

La caractéristique d'Euler-Poincaré

Pour un polyèdre on note :

- S son nombre de sommets
- A son nombre d'arêtes
- F son nombre de faces

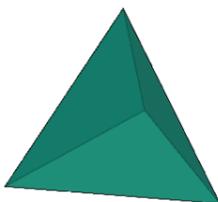
Sa caractéristique d'Euler-Poincaré est le nombre

$$\chi = S - A + F$$

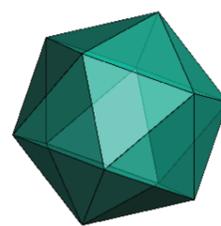
On peut appliquer la même formule à tout patron en faisant attention à compter une seule fois les arêtes et les sommets identifiés !

Tiens ! On obtient toujours le même nombre !

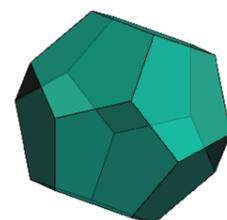
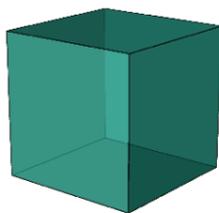
$$\begin{aligned} S &= 4 \\ A &= 6 \\ F &= 4 \end{aligned}$$



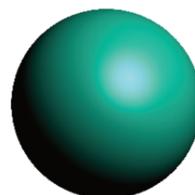
$$\begin{aligned} S &= 12 \\ A &= 30 \\ F &= 20 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} S &= 8 \\ A &= 12 \\ F &= 6 \end{aligned}$$



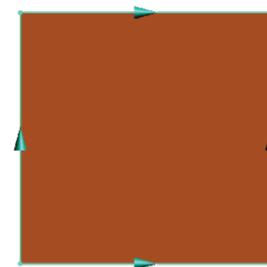
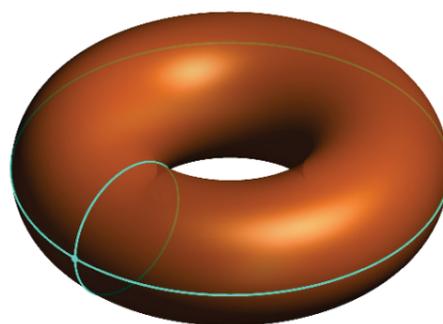
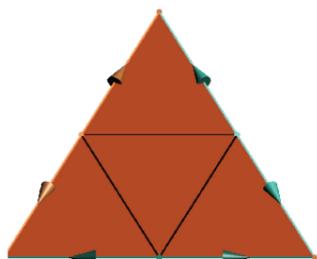
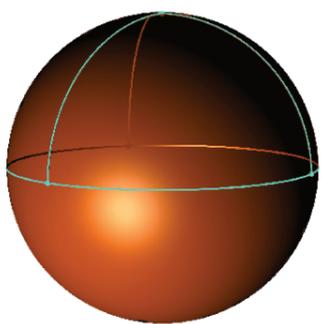
$$\begin{aligned} S &= 20 \\ A &= 30 \\ F &= 12 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} S &= 6 \\ A &= 12 \\ F &= 8 \end{aligned}$$



Pour calculer la caractéristique d'Euler-Poincaré d'une surface on prend un patron qui lui est associé, ce qui est toujours possible, et on applique la formule. Le théorème d'Euler-Poincaré nous dit que ce nombre ne dépend pas du choix du patron. Voilà pourquoi on a obtenu toujours le même nombre pour les polyèdres ci dessus.



$$\chi = 4 - 6 + 4 = 2 \text{ ou } \chi = 1 - 3 + 1 = 2$$

en oubliant les arêtes intérieures.

$$\chi = 1 - 2 + 1 = 0$$

Deux surfaces qui ont des caractéristiques d'Euler-Poincaré différentes ne sont pas les mêmes. Par exemple le patron ci-contre donne $\chi = -2$ et donc ce n'est le patron ni d'une sphère ni d'un tore.

Le patron ci-contre représente une bouée à deux trous.

Plus généralement le nombre de trous d'une bouée est $1 - \frac{\chi}{2}$

