par densité.

4.2 Variétés affinement équivalentes

Comme expliqué plus haut, il existe un lien fort entre l'existence de métriques lorentziennes affinement équivalentes et la présence d'un champ de vecteurs parallèle de type lumière. C'est une des raisons pour lesquelles, avec C. Boubel, nous avons entrepris l'étude des variétés lorentziennes compactes de dimension 3 admettant un tel champ de vecteurs. Nous avons obtenu une description de ces variétés, elles s'écrivent assez naturellement comme des déformations de métriques plates, en particulier il s'agit de tores ou de nil-variétés (les quotients du groupe de Heisenberg par des réseaux). Passer de la description à la classification (c.-à-d. déterminer précisément les classes d'isométries) se révèle hélas inextricable en toute généralité, mais s'obtient sous différentes hypothèses, notamment celle de l'existence d'un gros groupe affine.

On part donc d'une variété lorentzienne (M, g) compacte de dimension 3 possédant un champ parallèle de type lumière X . Il est immédiat de constater que X est un champ de Killing et que

la 1-forme X^\flat , définie par $X^\flat(v) = g(X, v)$, est fermée. Ainsi la distribution $X^\perp = \ker X^\flat$ est intégrable et toutes les feuilles du feuilletage \mathcal{F} ainsi engendré sont difféomorphes. Le point clef suivant est un résultat de Zeghib [63] donnant la classification des variétés lorentziennes compactes de dimension 3 possédant un champ de Killing non équicontinu, c'est-à-dire dont la composante neutre du groupe d'isométrie est non compacte. Il montre notamment qu'en dimension 3 tout champ de vecteurs parallèle de type lumière est équicontinu. On en déduit sans trop de difficultés que les seuls cas intéressants sont ceux pour lesquels le flot de X est périodique. Ce que l'on suppose désormais. Dans ce cas la variété M fibre en cercles et, à un revêtement fini près, la base de la fibration est un tore. On a donc un tore muni de l'image de tous les objets invariants par le flot de X , c'est-à-dire d'une connexion, d'une forme volume parallèle, d'une 1-forme α fermée, non dégénérée et parallèle et d'un champ de vecteurs parallèle appartenant à $\ker \alpha$. Cette connexion a une holonomie visiblement très particulière ce qui lui vaut de vérifier un théorème de Gauss-Bonnet : la moyenne de sa courbure est nulle.

On montre alors que la classification des métriques en question se ramène essentiellement à celle des tores munis d'une telle structure. On voit alors venir le principal obstacle. On a un feuilletage sur le tore qui est linéarisable car défini par une forme fermée. La donnée de la connexion donne en particulier un champ de vecteurs tangent à ce feuilletage. Autrement dit à chaque tore quotient est associé un flot linéaire reparamétré. Or, on sait que lorsque la pente d'un flot linéaire est de type Liouville (c.-à-d. ni rationnelle, ni diophantienne) le nombre de classes d'équivalences de tels reparamétrages est énorme et on ne peut pas espérer les classer (on pourra consulter [33] à ce sujet). On arrive à décrire toutes les métriques possédant un champ de vecteurs parallèle de type lumière mais sans hypothèse supplémentaire, par exemple sur la pente de ce feuilletage, on ne peut pas donner précisément les classes d'isométrie.

Cette étude nous permet tout de même de donner la classification des variétés telles que $\text{Aff}(g)/\text{Is}(g)$ a (strictement) plus de deux éléments. Les exemples de base sont donnés par les deux familles de métriques plates ayant un gros groupe affine, d'une part les tores plats, dont le groupe affine est $\text{GL}(3, \mathbf{Z}) \times \mathbf{R}^3/\mathbf{Z}^3$, et d'autre part les quotients du groupe de Heisenberg muni d'une métrique plate invariante à gauche par un réseau dans ce cas $\dim(\text{Aff}(g)/\text{Is}(g)) = 1$ (engendré par un champ de vecteurs invariant à gauche perpendiculaire au centre). La situation est déjà bien différente de la riemannienne. Nous avons en particulier montré que les 3-variétés lorentziennes ayant un groupe affine non élémentaire sont d'une certaine façon des déformations équivariantes de ces métriques plates :

Théorème 4.2.1 (Boubel, M— [3]). *Soit (M, g) une variété lorentzienne compacte de dimension 3 telle que $[\text{Aff}(g) : \text{Is}(g)] > 2$. Alors M est une Nil-variété ou un tore et pour tout $\phi \in \text{Aff}(g)$ il existe un chemin lisse de métriques g_t de M reliant g à une métrique plate tel que $\phi \in \text{Aff}(g_t)$ pour tout $t \in [0, 1]$.*

Cependant, il existe une variété lorentzienne (M, g) compacte et de dimension 3 telle que $[\text{Aff}(g) : \text{Is}(g)] > 2$ et $\text{Aff}(g)$ ne préserve aucune connexion lorentzienne plate.

L'article contient des résultats plus explicites mais plus long à énoncer. On donne une forme normale pour chacune de ces métriques et on détermine pour chacune d'elles le quotient $\text{Aff}(g)/\text{Is}(g)$. On voit que ce quotient est toujours un groupe et même toujours isomorphe à un sous-groupe de \mathbf{R} (discret, dense ou égal à \mathbf{R}) sauf si (M, g) est un tore plat. Ce qui suggère une notion de gros groupe affine pour de futurs travaux.

Chapitre 5

Surfaces ayant un champ de Killing

5.1 Observation clef

Dans ce chapitre, j'ai regroupé un certain nombre de résultats des articles [2], [1] écrits en commun avec Christophe Bavard et de [15] en commun avec Stefan Suhr. Leur point commun est de traiter de surfaces lorentziennes $(S, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ possédant un champ de Killing K ou c'est-à-dire ayant un groupe d'isométrie de dimension au moins 1, en fait égale à 1 la plupart du temps. Dans chacun de ces travaux la remarque élémentaire suivante joue un rôle important :

Observation clef : Soit $\pm du^2 + h(u)dv^2$ un métrique lorentzienne définie sur $I \times \mathbf{R}$ possédant un champ de Killing ∂_v . L'application $(u, v) \mapsto (u, -v)$ est une isométrie qui permute les feuilletages de lumière.

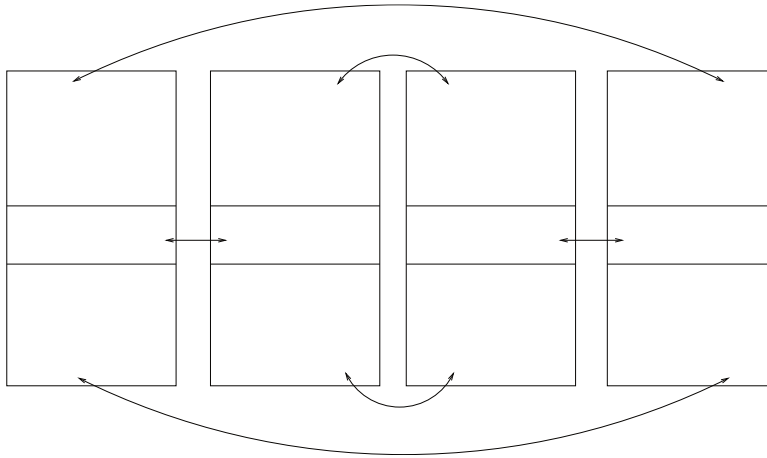
Si p est un point tel que $\langle K_p, K_p \rangle \neq 0$ (c'est-à-dire si K n'est pas nul ou de type lumière en p), on construit à l'aide de la géodésique perpendiculaire à K passant par p des coordonnées dans lesquelles la métrique s'écrit comme ci-dessus. Ainsi, lorsque K n'est pas partout de type lumière (ce qui est toujours le cas si S n'est pas plate), la surface possède un certain nombre d'isométries locales. Modulo le flot de K , il en existe une sur chaque composante connexe de $S \setminus \langle K, K \rangle^{-1}(0)$ ou de façon équivalente sur le saturé par K de toute géodésique perpendiculaire et transverse à K . On appellera *réflexion générique* ces isométries locales.

Plus généralement, si $K_p \neq 0$ on peut choisir une géodésique de lumière γ transverse à K passant par p . Sur U , le saturé de γ par K , la métrique s'écrit $f(x)dy^2 + 2dxdy$, la fonction f pouvant s'annuler. Dans ces coordonnées les réflexions génériques ont pour expression $(x, y) \mapsto (x, F(x) - y)$, où F est une primitive de $\frac{-2}{f}$. On voit bien qu'elles sont définies sur le complémentaire de $f^{-1}(0)$.

Si $\langle K_p, K_p \rangle \neq 0$ il existe une deuxième géodésique de lumière transverse à K passant par p . On a alors une deuxième expression locale de la métrique sur un ouvert U' . L'ouvert $U \cap U'$ ne contient pas d'orbites de lumière de K , il possède donc une réflexion générique. On peut voir qu'il s'agit là du changement de coordonnées sur $U \cap U'$ (il faut toutefois faire attention au fait qu'une réflexion générique ne préserve pas K). Il existe donc un atlas de S privé des zéros de K tel que sur chaque ouvert le champ K soit envoyé sur $\pm \partial_y$, la métrique ait une expression de la forme $2dxdy + f(x)dy^2$ et que les changements de coordonnées sont des réflexions génériques. On parlera alors d'*atlas adapté* (à K).

Exemple 5.1.1. Soit $dS^2 = \text{SO}_0(2,1)/\text{SO}_0(1,1)$ l'espace de Sitter et K un champ de Killing parabolique, c'est-à-dire induit par un sous-groupe parabolique de $\text{SO}_0(2,1)$. Un atlas adapté à K est obtenu en prenant deux copies de la surface $(\mathbf{R}^2, 2dxdy + x^2dy^2)$. Sur chaque ouvert les restrictions de $(x, y) \mapsto (x, \frac{2}{x} - y)$ aux demi-plans $\{x > 0\}$ et $\{x < 0\}$ définissent des réflexions génériques. On prend celles-ci comme changements de cartes ce qui fait que la métrique se recolle bien. La surface obtenue est un cylindre de courbure constante égale à 1. On peut vérifier qu'elle est bien isométrique à dS^2 .

Exemple 5.1.2. On prend maintenant dS^2 muni d'un champ de Killing hyperbolique. Le champ à deux points selles $\{p_1, p_2\}$ et on peut facilement donner un atlas de $dS^2 \setminus \{p_1, p_2\}$ adapté au champ. On part de 4 copies de $(\mathbf{R}^2, 2dxdy + (x^2 - 1)dy^2)$. Cette fois ci on a donc trois réflexions locales par ouvert, à savoir les restrictions de $(x, y) \mapsto (x, \log \left| \frac{x+1}{1-x} \right| - y)$ et on recolle comme ceci :



On peut à nouveau vérifier que la surface obtenue est isométrique à $dS^2 \setminus \{p_1, p_2\}$.

Bien-sûr, il existe aussi des écritures locales simples au voisinage des 0 du champ K , on peut montrer, [2], qu'elle peut toujours s'écrire sous la forme $\alpha(x, y)(xdy - ydx)^2 + 2dxdy$, où α est une fonction constante le long du flot de $x\partial_x - y\partial_y$, qui est l'expression locale de K . On pourrait compléter ainsi l'atlas hyperbolique de dS^2 .

Exemple 5.1.3. Les tores de Clifton-Pohl sont les tores ayant pour revêtement cyclique $(\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}, \frac{dxdy}{x^2+y^2})$. Les tores sont obtenus via une action de \mathbf{Z} par homotétie. Il peut sembler étrange de vouloir donner un atlas d'une surface qui est déjà un ouvert de \mathbf{R}^2 mais c'est tout de même ce que nous allons faire. On prend les 4 surfaces $(I_i \times \mathbf{R}, 2dxdy + \sin(2x)dy^2)$, où $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ et $I_i =]\frac{i\pi}{2}, \frac{i\pi}{2} + \pi[$. La fonction f s'annule une fois par ouvert, les réflexions s'écrivent $(x, y) \mapsto (x, \log \left| \frac{\sin(2x)}{1 - \cos(2x)} \right| - y)$ et permettent de recoller cycliquement $I_i \times \mathbf{R}$ à $I_{i+1} \times \mathbf{R}$. On vérifie encore que la variété obtenue est bien $(\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}, \frac{dxdy}{x^2+y^2})$. Le champ de Killing (c.-à-d. le champ radial) a pour expression dans ces coordonnées tantôt ∂_y et tantôt $-\partial_y$ selon la parité de i .

On peut faire maintenant quelques remarques qui seront à la base de ce qui suit :

Premièrement, l'atlas adapté du tore de Clifton-Pohl montre sans autres calculs que ce tore n'est pas géodésiquement complet, plus précisément que le revêtement cyclique considéré est extensible. En effet, il suffit de remplacer les ouverts $(I_i \times \mathbf{R}, 2dxdy + \sin(2x)dy^2)$ par leurs

extensions naturelles $(\mathbf{R} \times \mathbf{R}, 2dxdy + \sin(2x)dy^2)$, sans toucher aux changements de carte pour étendre celui-ci.

Deuxièmement, si on déforme la métrique de sorte à ne pas modifier la 1-forme K^b (i.e. la 1-forme $v \mapsto \langle K, v \rangle$) alors on ne modifie pas les réflexions génériques. Si on part d'un atlas adapté cela revient à remplacer la métrique $2dxdy + f(x)dy^2$ par $g(x)dx^2 + 2dxdy + f(x)dy^2$.

5.2 Classification des tores possédant un champ de Killing

Le contenu de ce paragraphe est issu de [2], travail en commun avec Ch. Bavard. La présentation donnée ici est un peu différente. On va limiter notre étude aux tores non élémentaires, c'est-à-dire ceux possédant un champ de Killing K tel que $\langle K, K \rangle$ s'annule sur un sous-ensemble propre. Ces tores ont été étudiés au préalable en 1997 par M.Sanchez dans [56], il montre notamment que ces tores ne sont jamais géodésiquement complets et qu'ils ne sont pas conformes à une métrique plate. Commençons par le résultat bien connu suivant, présent dans [56] :

Proposition 5.2.1. *Soit K un champ de Killing non trivial d'un tore lorentzien T non plat. Alors le flot de K induit une action libre de S^1 sur T .*

Preuve. On désigne par Φ_K le flot de K . Les zéros de K étant forcément des points selles, on déduit du théorème de Poincaré-Hopf que K ne s'annule pas. Le tore n'étant pas à courbure constante, le flot de K ne peut pas avoir de feuilles denses, il possède donc une feuille fermée. Soit p un point de cette orbite et t_0 le plus petit réel positif tel que $\Phi_K^{t_0}(p) = p$. La différentielle de $\Phi_K^{t_0}$ au point p appartient à $SO_0(1,1)$ et fixe K_p , c'est donc l'identité. Par rigidité, on voit que $\Phi_K^{t_0} = \text{id}$, le flot de K induit donc une action libre de S^1 sur le tore. \square

On déduit de la proposition ci-dessus que sur \tilde{T} , le revêtement universel d'un tore non élémentaire, il existe des coordonnées (x, y) telles que \tilde{K} , le relevé de K , est égal à ∂_y et qu'un groupe discret de translations horizontales agit par isométrie. Une classification des tores se déduit donc facilement de celle de leurs revêtements universels : le groupe fondamental est engendré par un élément du flot de \tilde{K} et par une translation horizontale composée éventuellement par un autre élément du flot (twist). On regarde donc désormais les métriques sur \mathbf{R}^2 ayant un groupe d'isométrie comme ci-dessus. On désigne par F l'ensemble sur lequel la fonction $\langle \tilde{K}, \tilde{K} \rangle$ s'annule, c'est-à-dire la réunion des feuilles de lumière de \tilde{K} . L'ensemble F peut être compliqué mais son complémentaire est toujours difféomorphe au produit d'une réunion dénombrable d'intervalles ouverts par \mathbf{R} . Appelons *bande* chaque composante connexe de $\tilde{T} \setminus F$.

Affirmation 5.2.2. *L'espace des feuilles du champ \tilde{K} possède une structure riemannienne naturelle invariante par le groupe d'isométrie de \tilde{T} . En particulier, chaque bande possède une feuille du milieu.*

Preuve. L'espace des feuilles de \tilde{K} est difféomorphe à \mathbf{R} . Il peut être paramétré localement en utilisant des géodésiques de type lumière γ transverses à K vérifiant $|\langle \dot{\gamma}, K \rangle| = 1$ (le lemme de Clairaut affirme que cette quantité est bien constante). Les réflexions de l'observation clef nous disent que ce paramétrage est indépendant du choix de γ . Toute isométrie envoyant K sur $\pm K$ (K est le seul champ de Killing et il n'est pas partout de type lumière) il est clair que la structure riemannienne induite par ce paramétrage est invariante par isométries. \square

On veut construire une transversale globale au champ K . Pour cela, on considère une géodésique de lumière brisée maximale L transverse à K dont les points de bifurcation sont sur des feuilles du milieu d'une bande de \tilde{T} que l'on oriente. On remarque que L coupe toutes les feuilles de K et définit une orientation de l'espace des feuilles de K . On peut aussi remarquer que si v est un vecteur tangent à L dans le sens direct alors le signe de $\langle K, v \rangle$ change à chaque point de bifurcation de L .

Proposition 5.2.3. *L'ensemble des points de bifurcation de L est un sous-ensemble discret de \mathbf{R}^2 invariant par translation horizontale de longueur 1. De plus, le nombre de points de bifurcation sur une période est toujours pair.*

Preuve. Chaque bifurcation de L est au centre d'une bande dont chaque bord appartient à un feuilletage de lumière différent (bandes dites de type II dans [2]). Pour voir que de telles bandes ne peuvent pas s'accumuler, on montre que le feuilletage engendré par K^\perp à des orientations opposées sur chacune des composantes du bord de la bande (on a donc affaire à des composantes de Reeb de ce feuilletage). Le signe de $\langle K, \tau \rangle$ est différent sur chaque composante de bord. Celui de $\langle K^\perp, \tau \rangle$ ne change pas en un point de bifurcation et donc ne change de toute la bande. La dernière affirmation vient du fait que la fonction $\langle K, \tau \rangle$ est elle aussi 1-périodique. \square

La fonction $\langle \tilde{K}, \tilde{K} \rangle$ induit une fonction f sur l'espace des feuilles de \tilde{K} identifié à \mathbf{R} (on a donc marqué une origine ζ). Cette fonction est invariante sous l'action du groupe fondamental de T , elle est donc k -périodique. Quitte à remplacer \tilde{K} par un multiple de celui-ci, on peut supposer que k est entière et même que f est de plus petite période 1 (remplacer T par un revêtement fini de celui-ci peut modifier k sans changer f et donc sans changer sa plus petite période). Il existe alors un unique champ \tilde{K} qui vérifie de plus $\langle \tilde{K}, v \rangle > 0$ pour v tangent (à droite) à \tilde{L} (un relevé de L) en $\tilde{L} \cap \zeta$. Soit $\dots < p_{-1} < p_0 < \dots < p_i < \dots \in \mathbf{R} \setminus f^{-1}(0)$ les coordonnées dans l'espace des feuilles des points de bifurcation de \tilde{L} . On choisit l'indice 0 de façon à avoir $p_0 \leq 0 < p_1$. Ces points sont dit *marqués*, ils vont nous permettre de donner un atlas de \tilde{T} .

Pour tout i , on pose $p_i^- = \sup\{p \in]-\infty, p_i[; f(p) = 0\}$, $p_i^+ = \inf\{p \in]p_i, +\infty[; f(p) = 0\}$ et $I_i =]p_i^-, p_i^+[$. On désigne par U_i la surface lorentzienne $(I_i \times \mathbf{R}, (-1)^i 2dx dy + f(x) dy^2)$. Chaque U_i est clairement isométrique à l'image réciproque de I_i par la projection de \tilde{T} dans l'espace des feuilles de \tilde{K} . On a donc un atlas de \tilde{T} tel que sur chaque U_i on a $\tilde{K} = \partial_y$. Les changements de cartes de cet atlas ne sont donc pas tout à fait des réflexions génériques, celles-ci ne préservant pas le champ de Killing. Le changement de carte de U_i vers U_{i+1} est donné par la restriction à $]p_{i+1}^-, p_{i+1}^+[\times \mathbf{R}$ de $(x, y) \mapsto (x, F(x) + y)$ où F est une primitive de $\frac{-2}{f}$. Remarquons enfin qu'il suffit de connaître les p_i appartenant à $[0, k[$ pour les connaître tous.

Réciproquement, si on se donne une fonction f non constante, s'annulant et de plus petite période 1, $k \in \mathbf{N}^*$, $h \in \mathbf{N}$, $\{p_0, \dots, p_{2h}\} \subset [0, k[$ tel que chaque p_i est au milieu d'un intervalle de $\mathbf{R} \setminus f^{-1}(0)$ (ce que nous appellerons ici une « bonne fonction marquée »), on sait y associer un tel atlas. La surface obtenue est difféomorphe à \mathbf{R}^2 et il est facile de voir qu'elle est bien le revêtement universel d'un tore. On a donc une bijection entre les bonnes fonctions marquées et les revêtements universels de tores non élémentaires dont l'espace des feuilles est muni d'une origine et d'une orientation.

Pour obtenir une classification des revêtements universels des tores non élémentaires, il faut voir ce qu'il se passe lorsque l'on déplace l'origine ou on modifie l'orientation. On a une action du groupe affine $\mathbf{R} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ sur l'ensemble des tores marqués et donc sur celui des bonnes fonctions

marquées. Deux fonctions f et g sont dans la même orbite s'il existe $(a, \epsilon) \in \mathbf{R} \times \{\pm 1\}$ tels que $f(x) = g(\epsilon x + a)$, les points p_i devenant $\epsilon(p_i - a)$. On a donc :

Théorème 5.2.4 (Bavard, M— [2]). *Les classes d'isométries de revêtements universels de tores non élémentaires sont en bijection avec les classes de bonnes fonctions marquées.*

Si de plus la fonction f est paire et si son marquage est symétrique, c'est-à-dire si $p_{-i} = -p_i$, alors la surface obtenue est le revêtement universel d'une bouteille de Klein munie d'un champ de Killing. L'involution est induite par une application qui envoie U_{-i} sur U_{i+1} et qui s'écrit en coordonnées locales $(x, y) \mapsto (-x, y + c)$, pour un certain $c > 0$. Tous les revêtements universels de bouteilles de Klein possédant un champ de Killing sont obtenus ainsi [2].

5.3 Extension des tores non élémentaires.

On vient de voir que l'on sait donner un atlas adapté de tout tore non élémentaire, la même construction que celle de la discussion suivant l'exemple 5.1.3 nous dit que leurs revêtements universels sont toujours extensibles. On retrouve notamment le résultat d'incomplétude de Sanchez cité plus haut. La question se pose maintenant de savoir si ces surfaces possèdent une extension maximale et sous quelles hypothèses cette extension est unique.

Commençons par un cas particulier, supposons que le revêtement universel de T soit un « ruban » c'est-à-dire qu'il est isométrique à \mathbf{R}^2 muni d'une métrique de la forme $2dx dy + f(x)dy^2$ avec f périodique qui s'annule. On note Rub_f cette surface. Il est clair que cette métrique est invariante sous une action de \mathbf{Z}^2 , il s'agit donc bien d'un revêtement d'un tore non élémentaire. On veut essayer d'étendre la surface de façon à ce que ses géodésiques de lumière soient complètes. Remarquons aussi que chaque droite horizontale, i.e. chaque courbe intégrale de ∂_x , est une géodésique de lumière complète. De plus, les autres géodésiques de lumière (les verticales), du moins celles qui ne correspondent pas à des zéros de f , ne sont pas complètes. Soient $a < b$ deux zéros consécutifs de f et $C =]a, b[\times \mathbf{R}$. D'après notre observation clef, la bande C est équipée d'une réflexion σ . On peut recoller un autre exemplaire de Rub_f , le long de C à l'aide de σ . Le fait que σ permute les directions de lumière entraîne que la surface obtenue est bien séparée et que toutes les géodésiques de lumière issues de C sont complètes. Pour compléter un maximum de géodésiques on recolle de façon systématique les bandes de la première copie de Rub_f sur la bande correspondante de l'autre copie de Rub_f à l'aide de la réflexion générique correspondante. Si (et seulement si) les composantes connexes du complémentaire de $f^{-1}(0)$ ne s'accumulent pas alors la surface obtenue est encore séparée. Pour simplifier l'exposition, on suppose que cette hypothèse est satisfaite. Dans notre nouvelle surface, que l'on appelle Y , toutes les bandes ont été étendues en un « carré standard » (cf. figure 5.1) et toutes les géodésiques de lumière sont complètes à l'exception de celles qui bordent les carrés.

La bande C (de même que chaque bande) est maintenant bordée par quatre géodésiques de lumière : les deux courbes $\{a, b\} \times \mathbf{R}$ de chaque exemplaire de Rub_f . Il est facile de voir que ces géodésiques sont complètes si et seulement si $f'(a) = 0$ et $f'(b) = 0$. En général, elles ne sont donc pas complètes, il faut trouver un autre moyen de les étendre. Comme il s'agit aussi de courbes intégrales du champ de Killing, on voit que la seule possibilité est de rajouter des points selles. À l'endroit où on voudrait rajouter ce point selle (là où se trouvent les ronds blancs sur la figure 5.1), arrivent 2 trajectoire de lumière de K (le carré de droite est le même que le carré du dessous), or en un point selle arrivent 4 trajectoires de lumière. On commence donc par

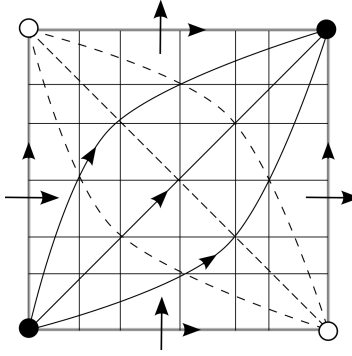


FIGURE 5.1 – Les feuilletages de lumière, le champ de Killing d’un carré standard

prendre un revêtement à 2-feuillets \widehat{Y} de Y pour doubler ce nombre de trajectoires. Chaque rond blanc est maintenant un sommet commun à 4 carrés, on est presque en présence d’une selle, il n’y manque que le point selle lui même.

Ensuite, on procède en deux étapes : on commence par montrer qu’une bande s’étend en une selle, ensuite on montre comment rendre cette extension compatible avec la précédente. Plus précisément, si $f'(b) \neq 0$ alors il existe $c > b$ tel que $f(c) = 0$ et f ne s’annule pas sur $]b, c[$. On pose $U =]a, c[\times \mathbf{R} \subset \text{Rub}_f$ et on montre que U s’étend en une selle.

Proposition 5.3.1 (voir [2], proposition 2.29). *La surface U admet une extension simplement connexe \widehat{U}_s admettant un champ de Killing \widehat{K} qui possède un unique zéro $p \in \widehat{U}_s$. Cette extension est partagée en 4 quadrants ouverts séparés par deux géodésiques de lumière complètes passant par p ; chaque demi-plan ouvert est isométrique à U et la métrique est symétrique par rapport à p .*

Lors de la construction de Y on a choisi une réflexion générique par bande, pour terminer la preuve on montre qu’il existe un choix de réflexions tel que $\widehat{U}_s \setminus \{p\}$ est isométrique à un ouvert de \widehat{Y} . Autrement dit, en jouant sur le choix des réflexions génériques utilisées pour construire Y on peut rajouter un point selle en chacun des coins de carré vers lequel pointe une géodésique de lumière incomplète. On sait donc compléter chaque géodésique de lumière de \widehat{Y} ce qui donne l’extension cherchée.

Lorsque les composantes du complémentaire de $f^{-1}(0)$ s’accumulent, cette construction s’adapte, elle reste en deux parties : l’extension des géodésiques internes aux rubans d’une part, puis l’ajout de points selles pour compléter les dernières géodésiques d’autre part, voir [2, proposition 3.3].

Le revêtement universel de la surface lorentzienne L-complète ainsi contruite est noté $E^u(f)$. Cette surface est en fait une extension du revêtement universel de nombreux tores non élémentaires comme le montre la proposition suivante :

Proposition 5.3.2 (voir prop 3.6 [2]). *Soit T un tore muni d’un champ de Killing K . Soit $\bar{f} : \mathbf{R}/\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}$ la fonction induite par $\langle K, K \rangle$ en identifiant l’espace des feuilles de K à \mathbf{R}/\mathbf{Z} . Alors \widetilde{T} , le revêtement universel de T , se plonge isométriquement dans $E^u(f)$, où f est le relevé de \bar{f} à \mathbf{R} .*

Idée de preuve. On part de l'atlas de \tilde{T} adapté à \tilde{K} construit au paragraphe précédent. Chaque ouvert de l'atlas \tilde{T} est explicitement isométrique à un ouvert de Rub_f donc à un ouvert de l'atlas de $E^u(f)$. Les changements de cartes de \tilde{T} et de $E^u(f)$ sont des réflexions génériques. On construit donc facilement un plongement. \square

L'extension $E^u(f)$ ainsi obtenue possède de par sa construction une autre propriété remarquable :

Proposition 5.3.3 (voir [2] lemme 3.12). *Les réflexions génériques de $E^u(f)$ s'étendent en des isométries globales.*

Une surface lorentzienne vérifiant (une version faible de) les conclusions de la proposition 5.3.3 sera dite *reflexive*. C'est le critère qui nous permet de rigidifier la situation. En effet, une extension reflexive est modelée (au sens des (G, X) -structures) sur $E^u(f)$ et la complétude géodésique entraîne la complétude de la développante.

Théorème 5.3.4 (Bavard, M— [2]). *Soit (T, g) un tore lorentzien muni d'un champ de Killing K non élémentaire. Alors le revêtement universel de (T, g) possède une unique extension simplement connexe, possédant un champ de Killing, reflexive et dont toutes les géodésiques de type lumière sont complètes (on dira L -complète). Dans le cadre analytique les extensions L -complètes ont toujours un champ de Killing et sont toujours réflexives.*

Il est clair qu'on ne peut pas assurer l'unicité de l'extension sans hypothèses supplémentaires. On voit bien que Rub_f est loin d'être dense dans $E^u(f)$ (qui contient même une infinité de copies de Rub_f disjointes de celui-ci). On peut donc facilement déformer $E^u(f)$ sans toucher à Rub_f . Ce qui montre la nécessité d'une hypothèse du type reflexivité. Par ailleurs, lorsque $E^u(f)$ contient un point selle p (ce qui est le cas génériquement), on peut créer une extension maximale (qui possède des géodésiques de lumière incomplètes) en prenant le revêtement universel de $E^u(f) \setminus \{p\}$. On ne peut donc pas remplacer l'hypothèse de complétude par une hypothèse plus faible.

Remarque 5.3.5. On a vu que la fonction $\langle K, K \rangle$ ne détermine pas le revêtement universel d'un tore non élémentaire. Le théorème 5.3.4 dit par contre que cette fonction détermine l'extension universelle de celui-ci.

On étend maintenant la famille de surfaces que l'on étudie. La construction qui associe à f la surface $E^u(f)$ n'utilise pas le fait que f soit périodique. On considère dorénavant les surfaces obtenues à partir de n'importe quelle fonction réelle lisse f . L'éventuelle périodicité de f se traduit sur $E^u(f)$ par la présence d'isométries supplémentaires. On déduit du théorème 5.3.4 (du moins de sa preuve) :

Corollaire 5.3.6. *Soit S une surface lorentzienne analytique munie d'un champ de Killing non trivial. Si S est simplement connexe et L -complète alors il existe une fonction analytique $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $S \simeq E^u(f)$.*

La surface $E^u(f)$ bien que difféomorphe à \mathbf{R}^2 est définie via un atlas infini (dénombrable). Il n'est pas commode de se faire une idée de sa géométrie. On sait que son groupe d'isométrie, noté $\text{Is}(E^u(f))$, est assez gros, sa composante neutre est isomorphe à \mathbf{R} , il est engendré par les réflexions génériques, proposition 5.3.3, et par au plus deux autres isométries provenant d'éventuelles symétries de f (parité, périodicité).

On peut mieux comprendre ces surfaces en étudiant de plus près leur groupe d'isométrie.

Théorème 5.3.7 (voir [2]). *Si $f''' \neq 0$ (c.-à-d. si $E^u(f)$ n'est pas à courbure constante) alors le groupe d'isométrie de $E^u(f)$ s'écrit comme le produit semi-direct de \mathbf{R} par un groupe discret G .*

L'action de G sur $E^u(f)$ est proprement discontinue si et seulement si $f^{-1}(0)$ est un sous-ensemble discret de \mathbf{R} . Son action est alors conjuguée à celle d'un sous-groupe discret du groupe d'isométrie du plan hyperbolique et il contient un sous-groupe sans torsion d'indice 2 ou 4.

Si on prend $f(x) = \sin(2x)$ la surface obtenue est l'extension du tore de Clifton-Pohl. Dans ce cas, le sous-groupe de $\text{Is}(\mathbb{H}^2)$ est le groupe de réflexion $(2, 2, 2, \infty)$ ce qui permet de donner la représentation suivante de $E^u(f)$:

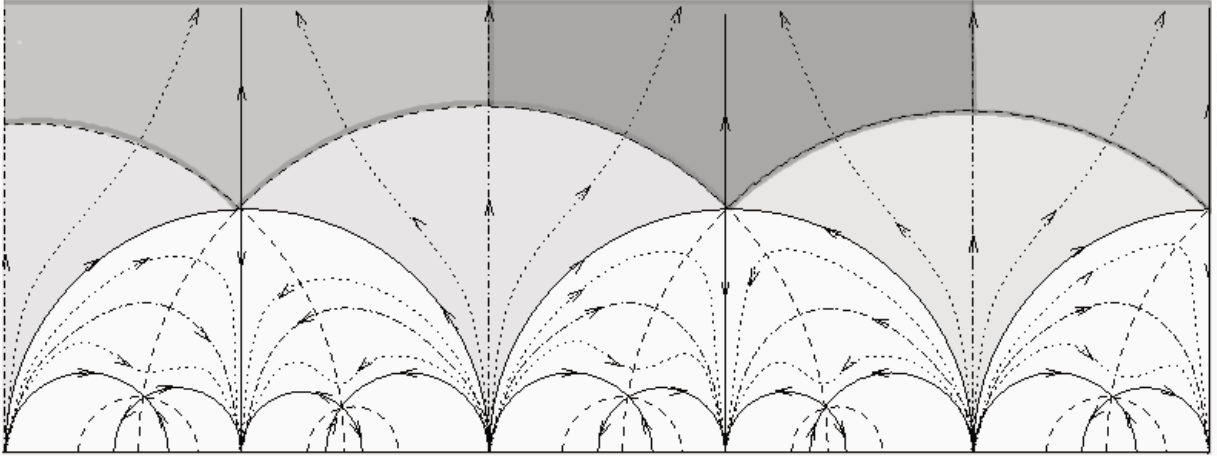


FIGURE 5.2 – L'extension du revêtement universel du tore de Clifton-Pohl

Les courbes munies de flèches sont les courbes intégrales du champ de Killing, celles en trait plein sont de type lumière, elles délimitent les carrés. Les courbes en tiret sont des axes de réflexions, il y en a deux types : les axes des réflexions génériques qui n'ont pas de flèches et les axes des réflexions dues à la parité de la fonction sinus qui sont aussi des courbes intégrales de K . On voit clairement que chaque carré a deux sommets à l'infini et deux sommets constitués de points selles (les zéros de la fonction sinus sont tous non dégénérés). La zone grisée est isométrique au revêtement universel du tore de Clifton-Pohl, elle contient une zone plus foncée qui est un domaine fondamental de G_{gen} (c.-à-d. l'intersection de G et du groupe engendré par les réflexions génériques) qui lui même contient une zone encore plus foncée qui est un domaine fondamental de G c.-à-d. du groupe de réflexion $(2, 2, 2, \infty)$. L'action du groupe fondamental du tore de Clifton-Pohl s'étend à tout E^u . Un de ses générateurs est un élément parabolique fixant le point à l'infini, l'autre un temps du flot.

Même si on comprend mieux maintenant la géométrie de $E^u(\sin(2x))$ on ne connaît toujours pas d'expression globale de cette métrique et il semble peu probable qu'une telle expression ait une forme raisonnable. Cependant dans [4] (voir page 9), donc bien avant [2], apparaît la métrique (reprise ensuite dans [1]) :

$$\frac{2 d\varphi d\psi}{\cos^2 \varphi \sin^2 \psi + \sin^2 \varphi \cos^2 \psi}$$

que l'on peut voir comme une métrique sur le tore privé de 2 points ou sur \mathbf{R}^2 privé des

relevés de ces points. Ces surfaces lorentziennes sont des quotients de $E^u(\sin(2x))$. En effet, elles sont géodésiquement complètes, analytiques possèdent un champ de Killing (par exemple $K = \sin(2\varphi)\partial_\varphi + \sin(2\psi)\partial_\psi$) et le revêtement universel du tore de Clifton-Pohl se plonge dans chacune d'elles. On consultera [1] pour une preuve de ces affirmations.

D'après le théorème 5.3.4, lorsque l'ensemble des zéros de f est discret, chaque surface $E^u(f)$ possède des plus petits quotients obtenus en quotientant par le plus gros sous-groupe sans torsion de G . On donne dans [2] un tableau décrivant ces surfaces. La surface associée à l'extension du tore de Clifton-Pohl est une bouteille de Klein à 2 trous constituée de 2 carrés qui n'est pas revêtue par la surface donnée ci-dessus.

Exemple 5.3.8. Il est montré dans [2] que Γ le groupe dérivé de G_{gen} agit toujours proprement discontinument sur $E^u(f)$ (c'est en fait une conséquence de la construction de $E^u(f)$ dans le cas général). Si la fonction f s'annule une infinité de fois, on obtient donc une action isométrique de $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{(\mathbf{N})}$ sur $E^u(f)/\Gamma$. De plus, si l'ensemble des zéros de f n'est pas discret alors cette action n'est pas propre (cf. théorème 5.3.7). On peut facilement perturber cette métrique de façon à ce que le groupe d'isométrie soit exactement $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{(\mathbf{N})}$. On obtient donc une surface dont le groupe d'isométrie est de torsion mais n'agit pas proprement ! Cet exemple est d'une certaine façon similaire à une construction faite dans [7]. Il y est construit une suite convergente de métriques (g_n) sur une variété compacte de dimension 3 (des quotients de $\text{SL}(2, \mathbf{R})$ muni de métriques invariantes à gauche) telles que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\text{Is}(g_n) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ mais telle que $\text{Is}(g_\infty) = \{1\}$. La suite des isométries non triviales sort donc de tout compact du groupe des difféomorphismes.

On pourra comparer l'exemple 5.3.8 avec le théorème suivant :

Théorème 5.3.9 (Monclair [46]). *Soit M une surface lorentzienne globalement hyperbolique Cauchy compacte (c'est-à-dire qui admet un plongement conforme dans $(S^1 \times \mathbf{R}, dx^2 - dy^2)$) dont le groupe d'isométrie agit non proprement. Alors $\text{Is}(M)$ est isomorphe à un sous-groupe d'un revêtement fini de $\text{PSL}(2, \mathbf{R})$.*

5.4 Points conjugués

Dans [1], travail en commun avec Ch. Bavard, nous nous sommes intéressés aux surfaces compactes lorentziennes sans points conjugués. Rappelons tout d'abord que deux points p et q sont conjugués le long d'une géodésique γ s'il existe une variation infinitésimale de γ parmi les géodésiques qui laissent fixes p et q . Il s'agit donc des points critiques de la fonction exponentielle. Les fonctions exponentielles des métriques sans points conjugués sont donc des difféomorphismes locaux, comme il n'existe pas de théorème de Hopf-Rinow lorentzien cela ne signifie pas qu'il s'agit de revêtements mais cela suffit à rendre ces métriques particulièrement intéressantes.

Un exemple typique de points conjugués sur une surface riemannienne est donné par les couples de points antipodaux sur la sphère ronde. En effet, quelle que soit la direction par laquelle la géodésique quitte le premier point elle arrive au deuxième. On a donc une vraie variation de géodésiques laissant fixes les deux points. Ce n'est pas toujours le cas, cependant sur les surfaces une version faible de ce résultat est toujours vraie : Piccione et al. ont montré dans [49] que si p et q sont deux points d'une surface conjugués le long de γ alors il existe une suite de géodésiques γ_n issues de p qui coupent γ en q_n et telles que q_n tend vers q . Cela revient à dire que l'application exponentielle n'est pas localement injective au voisinage d'un

point critique. En fait le comportement des points conjugués des variétés lorentziennes ne devient vraiment différent de son analogue riemannien qu'en dimension plus grande. Les points conjugués le long des géodésiques de type espace peuvent alors s'accumuler, [50], et l'indice de Morse des géodésiques peut être infini, voir par exemple [51], [16].

Se donner une variation infinitésimale de γ , c'est se donner un champ de vecteurs le long de γ . Il est bien connu que ce champ de vecteurs correspond à une variation géodésique si ce champ est solution d'une équation différentielle appelée équation de Jacobi définie le long de γ et impliquant la courbure. Lorsque que γ n'est pas de type lumière, on peut supposer ce champ orthogonal à γ , dans le cas d'une surface lorentzienne on a donc une équation scalaire qui s'écrit

$$f'' + \epsilon\kappa f = 0$$

où κ est la courbure exprimée en fonction du paramétrage géodésique de γ et ϵ est le signe de $\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle$. Les points conjugués le long de γ correspondent aux solutions s'annulant deux fois. On montre facilement que si $\epsilon\kappa$ est partout négatif alors il ne peut y avoir de points conjugués le long de γ . Inversement, si $\epsilon\kappa$ est suffisamment positive pendant suffisamment longtemps alors il y a forcément des points conjugués. La courbure positive a donc tendance à produire des points conjugués le long des géodésiques de type espace et la courbure négative le long de celles de type temps. Le seul critère permettant d'affirmer immédiatement qu'une surface lorentzienne est sans points conjugués est donc de la choisir plate.

Lorsque l'on s'intéresse aux surfaces compactes, pour avoir un tableau complet il faut rajouter un ingrédient supplémentaire à savoir le théorème de Gauss-Bonnet, il dit qu'en moyenne la courbure est nulle c'est-à-dire qu'il y a autant de courbure positive que négative. En géométrie riemannienne, on a le résultat suivant, montré par E.Hopf en 1948 pour la dimension 2 [41] et par Burago et Ivanov en 1994 [27] pour la dimension supérieure :

Théorème 5.4.1 (Hopf; Burago, Ivanov). *Un tore riemannien sans points conjugués est plat.*

La preuve de Hopf repose sur le fait que le flot géodésique d'un tore riemannien se restreint à un fibré compact (le fibré unitaire) sur lequel il preserve une forme volume (donnée par la forme de Liouville). Dans le cadre lorentzien les fibrés unitaires ne sont pas compacts mais on pourrait imaginer les remplacer par le fibré projectif tangent. Le flot géodésique induit bien un feuilletage sur ce fibré mais la forme de Liouville ne passe pas au quotient et la dynamique de ce feuilletage n'a aucune raison d'être conservative. Par exemple, la dynamique du flot géodésique projectif du tore de Clifton-Pohl est effectivement loin d'être conservative :

Proposition 5.4.2 (voir [1] et [56]). *Un tore de Clifton-Pohl admet exactement 8 géodésiques fermées (4 de type lumière, 2 de type espace et 2 de type temps) et seulement 4 géodésiques complètes. Les ensembles α -limite et ω -limite d'une géodésique sont toujours distincts et constitués d'une seule géodésique fermée.*

Remarquons aussi que le tore de Clifton-Pohl est invariant par l'application induite par $-\text{id}$, le tore $T_{CP}/\{\pm\text{id}\}$ possède 4 géodésiques fermées ce qui est optimal pour un tore temporellement orientable comme il est montré dans [57].

Il existe cependant un résultat lorentzien allant dans le sens du théorème 5.4.1, Andersson et al. ont démontré dans [20] qu'une déformation à support compact du plan de Minkowski sans points conjugués est plate. L'analogie Riemannien de ce résultat est aussi vrai et peut se voir

comme une conséquence du théorème de Hopf. Nous avons montré qu'en ce qui concerne les tores la situation est très différente :

Théorème 5.4.3 (Bavard, M—. [1]). *Toute composante connexe de l'espace des métriques lorentziennes sur le tore de dimension 2 ou sur la bouteille de Klein contient des métriques sans points conjugués. En particulier, il existe des métriques non plates et sans points conjugués.*

L'essentiel de la preuve du théorème 5.4.3 consiste à montrer que T_{CP} le tore de Clifton-Pohl (ou son revêtement universel) n'a pas de points conjugués. Si γ est une géodésique de type temps de T_{CP} , on sait qu'à deux exceptions près elle sera incomplète. Si on cherche l'expression de la courbure κ le long de γ , on trouve une certaine fonction analytique que l'on note $\tilde{\kappa}$ qui s'étend à tout \mathbf{R} . Lorsque γ est tangente au champ de Killing, la fonction κ s'exprime à l'aide de la fonction P de Weierstrass et l'équation $f'' + \epsilon\tilde{\kappa}f = 0$ à des solutions s'annulant deux fois. Mais cela ne signifie pas que nous soyons en présence de points conjugués de T_{CP} ! On comprend pourquoi si on se rappelle que le revêtement universel du tore de Clifton-Pohl est un ouvert propre de son extension E^u donnée par le théorème 5.3.4. Les solutions de l'équation précédente nous disent l'existence de points conjugués le long du prolongement de γ à E^u . Le théorème 5.4.3 est prouvé en explicitant en terme de fonctions elliptiques de Jacobi les solutions de l'équation de Jacobi. Puis en déterminant le nombre de fois que la courbure s'annule entre deux zéros, ce qui permet de dire qu'ils n'appartiennent jamais tous les deux au revêtement universel de T_{CP} . On voit que la non complétude joue un rôle essentiel. En fait, les seuls tores lorentziens complets et sans points conjugués que l'on connaisse sont plats.

On ne sait pas quelle est la taille de l'espace des tores sans points conjugués. L'ensemble des tores avec points conjugués est ouvert (cela fait probablement parti du folklore mais on pourra regarder [14] proposition 2.1 pour une preuve). Celui-ci est probablement dense. Il est montré dans [2] que tout tore possédant un champ de Killing est dans l'adhérence de cet espace. Nous y montrons aussi qu'un tore muni d'un champ de Killing qui n'a pas de points conjugués « ressemble » à un tore de Clifton-Pohl. Plus précisément, on montre :

Théorème 5.4.4 (Bavard, M—. [1]). *Soit f est périodique et non affine et T un tore modélisé sur $E^u(f)$. Si T est sans points conjugués alors*

1. *l'ensemble des composantes de $\{f \neq 0\}$ est localement fini,*
2. *f est de signe différent sur deux composantes consécutives,*
3. *f' ne change de signe qu'une fois sur chaque composante,*
4. *les feuilletages de lumière de T ne sont composés que de composantes de Reeb, toutes tournées dans le même sens.*

En particulier, T n'est jamais homotope à un tore plat.

Précisons finalement que lorsque l'on étend un tore non plat on trouve toujours des points conjugués.

Proposition 5.4.5. *Si f est périodique et non constante alors la surface $E^u(f)$ possède des points conjugués.*

La même preuve montre qu'une surface $E^u(f)$ possède des points conjugués dès que f s'annule deux fois ou dès que f a deux extrema locaux de même signe. Il semble possible qu'il existe des fonctions f non affines, probablement avec f'' tendant vers 0 suffisamment vite en l'infini, telles que $E^u(f)$ n'a pas de points conjugués.

5.5 Surfaces spatialement Zoll

Les variétés riemanniennes dont toutes les géodésiques sont fermées constituent un sujet d'étude classique de la géométrie riemannienne au moins depuis le début du XX^e siècle avec les travaux de Zoll, Funk et Darboux qui donnèrent notamment la classification des surfaces de révolution ayant toutes leurs géodésiques fermées, ce qu'on appelle maintenant des surfaces de Zoll. Le sujet a été particulièrement actif des années 50 jusqu'à la fin des années 70, on peut citer entre autres les travaux de Bott [25], Samelson [55], Green [36], Guillemin [37]. On pourra consulter le livre [23] publié sous le nom de A. Besse en 1978 qui est consacré au sujet. Il contient notamment les résultats mentionnés plus haut. Le sujet est loin d'être clos à l'heure actuelle, il reste de nombreuses questions ouvertes. Avec S. Suhr nous avons entrepris d'étendre ces résultats au cadre pseudo-riemannien.

Le flot géodésique d'une variété pseudo-riemannienne se coupe naturellement en trois selon les types possibles de géodésiques. Le problème se coupe donc aussi en trois. On dira d'une variété qu'elle est spatialement Zoll, temporellement Zoll ou Zoll-frei selon que toutes ses géodésiques de type espace, temps ou lumière sont toutes fermées simples et de même longueur (du moins pour les deux premiers cas). On peut bien-sûr regarder les métriques qui appartiennent à plusieurs de ces catégories mais à l'heure actuelle aucun exemple n'est connu. On a vu au paragraphe 3.2.2 qu'en dimension 2 ces trois familles sont disjointes et il est fort probable que ce soit toujours le cas.

Chacune de ces familles de métriques à son exemple standard : les espaces de Sitter et anti de Sitter pour les métriques spatialement et temporellement Zoll et les univers d'Einstein (que l'on peut voir comme $S^n \times S^1$ avec la métrique produit) pour le cas Zoll-frei. Pour le cas Zoll-frei, on pourra consulter le livre de V. Guillemin [38] consacré au sujet ainsi que [58] dans lequel S. Suhr donne des exemples de variétés Zoll-frei exotiques, c'est-à-dire non difféomorphes à $S^2 \times S^1$, infirmant une conjecture de Guillemin. Nous allons nous intéresser ici aux surfaces spatialement Zoll et plus particulièrement à celles munies d'un champ de Killing.

On se propose donc de faire le travail analogue à celui de Darboux et Zoll concernant les surfaces de révolutions et d'écrire explicitement les métriques spatialement Zoll possédant un champ de Killing. Le but étant d'une part de s'assurer de l'existence de nombreuses surfaces spatialement Zoll et d'autre part d'avoir un stock d'exemples explicites (certes un peu particuliers) sur lesquels tester d'éventuelles conjectures. La situation est tout de suite plus compliquée, on ne sait même pas a priori quelle est l'allure possible du champ de Killing. Rien que sur l'espace de Sitter il existe trois familles bien distinctes de champ de Killing. De plus il existe des cylindres lorentziens munis de champs de Killing qui n'appartiennent à aucune de ces trois familles. On pourrait résumer les résultats de Darboux et Zoll en disant qu'une métrique de Zoll de révolution est obtenue en déformant la métrique ronde à l'aide d'une fonction impaire, plus précisément :

Théorème 5.5.1 (voir [23]). *Soit (S, g) une surface de révolution. La métrique est Zoll si et seulement si il existe des coordonnées (r, θ) sur S privé des zéros du champ de Killing telles que la métrique s'écrive :*

$$g = (1 + h(\cos(r)))^2 dr^2 + \sin^2(r) d\theta^2,$$

où h est une fonction impaire de $[-1, 1]$ dans $]-1, 1[$ valant 0 en 1.

Grâce à l'observation clef (encore), on construit des familles de déformations spatialement Zoll de dS^2 . Nous n'allons présenter ici qu'une seule de ces familles, la parabolique. La principale

difficulté vient du fait qu'il n'existe pas d'écriture globale de la métrique aussi pratique que dans le cas riemannien. Il faut trouver une façon d'écrire les métriques qui se prête aux calculs. Pour définir cette famille on part de l'atlas donné à l'exemple 5.1.1 et on le déforme :

Définition 5.5.2. Soit (C, g) un cylindre lorentzien muni d'un atlas $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i); i \in \mathbf{Z}/2k\mathbf{Z}\}$ et soit $\Phi_{ij} = \phi_j \circ \phi_i^{-1}$ les changements de cartes de \mathcal{A} .

On dire que \mathcal{A} est un atlas parabolique de (C, g) si :

1. pour tout $i \in \mathbf{Z}/2k\mathbf{Z}$, l'image de ϕ_i est \mathbf{R}^2 ;
- 2.

$$\begin{aligned} \Phi_{2i, 2i+1} : H^+ &\rightarrow H^+ \\ (x, y) &\mapsto \left(-x + \frac{2}{y}, y\right), \\ \Phi_{2i-1, 2i} : H^- &\rightarrow H^- \\ (x, y) &\mapsto \left(-x + \frac{2}{y}, y\right), \end{aligned}$$

où $H^+ = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; y > 0\}$ et $H^- = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; y < 0\}$;

3. pour tout $i \in \{1, \dots, 2k\}$,

$$g_i = \phi_i^{-1*} g = y^2 dx^2 + 2dx dy + f_i(y) dy^2,$$

où f_i est une fonction lisse vérifiant $1 - y^2 f_i(y) > 0$ pour tout $y \in \mathbf{R}$.

Ces atlas donnent un cadre dans lequel il est raisonnable de faire des calculs, notamment le fait que les changements de cartes ne dépendent pas de la métrique est appréciable. On remarquera aussi qu'il suffit de se donner les k fonctions f_{2i} pour les connaître toutes. Nous ne reproduisons pas ces calculs ici, ils sont assez proches de ceux que l'on trouve au chapitre 4 de [23]. Ils consistent principalement à déterminer le chemin parcouru entre deux points de tangence entre une géodésique γ et une trajectoire du champ de Killing. On montre

Théorème 5.5.3 (M—, Suhr [15]). Soit (C, g) un cylindre lorentzien admettant un atlas parabolique $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i); i \in \mathbf{Z}/2k\mathbf{Z}\}$. La surface (C, g) est spatialement Zoll si et seulement si il existe k fonctions lisses $\kappa_0, \dots, \kappa_{k-1} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ telles que

1. $\forall t \in \mathbf{R}, \forall j \in \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}, \kappa_j(t) \geq -1$;
2. toutes les fonctions κ_j ont la même série de Taylor en 0 et vérifient $\kappa_j(0) = \kappa_j'(0) = 0$;
3. la fonction $\sum_j \kappa_j$ est impaire ;
4. pour tout $2i \in \mathbf{Z}/2k\mathbf{Z}$

$$g_{2i} = \phi_{2i}^{-1*} g = y^2 dx^2 + 2dx dy + \frac{1 - (1 + \kappa_i)^2}{y^2} dy^2.$$

On voit une certaine similitude entre cet énoncé et celui du théorème 5.5.1, notamment il est toujours question d'une fonction impaire. Il y a cependant une différence importante liée au fait que l'atlas comporte maintenant plusieurs cartes, les déformations que l'on inflige à la métrique doivent se compenser globalement (ce qui s'exprime par le fait que la somme de κ_i est impaire) et non pas ouvert par ouvert (ce qui serait le cas si on demandait à chaque κ_i d'être impair). Cela permet une plus grande latitude, du moins dans le cas non analytique comme le montre la condition 2 (qui est simplement une condition de lissité du raccordement). En particulier, on obtient

Corollaire 5.5.4. *Il existe des rubans de Möbius à courbure non constante dont toutes les géodésiques de type espace sont fermées.*

Par contre, il est clair qu’aucune des métriques décrites par le théorème 5.5.1 ne passe au quotient sur le plan projectif. Il a été montré par Green [36] en 1963 que la seule métrique Zoll du plan projectif est la métrique ronde. Ce résultat a même été amélioré récemment (2009) par Ch. Pries [53] qui l’a étendu aux métriques ayant toutes leurs géodésiques fermées.

On construit sur le même modèle des atlas elliptiques et hyperboliques. Ce qui permet de donner deux autres familles d’exemples. Noter que dans le cas hyperbolique on ne sait pas, sauf à supposer la métrique analytique, si le critère en terme de fonctions impaires qui apparait est nécessaire. On ne sait pas non plus s’il existe des exemples avec champ de Killing qui n’appartiennent à aucune de ces trois familles. Par contre, en adaptant une construction de Blaschke, on sait recoller entre eux certains exemples de façon à produire des surfaces spatialement Zoll mais sans champ de Killing.

Il existe une famille de propriétés que l’on peut tester avec notre famille d’exemples qui n’a pas d’analogue riemannien. Il s’agit des propriétés conformes. Rappelons d’une part qu’il n’existe qu’une classe conforme riemannienne (modulo isométrie) sur la sphère et d’autre part qu’il n’y a rien de tel pour les cylindres lorentziens, il existe même une infinité de classes conformes non équivalentes sur les cylindres. Il faut en fait préciser ce que l’on entend par conforme. On dira que deux surfaces sont C^k -conformes ($0 \leq k \leq \omega$) s’il existe un difféomorphisme de classe C^k qui permute leurs feuilletages de lumière. On se convainc aisément du fait pour tout k il existe des métriques C^k -conformes mais non C^{k+1} -conformes. On a tout d’abord montré :

Proposition 5.5.5. *Tout cylindre spatialement Zoll est globalement hyperbolique.*

On rappelle qu’une variété est globalement hyperbolique si elle possède une hypersurface de type espace (ici ce sera n’importe quelle géodésique) qui intersecte en un unique point toute courbe causale inextensible. Il s’agit bien d’une propriété conforme. Cela entraîne que le cylindre se plonge conformément dans le cylindre plat ($S^1 \times \mathbf{R}, dx^2 - dy^2$). On montre que son image est bornée et le cylindre est donc muni naturellement d’un bord conforme homéomorphe à 2 cercles. Ce bord contient maintenant toute l’information concernant la classe conforme. Par exemple si on a affaire à un cylindre conforme à un revêtement de dS^2 alors le bord est lisse et de type espace. Lorsque le cylindre est spatialement Zoll et possède un champ de Killing alors ce bord est de type espace et lisse par morceaux. Cela signifie que toute géodésique de type lumière rencontre une unique géodésique de type lumière sur le bord futur et une unique géodésique de type lumière sur le bord passé. On peut jouer ainsi à un jeu de ping-pong contre les bords. De cette façon, on obtient un homéomorphisme allant de l’espace des feuilles du premier feuilletage de type lumière dans l’espace des feuilles du deuxième. Cet homéomorphisme est lui-aussi un invariant conforme de la métrique. L’analyse de ce jeu de ping-pong, ou si on préfère de cet homéomorphisme, nous permet de montrer :

Théorème 5.5.6 (M—, Suhr [15]). *Tout cylindre spatialement Zoll possédant un champ de Killing est C^0 -conforme à un revêtement de dS^2 , mais il existe des cylindres spatialement Zoll possédant un atlas parabolique qui ne sont pas C^2 -conformes à un revêtement de dS^2 .*

La première propriété découle du fait que le ping-pong est toujours périodique. Pour le voir on considère une famille de géodésiques de type espace dont la vitesse initiale tend vers une

direction de type lumière. Cette famille de cercles tend uniformément vers une courbe qui est de type lumière en tout point du cylindre. De plus comme la longueur des géodésiques de type espace est bornée (en fait constante), on montre que la courbe limite ne peut intersecter le bord qu'en un nombre fini de points. La seconde propriété est montrée à partir d'une métrique parabolique explicite en calculant dans des coordonnées l'expression de l'application de réflexion ce qui permet de voir qu'elle n'est pas de classe C^2 . Au voisinage de la première feuille de lumière du champ, cette expression ne dépend que de la donnée de κ_0 et κ_1 . Une fois l'expression obtenue, on trouve facilement κ_0 et κ_1 comme désirés. Enfin la souplesse des conditions données par le théorème 5.5.3 nous dit que pour tout choix de κ_0 et κ_1 on peut trouver $\kappa_2, \dots, \kappa_k$ de sorte que la surface soit Zoll (si $k \geq 3$).

La présence d'un champ de Killing est utilisée à plusieurs reprises dans la preuve du théorème 5.5.6. Il sert essentiellement pour montrer qu'une géodésique de type espace restant « longtemps » proche du bord est « longue », ce qui est incompatible avec l'hypothèse selon laquelle toutes ces courbes sont de même longueur. Mais il est probable que cette propriété soit vraie pour tout cylindre spatialement Zoll et donc que le théorème 5.5.6 soit vrai sans avoir à supposer l'existence d'un champ de Killing.

Bibliographie

- [1] Ch. Bavard, P. Mounoud, *Sur les surfaces lorentziennes compactes sans points conjugués*, Geom. Topol. 17 (2013) no 1, 469–492
- [2] Ch. Bavard, P. Mounoud, *Extensions maximales et classification des tores lorentziens munis d'un champ de Killing*, preprint arXiv :1510.01253, 68 p.
- [3] C. Boubel, P. Mounoud, *Affine transformations and parallel lightlike vector fields on Lorentzian 3-manifolds*, Trans. AMS, à paraître 40 p.
- [4] C. Boubel, P. Mounoud, C. Tarquini, *Lorentzian foliations on 3-manifolds*, Ergodic Theory Dynam. Systems 26 (2006), no. 5, 1339–1362.
- [5] V. Matveev, P. Mounoud *Gallot-Tanno Theorem for closed incomplete pseudo-Riemannian manifolds and applications*, Ann. Global Anal. Geom. 38 (2010), no. 3, 259–271.
- [6] P. Mounoud, *Some topological and metric properties of the space of Lorentzian metrics*, Differential Geom. Appl. 15 (2001) 47–57.
- [7] P. Mounoud, *Some dynamical properties of the space of Lorentzian metrics*, Comment. Math. Helv. 78 (2003), no. 3, 463–485.
- [8] P. Mounoud, *Complétude et flots nul-géodésibles*, Bull. Soc. Math. France 132 (2004), no. 3, 463–475.
- [9] P. Mounoud, *Feuilletages totalement géodésiques, flots riemanniens et variétés de Seifert*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 55 (2005), no. 4, 1411–1438.
- [10] P. Mounoud, *A note on geodesic foliations of the torus*, Geom. Dedicata 126 (2007), 275–282.
- [11] P. Mounoud, *Sur l'espace des configurations d'une araignée*, Osaka J. Math. 48 (2011), no. 1, 149–178.
- [12] P. Mounoud, *On parallel and symmetric 2-tensorfields on cones over pseudo-Riemannian manifolds*, Comm. Anal. Geom. 20 (2012), no. 1, 203–233.
- [13] P. Mounoud, *Metrics without isometries are generic*, Monatshefte für Math. 176 (2015), no. 4, 603–606.
- [14] P. Mounoud, S. Suhr, *Pseudo-Riemannian geodesic foliations by circles*, Math. Z. 274 (2013), no. 1-2, 225–238.
- [15] P. Mounoud, S. Suhr, *Spacelike Zoll surfaces with symmetries*, J. Differential Geom., à paraître 42 p.

- [16] A. Abbondandolo, P. Majer, *A Morse complex for Lorentzian geodesics*, Asian J. Math. 12 (2008), no. 3, 299–319.
- [17] J.F. Adams, *Vector fields on sphere*, Annals of Math.(2) 75 (1962), 603–632
- [18] S. Adams, G. Stuck, *The isometry group of a compact Lorentz manifold*, Invent. Math. 129 (1997), 239–261.
- [19] D.V. Alekseevsky, V. Cortes, A.S. Galaev, T. Leistner, *Cones over pseudo-Riemannian manifolds and their holonomy*, to appear in J. Reine Angew. Math. (Crelle’s journal),
- [20] L. Andersson, M. Dahl, R. Howard, *Boundary and lens rigidity of Lorentzian surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc., 348 (1996), n. 6, 2307–2329.
- [21] A. Aribi, S. Dragomir, A. El Soufi, *On the continuity of the eigenvalues of a sublaplacian* Canad. Math. Bull. 57 (2014), no. 1, 12–24.
- [22] E. Barletta, S. Dragomir, M. Magliaro, *Wave maps from Gödel’s universe*, Classical Quantum Gravity 31 (2014), no. 19, 195001, 52 pp.
- [23] A.L. Besse, *Manifolds all of whose geodesics are closed*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 93. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1978.
- [24] R.A. Blumenthal et J.J. Hebda, *de Rham decomposition theorems for foliated manifolds*. Ann. Inst. Fourier, 33 (1983), no. 2, 183–198.
- [25] R. Bott, *On manifolds all of whose geodesics are closed*, Ann. Math. 60, no 3, pp. 375–382.
- [26] C. Boubel, *On the algebra of the parallel endomorphisms of a germ of pseudo-Riemannian metric*. J. Diff. Geom., vol. 99 issue 1, pp. 77–123.
- [27] D. Burago, S. Ivanov, *Riemannian tori without conjugate points are flat*, Geom. Funct. Anal., 4 (1994), n. 3, 259–269
- [28] Y. Carrière, *Flots riemanniens (Structure transverse des feuilletages, Toulouse 1982)*, Astérisque 116 (1984), 31–52.
- [29] Y. Carrière, E. Ghys, *Feuilletages totalement géodésiques*. An. Acad. Brasil. Ciênc. 53 (1981), no. 3, 427–432.
- [30] Y. Carrière, L. Rozoy, *Complétude des métriques lorentziennes de \mathbf{T}^2 et difféomorphismes du cercle*, Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.), 25 (1994), 19–24.
- [31] A. Davis, F.W. Wilson, *Vector fields tangent to foliations. I : Reeb foliations*, J. Differ. Equations, t. 11 (1972), pp. 491–498
- [32] D. Ebin, *The manifold of Riemannian metrics*, 1970 Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XV, Berkeley, Calif., 1968) pp. 11–40 Amer. Math. Soc., Providence, R.I.
- [33] B. Fayad, A. Katok, A. Windsor, *Mixed spectrum reparameterizations of linear flows on T^2* , Mosc. Math. J. 1 (2001), no. 4, 521–537
- [34] S. Gallot, *Équations différentielles caractéristiques de la sphère*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 4^e série 12(1979) 235–267.
- [35] E. Ghys, *Classification des feuilletages totalement géodésiques de codimension un*, Comment. Math. Helv. 58 (1983), no. 4, 543–572.
- [36] L.W. Green, *Proof of Blaschke’s sphere conjecture*, Bull. Amer. Math. Soc. 67 (1961) 156–158.

- [37] V. Guillemin, *The Radon transform on Zoll surfaces*, Advances in Math. 22 (1976), no. 1, 85–119.
- [38] V. Guillemin, *Cosmology in (2+1)-dimensions, cyclic models, and deformations of $M_{2,1}$* , Annals of Mathematics Studies, 121. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989. vi+228 pp.
- [39] M. Hirsch, *Differential topology*. Graduate Texts in Mathematics, 33. Springer-Verlag, New York, 1994. x+222 pp.
- [40] M. Gutiérrez, F. Palomo, A. Romero, *Lorentzian manifolds with no null conjugate points*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., (2004) 137, n. 2, pp. 363–375.
- [41] E. Hopf, *Closed surfaces without conjugate points*, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 34 (1948), 47–51
- [42] Y.W. Kim, *Semicontinuity of compact group actions on compact differentiable manifolds*, Arch. Math. (Basel) 49 (1987), no. 5, 450–455.
- [43] V. Kiosak, V. S. Matveev, *Complete Einstein metrics are geodesically rigid*, Comm. Math. Phys. 289 (2009), no. 1, 383–400.
- [44] V. Matveev, *Proof of the projective Lichnerowicz-Obata conjecture*, J. Differential Geom. 75 (2007), no. 3, 459–502.
- [45] P. Molino, *Riemannian foliations*, Progress in Mathematics, 73. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1988, xii+339 pp.
- [46] D. Monclair, *Isometries of Lorentz surfaces and convergence groups*, arXiv :1402.7179 (2014), Math. Ann. 363 (2015), no. 1-2, 101–141.
- [47] S.P. Novikov *The topology of foliations*, Trudy Moskov. Mat. Ob., t. 14 (1965), pp. 248–278, AMS Transl. (1967), pp. 286-304.
- [48] F. Palmeira *Open manifolds foliated by planes*, Annals of Math., t. 107 (1978), pp. 109–131.
- [49] P. Piccione, A. Portaluri, D. Tausk, *Spectral flow, Maslov index and bifurcation of semi-Riemannian geodesics*, Ann. Global Anal. Geom. 25 (2004), no. 2, 121–149.
- [50] P. Piccione, D. Tausk, *On the distribution of conjugate points along semi-Riemannian geodesics*, Comm. Anal. Geom. 11 (2003), no. 1, 33–48.
- [51] P. Piccione, D. Tausk, *The Morse index theorem in semi-Riemannian geometry*, Topology, 41 (2002), pp. 1123–1159.
- [52] R. Ponge, H. Reckziegel, *Twisted products in pseudo-Riemannian geometry*, Geom. Dedicata 48(1) (1993), 15–25.
- [53] Ch. Pries, *Geodesics closed on the projective plane*, Geom. Funct. Anal. 18 (2009), no. 5, 1774–1785,
- [54] , B. Reinhart, *Line elements on the torus*, Amer. J. Math. 81 (1959) 617–631
- [55] H. Samelson, *On manifolds with many closed geodesics*, Portugal. Math. 22 1963 193–196.
- [56] M. Sanchez, *Structure of Lorentzian tori with a Killing vector field*, Trans. Amer. Math. Soc., 349(3) :1063–1080, 1997.
- [57] S. Suhr, *Closed geodesics in Lorentzian surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 365 (2013), no. 3, 1469–1486.

- [58] S. Suhr, *A counterexample to Guillemin's Zollfrei conjecture*, J. Topol. Anal. 5 (2013), no. 3, 251–260.
- [59] D. Sullivan, *A counterexample to the periodic orbit conjecture*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 46, 5–14 (1976)
- [60] S. Tanno, *Some differential equations on Riemannian manifolds*, J. Math. Soc. Japan **30**(1978), no. 3, 509–531.
- [61] A.W. Wadsley, *Geodesic foliations by circles*. J. Differ. Geom. 10(4), 541–549 (1975)
- [62] K. Yokumoto *Examples of Lorentzian geodesible foliations of closed three manifolds having Heegard splitting of genus one*, Tohoku Math. J., 56 (2004), 423–443.
- [63] A. Zeghib, *Killing fields in compact Lorentz 3-manifolds*, J. Differential Geom. 43 (1996), no. 4, 859–894.
- [64] A. Zeghib, *Sur les espaces-temps homogènes* The Epstein birthday schrift, 551–576 (electronic), Geom. Topol. Monogr., 1, Geom. Topol. Publ., Coventry, 1998.
- [65] A. Zeghib, *Geodesic foliations in Lorentz 3-manifolds*, Comment. Math. Helv. 74 (1999), 1–21.
- [66] A. Zeghib, *Isometry groups and geodesic foliations of Lorentz manifolds. I. Foundations of Lorentz dynamics*, Geom. Funct. Anal. 9 (1999), no. 4, 775–822.
- [67] A. Zeghib, *Isometry group and geodesic foliations of Lorentz manifolds. Part II : geometry of analytic Lorentz manifold with large isometry groups*, Geom. Func. Anal. Vol 9 (1999), 823–854.
- [68] A. Zeghib, *On discrete projective transformation groups of Riemannian manifolds*, preprint arXiv :1304.6812