Cours de Géométrie Différentielle M1
2022-2023

Pierre Mounoud

Chapitre 1

Notions de bases sur les variétés

1.1 Qu'est ce qu'une variété ?

Définition 1.1.1. *Une variété topologique de dimension $n \in \mathbb{N}$ est un espace topologique séparé*[1] *localement homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ (ie dont tout point possède un voisinage homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$).*

Remarque 1.1.2. La dimension d'une variété topologique est bien définie. Cela n'a rien d'évident et résulte du théorème d'invariance du domaine de Brouwer.

Définition 1.1.3. *Soient $n \in \mathbb{N}$ et M une variété topologique de dimension n.*

1) *Une carte de M est la donnée d'un couple (U, Φ) où U est un ouvert de M (appelé le domaine de la carte) et Φ est un homéomorphisme de U sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*
2) *Si (U, Φ) et (V, Ψ) sont deux cartes de M telles que $U \cap V \neq \emptyset$, l'application*

$$\Psi \circ \Phi^{-1} : \Phi(U \cap V) \to \Psi(U \cap V)$$

est un homéomorphisme appelé changement de cartes.

3) *Un atlas de classe C^k ($k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$) de M est une famille $(U_i, \Phi_i)_{i \in I}$ (éventuellement infinie) de cartes de M telle que :*

$$\bullet\ M = \bigcup_{i \in I} U_i$$

$\bullet\ \forall (i,j) \in I^2,$ *si* $U_i \cap U_j \neq \emptyset,$ alors $\Phi_\mathrm{i} \circ \Phi_\mathrm{j}^{-1}$ *est un difféomorphisme* $\mathrm{C^k}$,

(on dit que Φ_i et Φ_j sont compatibles à l'ordre k).

Exemples 1.1.4. 1) Ouverts de $\mathbb{R}^n$: Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ alors U est bien entendu une variété topologique, $\mathrm{id} : \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ est une carte de U et $\{(U, \mathrm{id})\}$ est un atlas de classe C^∞ de U. On peut remplacer id par n'importe quel homéomorphisme de U dans $\mathbb{R}^n$. Plus généralement, si $(U_i, \Phi_i)_{i \in I}$ est un atlas de M et si f est un homéomorphisme de M alors $(U_i, f \circ \Phi_i)_{i \in I}$ est un autre atlas de M (on verra plus tard que (heureusement) cela revient plus ou moins au même).

2) Ouverts d'une variété.

1. c'est-à-dire si $x \neq y \in M$ alors il existe V_x et V_y voisinages de x et de y tels que $V_x \cap V_y = \emptyset$. Tout sous-espace de $\mathbb{R}^n$ a cette propriété.

3) Sphères : Soit S^n la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$ ie $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}, x_0^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$ que l'on muni de la topologie induite.
Soit $N = (1, 0, \ldots, 0)$ et $S = (-1, 0, \ldots, 0)$ ses pôles nord et sud. Les parties $U_N = S^n \setminus \{N\}$ et $U_S = S^n \setminus \{S\}$ sont des ouverts de S^n. La projection stéréographique de pôle N (respectivement S) est l'application, notée i_N (resp. i_S), définie sur U_N (resp. U_S) qui a un point x associe l'intersection de la droite passant par N et x (resp. par S et x) avec l'hyperplan $\{x_0 = 0\}$. Un calcul direct (à faire) montre que

$$i_N(x) = \frac{1}{1 - x_0}(x_1, \ldots, x_n) \qquad \text{et} \qquad i_S(x) = \frac{1}{1 + x_0}(x_1, \ldots, x_n).$$

Ces applications sont clairement continues (la restriction d'une application continue à un sous-ensemble muni de la topologie induite est encore continue). Pour voir qu'il s'agit d'homéomorphismes on calcule leurs inverses (il est clair géométriquement qu'elles sont bien bijectives), on vérifie directement que :

$$i_N^{-1}(y) = \frac{1}{1 + \|y\|^2}(\|y\|^2 - 1, 2y_1, \ldots, 2y_n) \quad \text{et} \quad i_S^{-1}(y) = \frac{1}{1 + \|y\|^2}(-\|y\|^2 + 1, 2y_1, \ldots, 2y_n),$$

visiblement les inverses sont aussi continus. On a bien deux cartes de la sphère, l'union de leurs domaines donne bien toute la sphère, il faut vérifier que le changement de carte $i_S \circ i_N^{-1} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est bien lisse [2], il est immédiat que

$$i_S \circ i_N^{-1}(y) = \frac{1}{\|y\|^2}\, y,$$

le changement de carte est bien lisse. On a construit un atlas lisse à 2 cartes sur la sphère.

Définition 1.1.5. *Deux atlas de classe C^k de M sont dits compatibles si leur union est encore un atlas (de classe C^k).*

Proposition 1.1.6. *Tout atlas de classe C^k sur un espace M est contenu dans un unique atlas de classe C^k maximal (pour l'inclusion). Un tel atlas est parfois appelé* structure différentielle de classe C^k *sur M.*

Preuve. Le seul point à montrer : Si $\mathcal{A}$ est un atlas de M alors 2 cartes (V, Ψ) et (V', Ψ') compatibles avec $\mathcal{A}$ sont compatibles entre elles. Soit $(U, \Phi) \in \mathcal{A}$. Si $U \cap V \cap V' \neq \emptyset$, on a sur cet ouvert $\Psi' \circ \Psi^{-1} = (\Psi' \circ \Phi^{-1}) \circ (\Phi \circ \Psi^{-1})$. □

Exemples 1.1.7. Si $U \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert, l'atlas $\{(U, \mathrm{id})\}$ a pour atlas lisse maximal associé l'ensemble de tous les difféomorphismes lisses entre un ouvert de U et un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Ce qui est énorme.

Définition 1.1.8. *On appelle variété différentielle de classe C^k toute variété topologique munie d'une structure différentielle de classe C^k (ie d'un atlas maximal).*

Pour définir une structure différentielle sur une variété topologique, il suffit de se donner un atlas (raisonnable). L'atlas maximal associé est impossible à expliciter.
On a donc montré que les ouverts de $\mathbb{R}^n$ et les sphères sont des variétés lisses.

2. lisse= de classe C^∞

Exemples 1.1.9. 1) Union disjointes de deux variétés de même dimension.

2) Variétés produits : Si M et N sont deux variétés de classe C^k et $(U_i, \Phi_i)_{i\in I}$ et $(V_j, \Psi_j)_{j\in J}$ sont des atlas de M et N respectivement, on vérifie facilement que $(U_i\times V_j, \Phi_i\times\Psi_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est un atlas de classe C^k sur $M\times N$ (muni de la topologie produit).

3) Tores (version 1) : On appelle tore de dimension n le produit $T^n = S^1\times S^1\times\cdots\times S^1$ (n fois) muni de la topologie produit. D'après ce qui précède on sait mettre une structure différentielle lisse sur T^n.

Définition 1.1.10. *Soit M une variété (différentielle de classe C^k) et N une partie de M. On dit que N est une sous-variété (de classe C^k) de dimension d de M si pour tout $x\in N$ il existe une carte (U,Φ) telle que $x\in U$ et $\Phi(U\cap N) = \Phi(U)\cap(\mathbb{R}^d\times\{0\})$.*

Les cartes C^k de $\mathbb{R}^n$ sont les difféomorphismes C^k entre ouverts de $\mathbb{R}^n$. La définiton ci-dessus généralise bien celle vu en L3.

On peut vérifier que N est une sous-variétés de M si pour toute carte (U,Φ), $\Phi(U\cap N)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.

Remarque 1.1.11. Si N est une sous-variété de M alors N est localement fermé dans M (ie pour tout $y\in N$ il existe un ouvert U de M tel que $N\cap U$ est fermé dans U).

Exemples 1.1.12. — La sphère S^2 est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ (à adapter en dimension quelconque). Comme coordonnées qui redresse la sphère on peut prendre les coordonnées sphériques.

Soit $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ définie par $F(t,\theta,\varphi) = e^t(\cos\varphi\cos\theta, \cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi)$. Cette application est lisse son jacobien est

$$\left| e^t \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -\sin\theta\cos\varphi & -\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\varphi\sin\theta & \cos\varphi\cos\theta & -\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix} \right| = e^{3t}\cos\varphi.$$

Sa restriction à $V = \mathbb{R}\times]-\pi,\pi[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ est injective et donc un difféomorphisme sur son image, $\mathbb{R}^3$ privé du demi-plan d'équations $x\le 0$ et $y=0$, que l'on note U. La carte Φ cherchée est l'inverse de $F|_V$. En modifiant V ou F on redresse toute la sphère.

— Si $M\times N$ est une variété produit et $y\in N$, alors $M\times\{y\}$ est une sous-variété de $M\times N$.

— Le graphe d'une application lisse f de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^e$ (redressé par $(x,y)\mapsto(x,y-f(x))$).

Proposition 1.1.13. *Une sous-variété de classe C^k et de dimension d d'une variété M est une variété de classe C^k de dimension d.*

Preuve. Soit $(U_i,\Phi_i)_{i\in I}$ des cartes de M qui redressent N et telles que $\bigcup_{i\in I} U_i\supset N$. On va voir que les $(U_i\cap N, \Phi|_{U_i\cap N}^{\mathbb{R}^d\times\{0\}})_{i\in I}$ forment un atlas de N.

Par définition de la topologie induite les $U_i\cap N$ sont des ouverts de N, les $\Phi_i(U_i\cap V)$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^d$ et les $\Phi|_{U_i\cap N}^{\mathbb{R}^d\times\{0\}}$ restent des homéomorphismes sur leur image.

Les changements de cartes de cet atlas sont des restrictions et corestrictions à des ouverts de $\mathbb{R}^d\times\{0\}$ de changements de cartes de M. Ils sont donc bien C^k. □

Toutes les sous-variétés euclidiennes vues en L3 sont donc des variétés.

Exercice 1.1.14. Montrer que l'atlas de sous-variété de S^2 est compatible avec l'atlas donné par les projections stéréographiques.

De nombreux exemples naturels de variétés sont obtenus comme quotient d'autres variétés. Afin de pouvoir les présenter, rappelons quelques résultats sur la topologie quotient.

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un variété topologique M. On note $M/\mathcal{R}$ l'ensemble de ses classes d'équivalences et on note $p : M \to M/\mathcal{R}$ la projection qui a $x \in M$ associe sa classe d'équivalence. On définit une topologie sur $M/\mathcal{R}$ en disant qu'une partie V de $M/\mathcal{R}$ est ouverte si $p^{-1}(V)$ est un ouvert de M. Cette topologie (est la plus grossière qui) rend p continue. L'application p est de plus ouverte (ie l'image par p d'un ouvert U de M est un ouvert de $M/\mathcal{R}$) si pour tout ouvert U, $p^{-1}(p(U))$ est ouvert. Cela dépend de $\mathcal{R}$.

Lemme 1.1.15. *Soient M et N deux espaces topologiques et $f : M \to N$. Soient $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur M et p la projection canonique de M sur $M/\mathcal{R}$.*
Si pour tous $(x, y) \in M^2$, $x\mathcal{R}y$ implique $f(x) = f(y)$ alors il existe une application $\bar{f} : M/\mathcal{R} \to N$ telle que $\bar{f} \circ p = f$. De plus $\bar{f}$ est continus si et seulement si f l'est.

En général $M/\mathcal{R}$ n'est pas une variété topologique, mais parfois...

Exemples 1.1.16. Des variétés quotients

1) Les tores version 2 : On considère la relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^n$ donnée par $x \sim y$ si et seulement si $x - y \in \mathbb{Z}^n$. On reconnait le groupe quotient de $\mathbb{R}^n$ par $\mathbb{Z}^n$, on note donc le quotient $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ et on le munit de la topologie quotient. Voyons que $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ est une variété topologique homéomorphe à T^n.

   Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $p(U) \subset \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ sa projection. L'ensemble $p^{-1}(p(U))$ est une union de translatés de U (de tous ses translatés par des vecteurs de $\mathbb{Z}^n$), c'est donc un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Par définition de la topologie quotient, on en déduit que $p(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ et donc que l'application p est ouverte.

   Si B est une boule ouverte de rayon $1/4$ alors $p|_B$ est injective et donc $p|_B$ est un homéomorphisme sur son image. On en déduit que tout point du quotient possède un voisinage homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

   Soient x et y dans $\mathbb{R}^n$ tels que $x \not\sim y$. Pour voir que le quotient est séparé il faut trouver V et W des voisinages de x et de y respectivement tels que pour tout $x' \in V$ et tout $y' \in W$, on ait $x' \not\sim y'$. Soient $k \in \mathbb{Z}^n$ tel que $\|x - y + k\| = \inf_{t \in \mathbb{Z}^n} \|x - y + t\|$ (montrer que k existe) et $\delta = \|x - y + k\|$. On prend $V = B(x, \delta/4)$ et $W = B(y, \delta/4)$. S'il existe $x' \in V$ et $y' \in W$ tels que $x' \sim y'$ c'est qu'il existe $h \in \mathbb{Z}^n$ tel que $x' - y' = h$. Or cela entraine que $\|x - y - h\| \leq \|x - h - y'\| + \|y' - y\| \leq \delta/2$. Absurde !

   On a une variété topologique. Soient $x \in \mathbb{R}^n$, $U_x = p(B(x, 1/4))$ et $\Phi_x = (p|_{B(x,1/4)})^{-1}$. Pour tout x, y dans $\mathbb{R}_n$ il est clair que l'homéomorphisme $\Phi_x \circ (\Phi_y)^{-1}$ est localement donné par une translation. Il s'agit donc d'une application lisse. Comme il est clair que $\bigcup_x U_x = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ on a montré que $(U_x, \Phi_x)_{x \in \mathbb{R}^n}$ est un atlas lisse de $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$.

   Comme $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ est séparé, que $p([0, 1]^n) = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, que $[0, 1]^n$ est compact et p est continue, on voit que $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ est compacte. L'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n &\to S^1 \times \cdots \times S^1 \\ [x_1, \ldots, x_n] &\mapsto (e^{i2\pi x_1}, \ldots, e^{i2\pi x^n}) \end{aligned}$$

   est bien définie, continue (propriété topologie quotient) et bijective. Comme $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ est compacte, il s'agit d'un homéomorphisme.

2) Droite à double origine : Sur 2 copies de $\mathbb{R}$ ie sur $\mathbb{R} \times \{0,1\}$ on définit une relation d'équivalence par $(x,a) \sim (y,b)$ si $(x,a) = (y,b)$ ou si $x = y \neq 0$. L'espace quotient, noté D, est obtenu en recollant les 2 droites partout sauf en 0. Cet espace n'est pas séparé : tout voisinage de $p(0,0)$ rencontre tout voisinage de $p(0,1)$. Ce "détail" excepté D ressemble à une variété. Les cartes $(U_i, \Phi_i)_{i \in \{0,1\}}$ avec $U_i = p(\mathbb{R} \times \{i\})$ et $\Phi_i = (p|_{\mathbb{R}\times\{i\}})^{-1}$ forment bien un atlas lisse. L'existence d'un atlas lisse sur un espace topologique M n'implique pas que M est séparé. Si on veut travailler avec des espaces séparés il faut l'imposer en amont.

3) Somme connexe : à partir de 2 variétés de même dimension, on en crée une nouvelle en les reliant par un tube. Plus formellement, on considère M et N deux variétés de dimension n, (U, Φ) une carte de M, (V, Ψ) une carte de N. On peut supposer que 0 appartient à $\Phi(U)$ et $\Psi(V)$. Soit B la boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ de centre 0 et de rayon 1, quitte à modifier nos cartes on peut supposer que $\overline{B} \subset \Phi(U) \cap \Psi(V)$. Soit $\alpha : B \setminus \{0\} \to B \setminus \{0\}$ le difféomorphisme donné par $\alpha(v) = \frac{(1-\|v\|)}{\|v\|} v$. On recolle $M \setminus \{\Phi^{-1}(0)\}$ et $N \setminus \{\Psi^{-1}(0)\}$ via $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence engendrée par $\Phi^{-1}(v) \sim \Psi^{-1}(\alpha(v))$, on note $M\#N$ le résultat obtenu (on ne précise pas où et comment on a recollé car on peut montrer que le résultat n'en dépend pas). On vérifie que $M\#N$ est bien séparé (car on a bien choisi α), que toute carte de $M \setminus \{\Phi^{-1}(0)\}$ ou de $N \setminus \{\Psi^{-1}(0)\}$ peut être vue comme une carte de $M\#N$ et que les cartes provenant de M et celles provenant de N sont bien compatibles (car α est un difféomorphisme).

4) L'espace projectif réel de dimension n, noté $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ (ou $\mathbb{RP}^n$ ou encore $\mathbb{P}^n$ s'il est clair qu'on travaille sur $\mathbb{R}$), est l'espace des droites vectorielles de $\mathbb{R}^{n+1}$. Autrement dit $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}/\mathcal{R}$, avec $\mathcal{R}$ définie par $x \sim y$ s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $x = \lambda y$ (on écrit aussi $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}/\mathbb{R}^*$). Bien-sûr on le munit de la topologie quotient et on remarque qu'une fois encore la projection est une application ouverte (parce que $\mathbb{R}^*$ agit par homéomorphisme).

   Si on se donne 4 points distincts sur la sphère S^n on peut trouver des voisinages 2 à 2 disjoints de ceux-ci (exercice). On en déduit que si on se donne deux droites distinctes d et d' passant par 0 on peut trouver des voisinages coniques disjoints V et V' dans $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ de celles-ci. On voit donc que $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est séparé.

   Pour tout $0 \leq i \leq n$, on pose $V_i = \{x = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, x_i \neq 0\}$ et on définit $\varphi_i : V_i \to \mathbb{R}^n$ en posant

$$\varphi_i(x) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \widehat{\frac{x_i}{x_i}}, \ldots, \frac{x_n}{x_i} \right),$$

   où le signe $\widehat{\ }$ signifie que le terme correspondant est omis. Clairement $\varphi_i(x) = \varphi_i(y)$ si et seulement si $x \sim y$. D'après le lemme 1.1.15 , φ_i passe au quotient en une application bijective et continue $\Phi_i : U_i = p(V_i) \to \mathbb{R}^n$. Il s'agit en fait d'un homéomorphisme vu que $\Phi_i^{-1}(y_0, \ldots, y_{n-1}) = p(y_0, \ldots, y_{i-1}, 1, y_i, \ldots, y_{n-1})$.

   Enfin pour tout $i \neq j$,

$$\begin{aligned} \Phi_i \circ \Phi_j^{-1} : \quad & \Phi_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow \Phi_i(U_i \cap U_j) \\ & (y_0, \ldots, y_{n-1}) \longmapsto \left(\frac{y_0}{y_i}, \ldots, \frac{y_{j-1}}{y_i}, \frac{1}{y_i}, \ldots, \widehat{\frac{y_i}{y_i}}, \ldots, \frac{y_{n-1}}{y_i} \right), \end{aligned}$$

   est clairement lisse, son inverse (obtenu en permutant i et j) aussi. On a bien un atlas lisse !

1.2 Applications différentiables

1.2.1 Définition

Définition 1.2.1. *Soient M et N deux variétés de classe (au moins) C^k et $f : M \to N$ une application continue. On dit que f est de classe C^k si pour tout $a \in M$ il existe une carte (U, Φ) de M avec $a \in U$ et une carte (V, Ψ) de N avec $f(a) \in V$ telle que*

$$\Psi \circ f \circ \Phi^{-1} : \Phi(U \cap f^{-1}(V)) \longrightarrow \Psi(V)$$

est de classe C^k.

L'application $\Psi \circ f \circ \Phi^{-1}$ s'appelle l'application f lue dans les cartes (U, Φ) et (V, Ψ).

Exercice 1.2.2. 1) Montrer que si $f : M \to N$ est de classe C^k alors sa lecture dans n'importe quelle carte (si elle est possible) est de classe C^k.

2) Soit $f : M \to N$ de classe C^k et soit $a \in M$. Montrer que le rang de la jacobienne de $\Psi \circ f \circ \Phi^{-1}$ en $\Phi(a)$ ne dépend ni du choix de Φ ni de celui de Ψ

Remarque 1.2.3. 1) On demande a priori que f soit continue simplement pour être sûr que $U \cap f^{-1}(V)$ est ouvert. Les cartes étant des homéomorphismes il est clair que si $f(U) \subset V$ alors f est continue sur U si et seulement si $\Psi \circ f \circ \Phi^{-1}$ l'est.

2) Si f est à valeur dans $\mathbb{R}$ la carte (V, Ψ) est inutile, tout comme il est inutile de supposer a priori f continue. Une application $f : M \to \mathbb{R}$ est de classe C^k si et seulement si pour toute carte (U, Φ) de M, l'application $f \circ \Phi^{-1}$ est de classe C^k. On en déduit que la somme et le produit de fonctions numériques C^k est C^k.

Exemples 1.2.4. 1) Soit N une sous-variété N de classe C^k de M. L'injection naturelle $i : N \to M$ donnée par l'inclusion est C^k. Par définition de la topologie induite i est continue. Soit (U, Φ) une carte de M qui redresse N. On a vu que $(U \cap N, \Phi|_{U\cap N})$ est une carte de N. La lecture de i dans ces cartes est de la forme $(x_1, \ldots, x_d) \mapsto (x_1, \ldots x_d, 0, \ldots, 0)$, l'application i est bien C^k.

2) La projection de $M \times N$ sur M est C^k.

3) L'application $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ est lisse. En effet, dans l'atlas construit plus haut p se lit comme l'identité.

4) L'application $p : \mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est lisse. En effet, si (U_i, Φ_i) est une des cartes données plus haut, on voit que $\Phi_i \circ p = \varphi_i$ par définition de Φ_i.

Proposition 1.2.5. *Toute composition d'applications de classe C^k est de classe C^k.*

Preuve. La lecture de la composée est la composée des lectures. □

Proposition 1.2.6. *Soit $f : M \to N$ une application C^k entre variétés. Soit S une sous-variété C^k de M et T une sous variété de N. Si $f(S) \subset T$ alors $f\big|_S^T : S \to T$ est C^k.*

Preuve. La restriction de f à S est simplement la composition de l'inclusion avec f, elle reste donc C^k.

La corestriction à T est C^k. Soient $a \in S$, (V, Ψ) une carte de N telle que $f(a) \in V$ et qui redresse T (ie $\Psi(V \cap T) = \Psi(V) \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})$ et (U, Φ) une carte de S telle que $a \in U$ et $f\big|_S(U) \subset V$). L'application $\Psi \circ f|_S \circ \Phi^{-1}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^d \times \{0\}$, sa corestriction à $\mathbb{R}^d \times \{0\}$ est encore C^k. Comme $\Psi\big|_{V\cap T}^{\mathbb{R}^d\times\{0\}}$ est une carte de T on en déduit que $f\big|_S^T$ est C^k sur U et donc partout. □

Définition 1.2.7. *Une application bijective $f : M \to N$ est un difféomorphisme C^k si f et f^{-1} sont de classe C^k.*

Exercice 1.2.8. Montrer que $M \times \{y\} \subset M \times N$ est difféomorphe à M.

1.2.2 Applications de rang maximal

Comme toujours $k \geq 1$.

Définition 1.2.9. *1) Soient $U \subset \mathbb{R}^p$ et $V \subset \mathbb{R}^q$ deux ouverts et $f : U \to V$ une application C^k.*

(a) Si pour tout $x \in U$, $d_x f$ est injective on dit que f est une immersion.

(b) Si pour tout $x \in U$, $d_x f$ est surjective on dit que f est une submersion.

2) Soit $f : M \to N$ une application C^k entre variétés.

(a) On dit que f est une immersion, si pour tout $x \in M$, il existe des cartes locales en x et en $f(x)$ telles que l'application f lue dans ces cartes soit une immersion.

(b) On dit que f est une submersion, si pour tout $x \in M$, il existe des cartes locales en x et en $f(x)$ telles que l'application f lue dans ces cartes soit une submersion.

(c) On dit que f est un difféomorphisme local, si pour tout $x \in M$, il existe des cartes locales en x et en $f(x)$ telles que l'application f lue dans ces cartes soit un difféomorphisme.

Remarque 1.2.10. Si f est de classe C^1 les propriétés $d_x f$ est injective et $d_x f$ est surjective sont ouvertes.

L'exercice 1.2.2 nous dit que la lecture d'une submersion (resp immersion) dans des cartes est toujours une submersion (resp immersion).

Proposition 1.2.11. *La composition de 2 immersions (resp submersions) est une immersion (resp. submersion).*

Exemples 1.2.12. – L'injection d'une sous-variété dans sa variété ambiante est une immersion.
– La projection $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}^n$ est un difféomorphisme local.
– La projection $p : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est une submersion.

Exercice 1.2.13. Montrer qu'un difféomorphisme local bijectif est un difféomorphisme. En déduire que $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est difféomorphe à S^1.

Théorème 1.2.14. *Soient M, N deux variétés de classe C^k de dimensions p, q, soit a un point de M et $f : M \to N$ une application de classe C^k.*

1) (Forme normale locale des immersions) Si f est une immersion, alors pour toute carte locale (U, Φ) en a telle que $\Phi(a) = 0$, il existe une carte locale (V, Ψ) en $f(a)$ avec $\Psi(f(a)) = 0$ telle que, au voisinage de 0, on ait

$$\Psi \circ f \circ \Phi^{-1}(x_1, \ldots, x_p) = (x_1, \ldots, x_p, 0, \ldots, 0).$$

2) (Forme normale locale des submersions) Si f est une submersion, alors pour toute carte locale (V, Ψ) en $f(a)$ telle que $\Psi(f(a)) = 0$, il existe une carte locale (U, Φ) en a avec $\Phi(a) = 0$, telle que, au voisinage de 0, on ait

$$\Psi \circ f \circ \Phi^{-1}(x_1, \ldots, x_p) = (x_1, \ldots, x_q).$$

Preuve. 1)
Soit Ψ_0 une carte en $f(a)$ telle que $\Psi_0(f(a)) = 0$. L'application $d_0(\Psi_0 \circ f \circ \Phi^{-1})$ est une application linéaire injective de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$. Le théorème du rang nous dit que $p \leq q$.

La jacobienne de $\Psi_0 \circ f \circ \Phi^{-1}$ au point a possède d lignes linéairement indépendantes, quitte à permuter les coordonnées de l'espace d'arrivée $\mathbb{R}^q$ (ce qui revient à composer à gauche la carte Ψ_0 par un premier difféomorphisme), on peut supposer que ce sont les d premières. Autrement dit on peut supposer

$$J_0(\Psi_0 \circ f \circ \Phi^{-1}) = \begin{pmatrix} A \\ * \end{pmatrix}$$

avec A inversible.

On définit alors $g : \Phi(U) \times \mathbb{R}^{q-p} \to \mathbb{R}^q \simeq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{q-p}$ par

$$g(x, y) = \Psi_0 \circ f \circ \Phi^{-1}(x) + (0, y).$$

Cette fonction est C^k avec $k \geq 1$ et sa jacobienne en 0 est de la forme

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ * & I \end{pmatrix},$$

elle est donc inversible. On peut donc appliquer le théorème d'inversion locale. Il existe donc un voisinage W de 0 dans $\mathbb{R}^q$ tel que la restriction de g à W est un difféomorphisme C^k sur $g(W)$. On pose $\Psi = (g|_W)^{-1} \circ \Psi_0$ (et donc $V = \Psi_0^{-1}(g(W))$). Pour tout $x \in \mathbb{R}^q$ proche de 0, $(x, 0) \in W$ et donc $\Psi \circ f \circ \Phi^{-1}(x) = (g|_W)^{-1} \circ g\,(x, 0) = (x, 0)$.

2)
On se donne une carte (U_0, Φ_0) en a telle que $\Phi_0(a) = 0$. L'application $d_0(\Psi \circ f \circ \Phi_0^{-1})$ est une application linéaire surjective de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$. Le théorème du rang nous dit que $q \leq p$.

Par hypothèse, la jacobienne de $\Psi_0 \circ f \circ \Phi^{-1}$ au point 0 est de rang q. Permuter les coordonnées de $\mathbb{R}^p$ (au départ donc), revient à permuter les colonnes de $J_0(\Psi_0 \circ f \circ \Phi^{-1})$. On peut supposer que les q premières colonnes engendrent $\mathbb{R}^q$ ie

$$J_0(\Psi \circ f \circ \Phi_0^{-1}) = \begin{pmatrix} B & * \end{pmatrix}$$

avec B inversible.

On définit alors $g : \Phi_0(U_0) \to \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{p-q}$ par $g(u) = (\Psi \circ f \circ \Phi_0^{-1}(u), u_{q+1}, \ldots, u_p)$.
Cette fonction est C^k avec $k \geq 1$ et sa jacobienne en 0 est de la forme

$$\begin{pmatrix} B & * \\ 0 & \mathrm{I} \end{pmatrix},$$

elle est donc inversible. On peut donc appliquer le théorème d'inversion locale. Il existe ainsi un voisinage $V \subset \Phi_0(U_0)$ de 0 tel que la restriction de g à V est un difféomorphisme lisse sur $W = g(V)$. On pose $\Phi = (g|_V) \circ \Phi_0$ (et donc $U = \Phi_0^{-1}(V)$). Pour tout $x \in W$, $\Psi \circ f \circ \Phi^{-1}(x) = \Psi \circ f \circ \Phi_0^{-1} \circ g|_V^{-1}(x) = (x_1, \ldots, x_q)$, vu que $\Psi \circ f \circ \Phi_0^{-1} = pr_1 \circ g$. $\square$

Remarque 1.2.15. Une immersion C^k a un inverse local à gauche, en particulier elle est localement injective.
Une submersion C^k a un inverse local à droite, en particulier elle est ouverte ("localement surjective").

Corollaire 1.2.16. *Soient M et N des variétés C^k de dimensions p et q. Soit $f : M \to N$ une submersion C^k. Si $S \subset N$ est une sous-variété C^k de dimension d contenue dans $f(M)$ (typiquement $S = \{y\}$ un singleton) alors $f^{-1}(S)$ est une sous-variété C^k de dimension $p - q + d$.*

Preuve. Le problème est local. Soient $a \in f^{-1}(S)$, $b = f(a) \in S$ et (V, Ψ) une carte en b qui redresse S. D'après le théorème 1.2.14, il existe une carte (U, Φ) en a telle que $\Psi \circ f \circ \Phi^{-1}(x_1, \dots, x_p) = (x_1, \dots, x_q)$. On voit que $\Phi(U \cap f^{-1}(S)) = (\Psi \circ f \circ \Phi^{-1})^{-1}(\Psi(V \cap S)) = (\Psi \circ f \circ \Phi^{-1})^{-1}(\Psi(V) \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})) = \Phi(U) \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\} \times \mathbb{R}^{p-q})$. □

On remarque qu'il suffit que f soit une submersion sur un voisinage de $f^{-1}(S)$ pour que la preuve fonctionne.

Exemples 1.2.17. — Quadriques : $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \mid \|x\|^2 - \|y\|^2 = 1\}$ est une sous-variété (lisse) de $\mathbb{R}^{p+q}$.
— Groupes classiques (voir TD) : les groupes $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$, etc. sont des sous-variétes de $\mathrm{End}(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$.

Il est immédiat de remarquer que :

Corollaire 1.2.18. *Si $f : M \to N$ une immersion C^k alors pour tout $x \in M$, il existe un voisinage U de x tel que $f(U)$ soit une sous-variété.*

Par contre, $f(M)$ n'est pas toujours une sous-variété, même si f est injective.

Exemples 1.2.19. — Le Folium : Soit $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}^2$ définie par par $f(t) = (\frac{t}{1+t^3}, \frac{t^2}{1+t^3})$. L'image de f munie de la topologie induite n'est localement homéomorphe à $\mathbb{R}$ (tout voisinage épointé de 0 suffisamment petit a 3 composantes connexes).
— Droites de Kronecker. Soit $\mathbb{R} \to T^2$ définie par $f(t) = p(t, \alpha t)$ avec α irrationnel. C'est une immersion injective lisse dont l'image est dense et donc non localement fermée.

Définition 1.2.20. *Soit $f : M \to N$ une application C^k. On dit que f est un plongement si f est une immersion et un homéomorphisme sur son image.*

Proposition 1.2.21. *Soit $f : M \to N$ de classe C^k. L'application f est un plongement si et seulement si*

1) $f(M)$ est une sous-variété C^k,

2) $f : M \to f(M)$ est un difféomorphisme C^k.

Preuve. Si f est un plongement, c'est en particulier une immersion qu'on peut mettre sous forme normale. Ainsi pour tout $a \in M$ il existe une carte (U, Φ) en a, une carte (V, Ψ) en $f(a)$ telles que $\Psi \circ f \circ \Phi^{-1}(x) = (x, 0)$. De plus, f est un homéomorphisme sur son image, donc $f(U)$ est un ouvert de $f(M)$ contenu dans V. Il existe donc (par définition de la topologie induite) un ouvert $V' \subset V$ tel que $f(U) = V' \cap f(M)$. En restreignant Ψ à V' on obtient bien une carte qui redresse $f(M)$ au voisinage de $f(a)$.

L'application f corestreinte à $f(M)$ se lit dans l'atlas ainsi obtenu comme l'identité. C'est donc un difféomorphisme local bijectif donc un difféomorphisme.

Réciproquement, comme l'inclusion de $f(M)$ dans N est une immersion, f est bien une immersion en tant que composée d'immersions. Un difféo étant un homéo l'autre condition est aussi vérifiée. □

Proposition 1.2.22. *Soit $f : M \to N$ une immersion C^k. Si f est injective et M est compacte alors f est un plongement.*

Preuve. Une bijection continue d'un compact dans un espace séparé est un homéomorphisme. □

1.3 Espaces tangents

Le but de cette section est de définir la différentielle des applications différentiables. On commence par définir l'espace tangent en un point m à une variété M.

1.3.1 En un point

On note $\mathcal{C}_m^M$ l'ensemble des courbes C^k $(k \geq 1)$ $c : I \to M$ où I est un intervalle ouvert contenant 0 et $c(0) = m$.

Définition 1.3.1. *Deux courbes $c_1 : I_1 \to M$ et $c_2 : I_2 \to M$ de C_m^M sont dites tangentes en m si $c_1(0) = c_2(0) = m$ et s'il existe une carte (U, Φ) en m telle que*

$$(\Phi \circ c_1)'(0) = (\Phi \circ c_2)'(0).$$

Deux remarques :
– à nouveau la condition donnée ne dépend pas du choix de la carte;
– si M est une sous-variété euclidienne, alors la condition revient à $c_1'(0) = c_2'(0)$.

Définition 1.3.2. *Un vecteur tangent en m est une classe d'équivalence de la relation définie ci-dessus. On note T_mM l'ensemble des vecteurs tangents en m à M.*

À toute carte (U, Φ) en m, on associe une bijection θ_Φ de T_mM dans $\mathbb{R}^n$ en posant

$$\theta_\Phi(\xi) = (\Phi \circ c)'(0),$$

où $\xi \in T_mM$ et $c \in \mathcal{C}_m^M$ est un représentant de ξ. Pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, $\theta_\Phi^{-1}(v)$ est la classe de la courbe $c_v : t \mapsto \Phi^{-1}(tv)$.

Si (V, ψ) est une autre carte en m, alors pour tout $v \in \mathbb{R}^n$

$$(\theta_\Psi \circ \theta_\Phi^{-1})(v) = (\Psi \circ c_v)'(0) = d_{\Phi(m)}(\Psi \circ \Phi^{-1})(\Phi \circ c_v)'(0) = d_{\Phi(m)}(\Psi \circ \Phi^{-1})(v).$$

Ainsi $\theta_\Psi \circ \theta_\Phi^{-1}$ est un isomorphisme d'espace vectoriel. Par conséquent la structure d'espace vectoriel définie par

$$\xi + \eta = \theta_\Phi^{-1}(\theta_\Phi(\xi) + \theta_\Phi(\eta)) \quad \text{et} \quad \lambda\xi = \theta_\Phi^{-1}(\lambda\theta_\Phi(\xi)),$$

ne dépend pas du choix de Φ.

Définition 1.3.3. *L'espace vectoriel tangent en m à M, noté (encore) T_mM est l'ensemble des vecteurs tangents en m muni de la structure d'espace vectoriel donnée ci-dessus.*

Pour définir la différentielle d'une application C^k, on remarque que si $f : M \to N$ est une application C^k alors si $c_1, c_2 \in \mathcal{C}_mM$ sont tangentes en m implique $f \circ c_1, f \circ c_2 \in \mathcal{C}_{f(m)}^N$ sont tangentes en $f(m)$. En effet, soit (U, Φ) une carte en m et (V, Ψ) une carte en $f(m)$ alors

$$(\Psi \circ (f \circ c_i))'(0) = d_{\Phi(m)}(\Psi \circ f \circ \Phi^{-1}) \circ (\Phi \circ c_i)'(0).$$

Définition 1.3.4. *Soit $f : M \to N$ une application C^k. L'application linéaire tangente (ou différentielle) de f en m, notée T_mf (ou d_mf), est l'application de T_mM dans $T_{f(m)}N$ définie par $T_mf([c]) = [f \circ c]$, où $c \in C_m^M$ et $[c]$ désigne la classe d'équivalence de c.*

On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} T_mM & \xrightarrow{T_mf} & T_{f(m)}N \\ {\scriptstyle\theta_\Phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\theta_\Psi} \\ \mathbb{R}^d & \xrightarrow{d_{\Phi(m)}(\Psi\circ f\circ\Phi^{-1})} & \mathbb{R}^q \end{array}$$

qui permet aussi de voir que T_mf est bien linéaire et que son rang est égal à celui de $d_{\Phi(m)}(\Psi \circ f \circ \Phi^{-1})$.
On pourrait définir les immersions et les submersions C^k comme étant les applications C^k dont les applications linéaires tangentes sont de rang maximal.

Proposition 1.3.5. $T_m(f \circ g) = T_{g(m)}f \circ T_mf$.

1.3.2 Le fibré tangent

Si M est une variété C^k de dimension n, on peut mettre une structure de variété C^{k-1} sur $TM := \bigcup_{m\in M} T_mM$. Même si a priori il n'y a pas de topologie sur TM.

Si $\xi \in TM$ il existe $m \in M$ tel que $\xi \in T_mM$, on note $p(\xi)$ ce point. Ce faisant on définit une application p de TM dans M.

Soit (U, Φ) est une carte de M. On note $TU = \bigcup_{m\in U} T_mM$, on peut définir la bijection

$$\begin{array}{rccc} \Theta_\Phi : & TU & \to & U \times \mathbb{R}^n \\ & \xi & \mapsto & (\Phi(p(\xi)), \theta_\Phi(\xi)). \end{array}$$

À un atlas $(U_i, \Phi_i)_{i\in I}$ de M, on associe la famille $(TU_i, \Theta_{\Phi_i})_{i\in I}$. On aimerait que cette famille soit un atlas de TM. On commence par définir une topologie sur TM en posant : Une partie $A \subset TM$ est un ouvert si et seulement si pour tout $i \in I, \Theta_{\Phi_i}(A\cap TU_i)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ (vérifier qu'il s'agit bien d'une topologie). On voit que

1) les TU_i sont des ouverts de TM, vu que pour tout $(i, j) \in I^2, \Theta_{\Phi_j}(TU_i\cap TU_j) = U_i\cap U_j \times \mathbb{R}^n$.
2) les applications Θ_{Φ_i} sont des homéomorphismes. Elles sont évidemment ouvertes. Elles sont continues vu que les $\Theta_{\Phi_i} \circ \Theta_{\Phi_j}^{-1}$ sont des homéomorphismes :

$$\begin{array}{rrcl} \Theta_{\Phi_i} \circ \Theta_{\Phi_j}^{-1} : & \Phi_j(U \cap U_j) \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \Phi_j(U \cap U_j) \times \mathbb{R}^n \\ & (x, v) & \longmapsto & (\Phi_i \circ \Phi_j^{-1})(x), d_x(\Phi_i \circ \Phi_j^{-1})(v)), \end{array}$$

Cette topologie est séparée et les changements de cartes de classe C^{k-1}. On a donc bien muni TM d'une structure de variété C^{k-1} et de dimension $2\dim(M)$.

Exemples 1.3.6. Bien sûr $T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Proposition 1.3.7. *L'application $p : TM \to M$ est une submersion C^{k-1}.*

Proposition 1.3.8. *Si $f : M \to N$ est une application C^k, alors $Tf : TM \to TN$ définie par $(m, \xi) \mapsto T_mf(\xi)$ (plus rigoureusement $\xi \mapsto T_{p(\xi)}f(\xi)$) est une application de classe C^{k-1}.*

Preuve. La lecture de Tf dans des cartes $(TU_i, \Theta_{\Phi_i}), (TU_j, \Theta_{\Phi_j})$ est

$$(x, v) \mapsto (\Phi_i \circ f \circ \Phi_j^{-1}(x), d_x(\Phi_i \circ f \circ \Phi_j^{-1})(v)).$$

□

Proposition 1.3.9. *$T(g \circ f) = Tg \circ Tf$.*

Exercice 1.3.10. Soit $f : M \to N$ un plongement lisse.

1) Montrer que Tf est une immersion injective lisse.
2) Soit $U \subset M$ un ouvert sur lequel f peut être mis sous forme normale. Montrer que la restriction de Tf à TU se met aussi sous forme normale.
3) Montrer que $Tf(TU)$ est un ouvert de $Tf(TM)$.
4) Déduire des questions précédentes que Tf est un plongement.
5) En déduire que si M est une sous-variété de $\mathbb{R}^p$ alors $TM \simeq \{(x,v) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \,|\, x \in M, v \in T_xM\}$ où T_xM est l'espace tangent défini dans le cours de licence ($v \in T_xM$ s'il existe $c : I \to M$ tel que $c(0) = x$ et $c'(0) = v$).
   En particulier $\boxed{TS^n \simeq \{(x,v) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} | \, x \in S^n, v \perp x\}.}$

1.4 Théorème de plongement

Pour alléger la présentation, on suppose tous les objets lisses. Le lecteur peut remplacer partout lisse par C^k avec $k \geq 1$.

Définition 1.4.1. *Une fonction plateau sur une variété est une fonction lisse à valeurs dans $[0,1]$ pour laquelle il existe deux ouverts relativement compacts U et V, avec $\overline{U} \subset V$ tels que*

$$\operatorname{supp} f \subset V \quad \text{et} \quad f|_U \equiv 1.$$

Dessin d'un Boa qui a mangé un éléphant à mettre ici.

Exercice 1.4.2. Montrer que pour tous $0 < a < b$ la fonction $f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_{a,b}(t) = \begin{cases} \left(1 + e^{\frac{2t-(a+b)}{(b-t)(t-a)}}\right)^{-1} & \text{si} \quad a < t < b \\ 1 & \text{si} \quad t \leq a \\ 0 & \text{si} \quad t \geq b. \end{cases}$$

est lisse (on pourra utiliser $\lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t^n} e^{-t} = 0$). En déduire que la fonction sur $\mathbb{R}^n$ définie par $x \mapsto f_{a,b}(\|x\|^2)$ est une fonction plateau.

Proposition 1.4.3. *1) Soit U un ouvert d'une variété M. Alors pour tout $a \in U$ il existe un ouvert relativement compact V contenant a et tel que $\overline{V} \subset U$ et une fonction plateau valant 1 sur V et à support dans U.*

2) Si K est un compact de M et si U est un ouvert contenant K, il existe une fonction plateau à support dans U et valant 1 sur K.

Preuve. 1) Soit (U, Φ) une carte en a telle que $\Phi(a) = 0$. Soient $0 < r_1 < r_2$ tels que $B(0, r_2) \subset \Phi(U)$. Il existe une fonction plateau g sur $\mathbb{R}^n$ valant 1 sur $B(0, r_1)$ et dont le support est contenu dans $B(0, r_2)$ (cf exo 1.4.2). La fonction f définie $f(x) = g(\Phi(x))$ si $x \in U$ et $f(x) = 0$ si $x \neq U$ vérifie ce qu'on veut.

2) Pour tout $x \in K$ on peut trouver une fonction plateau f_x à support dans U et valant 1 sur un voisinage ouvert W_x de x tel que $\overline{W}_x \subset U$. Comme K est compact, il existe $x_1, \ldots, x_l$ tels que $\bigcup_{1 \leq i \leq l} W_{x_i} \supset K$. La fonction

$$g = 1 - \prod_{1 \leq i \leq n} (1 - f_{x_i})$$

fait le job. □

Lemme 1.4.4. *Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert fini d'une variété compacte M. Il existe alors un recouvrement ouvert fini $(V_i)_{i\in I}$ tel que $\overline{V_i} \subset U_i$.*

Preuve. Soit $x \in M$, il existe un ouvert W_x contenant x et un indice $i(x)$ tel que $\overline{W_x} \subset U_{i(x)}$. On extrait un sous recouvrement fini $(W_{x_k})_k$ et finalement on pose

$$V_i = (\cup W_{x_k})_{i(x_k)=i}.$$

□

Théorème 1.4.5. *Toute variété compacte M se plonge dans un espace vectoriel.*

Preuve. Soit $(U_i, \Phi_i)_{1\leq i\leq N}$ un atlas fini de M. Soit $(V_i)_i$ un recouvrement tel que $\overline{V}_i \subset U_i$ pour tout i et soit f_i une fonction plateau valant 1 sur V_i et à support dans U_i.

On note $f_i\Phi_i$ l'application de M dans $\mathbb{R}^n$ ($n = \dim M$) définie par $f_i\Phi_i(x) = f_i(x)\Phi_i(x)$ si $x \in U_i$ et $f_i\Phi_i(x) = 0$ sinon. Cette application est lisse !

Soit $F : M \to \mathbb{R}^{(n+1)N}$ l'application lisse définie par

$$F(x) = (f_1\Phi_1, \dots, f_N\Phi_N, f_1, \dots, f_N).$$

Soit $1 \leq i \leq N$. Pour tout $x \in V_i$, $F \circ \Phi_i^{-1}(x) = (\dots, x, \dots)$ donc, comme les V_i recouvrent M, F est une immersion.

L'application F est injective. Si $F(x) = F(y)$ il existe i tel que $x \in V_i$, on a alors $f_i(x) = f_i(y) = 1$, $\Phi_i(x) = \Phi_i(y)$ et donc $x = y$.

Comme M est compacte F est un plongement. □

Exercice 1.4.6. Montrer que l'application $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ donnée par

$$F(x,y) = ((2+\cos x)\cos y, (2+\cos x)\sin y, \sin x)$$

induit un plongement de $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.

Pour un plongement de $\mathbb{P}^2$ dans $\mathbb{R}^4$ voir l'exercice 13 du chapitre 2 de [Lafontaine].

Chapitre 2

Fibrations et champs de vecteurs

Dorénavant, sauf mention contraire, tous les objets seront supposés lisses.

2.1 Fibrations

2.1.1 Le cas général

Définition 2.1.1. *Une fibration (lisse) (E, p, B, F) est la donnée d'une application (lisse) $p : E \to B$ entre variétés et d'une variété F telles que pour tout $x \in E$ il existe un ouvert $U \ni x$ et un difféomorphisme $\Phi : p^{-1}(U) \to U \times F$ vérifiant $p = \Phi \circ pr_1$ (où $pr_1 : U \times F \to U$ est la projection sur le 1er facteur).*

Si (E, p, B, F) est une fibration, E s'appelle l'espace total, p la projection, B la base et F la fibre. Pour tout $b \in B$ on appelle $p^{-1}(b)$ la fibre au dessus de b, l'application Φ ci-dessus induit un difféomorphisme entre $p^{-1}(b)$ et F.
L'application p est clairement une submersion (elle s'écrit localement comme une composée de submersions).
S'il n'y a pas d'ambiguïté on parle souvent du fibré E plutôt que de la fibration (E, p, B, F).

Exemples 2.1.2. – La projection $pr_1 : E = B \times F \to B$ donne bien-sûr une fibration. C'est la fibration triviale de base B et de fibre F.
– La projection $p : TM \to M$ (cf. chap 1) donne par construction même de la structure de variété de TM une fibration de fibre $\mathbb{R}^{\dim M}$.
– Le ruban de Möbius comme fibration non triviale.

Définition 2.1.3. *Soient E_1 et E_2 deux fibrations de même base et de même fibre. Un isomorphisme (de fibré) entre E_1 et E_2 est la donnée d'un difféomorphisme $f : E_1 \to E_2$ qui envoie fibre sur fibre ie tel que $p_2 \circ f = p_1$.*

Une fibration isomorphe à un fibré trivial est dit trivialisable. Par définition tout fibration est localement isomorphe au fibré trivial (certains auteurs disent "fibré localement trivial" pour fibration) et le difféomorphisme Φ de 2.1.1 est appelé une trivialisation locale de la fibration.

Exemples 2.1.4. La fibration de Hopf
Il s'agit d'un fibration d'espace total S^3 de base S^2 et de fibre S^1 (ceux qui ont fait un peu de topologie algébrique savent que le groupe fondamental de S^3 est trivial et celui de $S^2 \times S^1$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$, ce fibré n'est donc pas trivialisable).

La projection $h : S^3 \to S^2$ est donnée par $h(u,v) = (2u\bar{v}, |u|^2 - |v|^2)$ (on voit S^3 dans $\mathbb{C}^2$ et S^2 dans $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$). On compose h avec la projection stéréographique de centre $N = (0,1)$ et celle de centre $S = (0,-1)$:

$$\text{Si } v \neq 0, i_N \circ h(u,v) = \frac{u}{v} \qquad \text{et} \qquad i_S \circ h(u,v) = \frac{\bar{v}}{\bar{u}}.$$

Ainsi, si $v \neq 0$, $h(u,v)$ ne dépend que du rapport $\frac{u}{v}$ et donc $h(u,v) = h(\frac{1}{\sqrt{1+|\frac{u}{v}|^2}}(\frac{u}{v},1))$. Une trivialisation locale au-dessus de $U_N = S^2 \setminus \{N\}$ est donnée par

$$\begin{aligned} \Psi_N : p^{-1}(U_N) = S^3 \setminus \{(u,v) \in S^3 \,|\, v = 0\} &\longrightarrow U_N \times S^1 \\ (u,v) &\longmapsto \left(h(u,v), v\sqrt{\left|\frac{u}{v}\right|^2 + 1}\right), \end{aligned}$$

qui est lisse, bijective et de réciproque lisse, vu que $\Psi_N^{-1}((z,t),\lambda) = \frac{\lambda}{\sqrt{|i_N(z,t)|^2+1}}(i_N(z,t),1)$. Comme S^3 n'est rien que $\mathbb{R}^3$ avec un point à l'infini, on peut représenter la fibration (on dessine un certain nombre de fibres) ; cf `https://www.youtube.com/watch?v=CxTWEM6RnjA`

2.1.2 Les revêtements

Définition 2.1.5. *Un revêtement est une fibration dont la fibre est discrete (ie de dimension* 0*).*

Si $p : M \to B$ est un revêtement alors M et B ont même dimension et p est un difféomorphisme local.

Exemples 2.1.6. La projection $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n = T^n$ est un revetement (le cas $n = 1$ est déjà intéressant). En effet si $U \subset T^n$ est ouvert et suffisamment petit alors $p^{-1}(U)$ est une union indexée par $\mathbb{Z}^n$ d'ouverts disjoints tous difféomorphes (via p) à U.

Définition 2.1.7. *Soient* Γ *un groupe discret (vu comme une variété de dimension* 0*) et* M *une variété. Une action lisse de* Γ *sur* M *est une application lisse*[1] $\Gamma \times M \to M$, $(\gamma, x) \mapsto \gamma \cdot x$ *telle que*

$$e \cdot x = x \qquad \text{et} \qquad \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot x = (\gamma_1\gamma_2) \cdot x,$$

pour tout $x \in M$ *et tous* $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$.

L'orbite de $x \in M$ sous l'action de Γ, notée $\Gamma \cdot x$, est $\{\gamma \cdot x \,|\, \gamma \in \Gamma\}$. La relation « appartenir à la même orbite » est une relation d'équivalence. On note M/Γ l'ensemble des orbites muni de la topologie quotient.
On note $p : M \to M/\Gamma, x \mapsto \Gamma \cdot x$ la projection canonique associée. Cette application est continue (par définition de la topologie quotient) et ouverte car pour tout $U \subset M, p^{-1}(p(U)) = \bigcup_\gamma \gamma(U)$ et que les γ sont des homéomorphismes.

Définition 2.1.8. *Soit* Γ *un groupe agissant de façon lisse sur une variété* M.

1) *On dit que l'action de* Γ *est discontinue si tout* $x \in M$ *possède un voisinage* U *tel que*

$$\forall \gamma \in \Gamma, \gamma \neq e \Rightarrow \gamma(U) \cap U = \emptyset$$

2) *On dit que cette action est séparante si pour tout* $(x,y) \in M^2$*, tels que* $y \notin \Gamma \cdot x$*, il existe un voisinage* U *de* x *et un voisinage* V *de* y *tels que* $\forall \gamma \in \Gamma, \gamma(U) \cap V = \emptyset$.

1. Cela revient à dire que les applications $x \mapsto \gamma \cdot x$ sont (des difféomorphismes) lisses.

Remarque 2.1.9. On vérifie facilement qu'une action est discontinue si et seulement si tout point de M possède un voisinage sur lequel la projection p est injective ; ce qui fait de p un homéomorphisme local.
De même une action lisse est séparante si et seulement si M/Γ est séparée.

Exemples 2.1.10. L'action de $\mathbb{Z}^n$ sur $\mathbb{R}^n$ est lisse, discontinue et séparante.

L'action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur S^n donnée par $k \cdot x = (-1)^k x$ aussi.

Celle de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ donnée par $k \cdot (x, y) = (2^k x, 2^{-k} y)$ est discontinue mais pas séparante.

Celle de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{C}$ donnée par $k \cdot z = e^{\frac{2i\pi k}{n}} z$ est séparante mais pas discontinue (elle a un point fixe).

Exercice 2.1.11. Montrer toute action libre [2] d'un groupe fini est discontinue et séparante. En déduire que l'action de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ donnée par $\bar{a} \cdot (u, v) = e^{i\frac{2a\pi}{p}}(u, v)$ est lisse, discontinue et séparante.

Théorème 2.1.12. *Soit Γ un groupe discret agissant de façon lisse, discontinue et séparante. Alors il existe une unique structure de variété sur M/Γ qui fait de la projection $p : M \to M/\Gamma$ un revêtement lisse.*

Preuve. La remarque 2.1.9 dit que M/Γ est une variété topologique. Le quadruplet $(M, p, M/\Gamma, \Gamma)$ est un revêtement topologique. Soit $\bar{x} = p(x) \in M/\Gamma$ et soit U un ouvert contenant x disjoint de ses translatés par Γ. Alors $V = p(U)$ est un voisinage ouvert de $\bar{x}$ et $p^{-1}(p(V))$ est l'union des translatés de U qui est homéomorphe à $V \times \Gamma$.

Quitte à restreindre U, on peut supposer qu'il existe une carte (U, Φ). On définit une carte (V, Ψ) de M/Γ en $\bar{x}$ en prenant $\Psi : V \to \mathbb{R}^n$, $\bar{y} \mapsto \Phi \circ (p|_U)^{-1}$. Les changements de cartes sont des lectures dans des cartes de M de difféomorphismes de la forme $x \mapsto \gamma \cdot x$, ils sont donc lisses.

Si on veut que p soit un revêtement lisse il faut que p soit un difféomorphisme local ce qui prouve l'unicité de la structure de variété sur le quotient. □

Lemme 2.1.13 (Lemme utile). *Soit $p : M \to B$ un revêtement et $f : B \to N$ une application. Alors l'application f est lisse si et seulement si $f \circ p$ est lisse.*

Exercice 2.1.14. Montrer que $S^n/\{\pm 1\}$ est difféomorphe à $\mathbb{P}^n$, que $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ est difféomorphe à $(S^1)^n$.

2.1.3 Les fibrés vectoriels

En fait les fibrés tangents sont plus que de simples fibrations.

Définition 2.1.15. *Un fibré vectoriel sur B de rang ℓ est une fibration (E, p, B, F) telle que*

1) *La fibre type F et les fibres $p^{-1}(b), b \in B$ sont des espaces vectoriels réels de dimension ℓ*
2) *En tout point de E il existe une trivialisation locale (U, Φ) telle que $\forall b \in U$ la restriction de Φ à $p^{-1}(b)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels sur F.*

Exemples 2.1.16. – Le fibré trivial $M \times \mathbb{R}^\ell \to M$.
– Le fibré tangent TM est un fibré vectoriel de rang $\dim(M)$.

Définition 2.1.17. *Un isomorphisme de fibrés vectoriels est un isomorphisme de fibrations qui est linéaire en restriction aux fibres.*

2. ie si $\forall (x, \gamma) \in M \times \Gamma, \gamma \cdot x = x$ implique $\gamma = e$

Exemples 2.1.18. Quelques fibrés vectoriels associés au fibré tangent

1) Le fibré cotangent. Soit M une variété. Pour tout $m \in M$, on note T_m^*M le dual T_mM. On considère ensuite $T^*M = \bigcup_{m \in M} T_m^*M$.

   Soit (U, ϕ) une carte en m et θ_Φ l'isomorphisme entre T_mM et $\mathbb{R}^n$ vu en section 1.3.1. L'application $(\theta_\Phi^{-1})^t$ (transposée de l'inverse) est un isomorphisme[3] de T_m^*M dans $(\mathbb{R}^n)^* \simeq \mathbb{R}^n$.

   On procède ensuite comme en section 1.3.2, on forme

$$\begin{array}{rccc} \Xi_\Phi : & T^*U & \to & U \times (\mathbb{R}^n)^* \\ & \alpha & \mapsto & (p(\alpha), (\theta_\Phi^{-1})^t(\alpha)). \end{array}$$

   On vérifie comme précédemment que cela muni T^*M d'une structure de variété et de fibré vectoriel. Cette fois les changements de cartes s'écrivent :

$$\begin{array}{rccc} \Xi_{\Phi_i} \circ \Xi_{\Phi_j}^{-1} : & \Phi_j(U \cap U_j) \times (\mathbb{R}^n)^* & \longrightarrow & \Phi_j(U \cap U_j) \times (\mathbb{R}^n)^* \\ & (x, v) & \longmapsto & ((\Phi_i \circ \Phi_j^{-1})(x), ((d_x(\Phi_i \circ \Phi_j^{-1}))^{-1})^t(v)). \end{array}$$

   Si $\alpha \in T_m^*M$ et si $v \in T_mM$ alors on peut calculer $\alpha(v) \in \mathbb{R}$ en utilisant une carte (U, ϕ) en m. En effet, $(\theta_\Phi^{-1})^t(\alpha)(\theta_\Phi(v)) = \alpha(v)$.

2) Le fibré des ℓ-formes alternées.

   Si F est un espace vectoriel, on note $\Lambda^\ell F^*$ l'espace vectoriel des ℓ-formes linéaires alternées sur F. Si $L : E \to F$ est linéaire, on définit $L^t : \Lambda^\ell F^* \to \Lambda^\ell E^*$ par $L^t(\alpha)(v_1, \ldots, v_\ell) = \alpha(L(v_1), \ldots, L(v_\ell))$.

   La construction précédente marche alors telle quelle et munit $\Lambda^\ell T^*M := \bigcup_{m \in M} \Lambda^\ell T_m^*M$ d'une structure de fibré vectoriel.

   La même construction permet de construire le fibré des ℓ-formes symétriques ou simplement des ℓ-formes.

Définition 2.1.19. *Soit (E, p, B, F) un fibré vectoriel. Une application $s : B \to E$ telle que $p \circ s = \mathrm{id}$ est appelée une section du fibré E.*

Un fibré vectoriel possède toujours une section : la section nulle.

Un fibré vectoriel trivialisable possède des sections partout non nulles. Le théorème de la boule chevelue dit que TS^2 ne possède pas de telle section.

Si $U \subset B$ est un ouvert trivialisant de E on construit facilement à l'aide d'une fonction plateau des sections de E dont le support est contenu dans U.

Proposition 2.1.20. *Un fibré vectoriel de rang ℓ est trivialisable si et seulement s'il possède ℓ sections (globales) linéairement indépendantes en chaque point.*

Preuve. L'isomorphisme est donné par $(x; v_1, \ldots v_\ell) \mapsto \sum_i^\ell v_i s_i(x)$. Cette application est bijective, lisse, elle envoie fibre sur fibre. Il reste à montrer que son inverse est bien lisse. Un argument d'inversion locale suffit. □

Le tangent à S^1 et S^3 sont trivialisables, on dit que S^1 et S^3 sont <u>parallélisables</u>.

3. On rappelle que si $L : E \to F$ est une application linéaire alors $L^t : F^* \to E^*$ est l'application définie par $L^t(f)(x) = f(L(x))$.

2.2 Champs de vecteurs

2.2.1 Propriétés élémentaires

Définition 2.2.1. *Soit M une variété et TM son fibré tangent. On appelle champ de vecteurs C^k sur M toute section C^k de TM.*

On note $\Gamma_k(TM)$ l'ensemble des champs de vecteurs de classe C^k sur M.

Exemples 2.2.2. – Un champ de vecteurs sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est une application de U dans $\mathbb{R}^n$.
– On identifie TS^n et $\{(x,v) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1} \,|\, x \perp v\}$. On note e_0 le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$. L'application $x \mapsto (x, e_0 - (x \cdot e_0)x)$ est un champ de vecteurs lisse sur S^n qui s'annule 2 fois. Si $n = 2\ell - 1$, on peut voir S^n comme la sphère unité de $\mathbb{C}^\ell$ et considérer la champ $x \mapsto (z, iz)$ qui ne s'annule pas.

Remarque 2.2.3. Tout champ de vecteurs sur $U \subset \mathbb{R}^n$ s'écrit de de façon unique $x \mapsto \sum_i X^i \partial_i$, où les ∂_i sont les champs constants $x \mapsto e_i$ (le i-eme vecteur de la base canonique) et les X^i sont des fonctions à valeurs réelles. Bien sûr, X est lisse si et seulement les fonctions X^i le sont.

L'ensemble $\Gamma_k(TM)$ est naturellement un $C^k(M)$-module ($C^k(M)$ désignant l'anneau des fonctions C^k de M dans $\mathbb{R}$). Si X et Y sont deux champs de vecteurs sur M et si $f \in C^k(M)$, le champ $fX + Y$ est défini par $(fX+Y)(x) = f(x)X(x) + Y(x)$ en utilisant la structure d'espace vectoriel de T_xM.

Définition 2.2.4. *Soit $F : M \to N$ un difféomorphisme (lisse) et X un champ de vecteurs sur X. L'image directe de X par F est le champ de vecteurs sur N noté $F_*X = TF \circ X \circ F^{-1}$ ie le champ défini par*

$$F_*X(y) = T_{F^{-1}(y)}F(X(F^{-1}(y))).$$

Proposition 2.2.5. *Si $F : M \to N$ et $G : N \to P$ sont deux difféomorphismes et si $X \in \Gamma(TM)$ alors $(G \circ F)_*X = (G_* \circ F_*)X$.*

Preuve.

$$\begin{aligned} G_*(F_*X)(z) &= T_{G^{-1}(z)}G(F_*X(G^{-1}(z))) = T_{G^{-1}(z))}G(T_{F^{-1}(G^{-1}(z))}F(F^{-1}(G^{-1}(z))) \\ &= T_{F^{-1}(G^{-1}(z))}(G \circ F)(X(F^{-1}(G^{-1}(z)) = (G \circ F)_*X(z). \end{aligned}$$

□

Le transport des champs de vecteurs par difféomorphisme permet notamment de retrouver l'expression locale (dans des cartes) d'un champ de vecteurs :
Si $X \in \Gamma(TM)$ et (U, Φ) est une carte de M le champ $\Phi_*X|_U \in \Gamma(T(\Phi(U)))$ il s'écrit donc de manière unique $\sum_i f_i \partial_i$. Ainsi $X|_U$ s'écrit de façon unique $X|_U = \sum_i f'_i (\Phi^{-1})_* \partial_i$, où $f'_i = f_i \circ \Phi$. Vérifier qu'on retrouve la lecture de l'application X dans la carte (U, Φ) de M et sa carte associée de TM.

2.2.2 Les champs de vecteurs vus comme équations différentielles autonomes

Définition 2.2.6. *On appelle trajectoire ou courbe intégrale d'un champ de vecteurs X sur une variété M toute courbe c définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ telle que*

$$\forall t \in I, c'(t) = X(c(t)).$$

On voit que c est forcément au moins aussi régulière que X.
Lorsque M est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on peut écrire $X = \sum_i f_i \partial_i$ et les courbes intégrales sont les solutions du système différentiel autonome :

$$\forall\, 1 \leq i \leq n, c_i'(t) = f_i(c(t)).$$

Par ailleurs, si $\Phi : M \to N$ est un difféomorphisme et c est une trajectoire de X alors $\Phi \circ c$ est une trajectoire de $\Phi_* X$ vu que $(\Phi \circ c)'(t) = T_{c(t)}\Phi(c'(t)) = T_{c(t)}X(c(t)) = \Phi_* X(\Phi \circ c(t))$. On peut voir l'expression de $\Phi_* X$ comme une formule de changement de variables. Notamment, cela permet de transposer les théorèmes usuels sur les équations différentielles sur $\mathbb{R}^n$ (existence, unicité et dépendance aux conditions initiales) aux variétés.

Théorème 2.2.7 (Cauchy-Lipshitz + dépendance aux conditions initiales)**.** *Soit X est un champ de vecteurs lisse sur M. Pour tout $x \in M$ il existe une unique trajectoire $c_x : I_x \to M$ de X telle que*

1) $c_x(0) = x$

2) toute trajectoire c_1 de X vérifiant $c_1(x) = 0$ est une restriction de c_x (c_x est dite maximale).

L'ensemble $\Omega = \bigcup_{x \in M} I_x \times \{x\}$ est un ouvert de $\mathbb{R} \times M$ et l'application :

$$\begin{array}{rccl} \Phi^X : & \Omega & \to & M \\ & (x,t) & \mapsto & \Phi_t^X(x) = c_x(t), \end{array}$$

appelée le flot local de X, est lisse.

Remarque 2.2.8. Si c est une trajectoire de X alors $t \mapsto c(t+s)$ est aussi une trajectoire de X. Forcément si l'une est maximale l'autre aussi, par unicité des solutions maximales on a donc

$$\Phi_{t+s}^X(x) = \Phi_t^X(\Phi_s^X(x))$$

si x, t et s sont tels que tous ces termes sont bien définis. Par abus de notation on écrit :

$$\Phi_{t+s}^X = \Phi_t^X \circ \Phi_s^X = \Phi_s^X \circ \Phi_t^X.$$

On en déduit que l'application Φ_t^X définie sur $\{m \in M \,|\, (t,m) \in \Omega\}$ est un difféomorphisme sur $\{m \in M \,|\, (-t,m) \in \Omega\}$ dont l'inverse est donné par Φ_{-t}^X (on a utilisé $\boxed{\Phi_0^X = \mathrm{id}}$).

Proposition 2.2.9. *Si $F : M \to N$ est un difféomorphisme et $X \in \Gamma(TM)$, alors*

$$\Phi^{F_* X} = F \circ \Phi^X \circ F^{-1}.$$

Proposition 2.2.10. *Si $X \in \Gamma(TM)$ et M est compacte (ou plus généralement si $\{x \in M \,|X_x \neq 0\}$ est relativement compact) alors le flot de X est défini sur $\mathbb{R} \times M$. En particulier, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application Φ_t^X est un difféomorphisme.*

Preuve. On commence par montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]-\varepsilon, \varepsilon[\times M \subset \Omega$. Par définition de la topologie produit, pour tout $x \in M$ il existe un voisinage U_x et $\varepsilon_x > 0$ tel que $]-\varepsilon_x, \varepsilon_x[\times U_x \subset \Omega$. Comme M est compacte, il existe $x_1, \ldots, x_\ell$ tel que $M = \bigcup_i U_{x_i}$. Le réel $\varepsilon = \min_{1 \leq i \leq \ell} \varepsilon_{x_i}$ convient donc.

Soit c une courbe intégrale maximale de X. Si $I_x =]a,b[$ avec $b < +\infty$ alors on choisit $b - \varepsilon < r < b$. Il existe une courbe intégrale de X, notée d, de condition initiale $c(r)$ et définie sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$. On a vu que $d(s) = c(r+s)$ et donc la courbe $\bar{c}$ définie par $\bar{c} = c$ sur I_x et $\bar{c}(t) = d(t-r)$ sur $]r, r+\varepsilon[$ est une courbe intégrale de X qui prolonge c contredisant sa maximalité. □

Cette proposition dit en particulier qu'une variété possède beaucoup de difféomorphismes.

Exercice 2.2.11. Montrer que si M est connexe alors le groupe des difféomorphismes de M agit transitivement sur M.

2.2.3 Les champs de vecteurs vus comme dérivations

Définition 2.2.12. *Une dérivation sur une variété lisse M est une application linéaire δ de $C^\infty(M)$ dans lui même vérifiant*

$$\forall (f,g) \in C^\infty(M), \quad \delta(fg) = f\delta(g) + g\delta(f).$$

Exemples 2.2.13. Si $M = U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, les applications ieme dérivée partielle ($f \mapsto \partial_i f$) sont clairement des dérivations. Plus généralement, les applications de la forme $f \mapsto \sum_i g^i \partial_i f$, où les $g^i : U \to \mathbb{R}$ sont lisses, sont aussi des dérivations. On peut voir que cette application est de la forme $f \mapsto df \circ X$ où X est le champ de vecteurs sur U donné par $x \mapsto (g^1(x), \dots, g^n(x))$.

Plus généralement à un champ de vecteurs $X \in \Gamma(TM)$ on peut associer la dérivation $L_X : f \mapsto df \circ X$ où df est définie par $T_x f(v) = (f(x), df_x(v))$, pour tout $x \in M$ et $v \in T_x M$.

Exercice 2.2.14. Montrer que $L_X(f)(x) = \frac{d}{dt}(f \circ \Phi_t^X(x))|_{t=0}$, où Φ^X est le flot de X.

Proposition 2.2.15. *L'application $X \mapsto L_X$ est une application $\mathbb{R}$-linéaire injective de $\Gamma(TM)$ dans l'espace vectoriel des dérivations.*

Preuve. Cette application est clairement linéaire. Soit X un champ non nul et a tel que $X(a) \neq 0$. Soit (U, Φ) une carte en a. On a vu que $\Phi_*(X|_U) = \sum f_i X_{e_i}$. Il existe i_0 tel que $f_{i_0}(a) \neq 0$. À l'aide d'une fonction plateau on construit une fonction g sur M qui coïncide sur un voisinage de a avec l'application $i_0$eme coordonnées. On a $L_X g(a) = f_{i_0}(a) \neq 0$. Ainsi X n'est pas dans le noyau. $\square$

Remarque 2.2.16. Cette application est en fait une bijection, on ne le montre pas faute de temps (voir [Lafontaine] ou [Paulin] ou tout autre livre de géométrie différentielle pour une preuve).

Il n'y a donc pas de risque à voir les champs de vecteurs comme des dérivations. C'est pour cela qu'on note ∂_i les champs constants $x \mapsto e_i$ des ouverts de $\mathbb{R}^n$. Si U est un domaine de carte (et s'il n'y a pas de confusions possibles) on note parfois encore ∂_i le champ de vecteurs sur U donné par $\Phi_*^{-1}\partial_i$.

La composée de deux dérivations n'est pas une dérivation :

$$\delta_1(\delta_2(fg)) = \delta_1(\delta_2 f)g + (\delta_1 f)(\delta_2 g)) + (\delta_1 g)(\delta_2 f) + \delta_1(\delta_2 g)f. \qquad (*)$$

Par contre :

Proposition 2.2.17. *Le crochet de 2 dérivations ie l'application*

$$[\delta_1, \delta_2] = \delta_1 \circ \delta_2 - \delta_2 \circ \delta_1$$

est une dérivation.
De plus, pour tous X_1 et X_2 dans $\Gamma(TM)$ il existe $[X_1, X_2] \in \Gamma(TM)$ tel que $L_{[X_1,X_2]} = [L_{X_1}, L_{X_2}]$.

Preuve. La première affirmation se déduit directement de $(*)$. Pour la seconde, on se donne un atlas $(U_j, \Phi_j)_{j\in J}$. Pour tout $j \in J$, on écrit $X_1|_{U_j} = \sum_i X_{1,j}^i \partial_i$ et $X_2|_{U_j} = \sum_i X_{2,j}^i \partial_i$. Si $f \in C^\infty(U_j)$,

$$\begin{aligned} L_{X_{1|U_j}} L_{X_{2|U_j}} f &= L_{X_{1|U_j}} \left(\textstyle\sum_i X_{2,j}^i \, \partial_i f\right) \\ &= \textstyle\sum_{i,k} X_{1,j}^k (\partial_k X_{2,j}^i \, \partial_i f + X_{2,j}^i \, \partial_{i,k}^2 f). \end{aligned}$$

Ainsi, $[L_{X_{1|U_j}}, L_{X_{2|U_j}}] = L_{Y_j}$, $Y_j = \sum_i Y_j^i \partial_i$ avec $Y_j^i = \sum_k X_{1,j}^k \partial_k X_{2,j}^i - X_{2,j}^k \partial_k X_{1,j}^i$ (on s'est servi du théorème de Schwarz). La proposition 2.2.15 nous assure que Y_j ne dépend pas du choix de Φ_j. Par conséquent, pour tout $(i,j) \in J^2$, Y_i et Y_j coïncident sur $U_i \cap U_j$ et donc les Y_j se recollent en un champ Y défini sur tout M et qui vérifie $[L_{X_1}, L_{X_2}] = L_Y$. $\square$

Le théorème de Schwarz dit précisément que $[\partial_i, \partial_j] = 0$.

Proposition 2.2.18. *Soient X, Y, Z trois champs de vecteurs sur M, $f, g \in C^\infty(M)$ et $F : M \to N$ un difféomorphisme*

1) $[X, Y] = -[Y, X]$,

2) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ *(identité de Jacobi),*

3) $[fX, gY] = fg[X, Y] + fL_X(g)Y - gL_Y(f)X$,

4) $F_*[X, Y] = [F_*X, F_*Y]$.

Preuve. On vérifie que les champs de vecteurs de gauche et de droite définissent les mêmes dérivations. La première égalité est évidente. Pour la deuxième on teste sur une fonction $h \in C^\infty$:

$$L_{[X,[Y,Z]]}h = L_X(L_Y(L_Z(h))) - L_X(L_Z(L_Y(h))) - L_Y(L_Z(L_X(h))) + L_Z(L_Y(L_X(h))),$$
$$L_{[Y,[Z,X]]}h = L_Y(L_Z(L_X(h))) - L_Y(L_X(L_Z(h))) - L_Z(L_X(L_Y(h))) + L_X(L_Z(L_Y(h))),$$
$$L_{[Z,[X,Y]]}h = L_Z(L_X(L_Y(h))) - L_Z(L_Y(L_X(h))) - L_X(L_Y(L_Z(h))) + L_Y(L_X(L_Z(h))).$$

En sommant les 3 lignes on a le résultat voulu. Pour le troisième on fait la même chose. Pour la 4eme aussi mais on aura besoin du lemme suivant :

Lemme 2.2.19. *Soit $X \in \Gamma(TM)$ et $F : M \to N$ un difféomorphisme. Alors*

$$\forall g \in C^\infty(N), L_{F_*X}(g) = L_X(g \circ F) \circ F^{-1}.$$

Preuve du lemme. Par définition,

$$L_X(g \circ F)(x) = T_x(g \circ F)(X_x) = T_{F(x)}g(T_xF(X_x)),$$
$$L_{F_*X}(g)(y) = T_yg((F_*X)_y) = T_yg(T_{F^{-1}(y)}F(X_{F^{-1}(y)}),$$

d'où l'égalité en prenant $x = F^{-1}(y)$. □

$$\begin{aligned} \text{Donc} \quad L_{F_*[X,Y]}(h) &= (L_X(L_Y(h \circ F)) - L_Y(L_X(h \circ F))) \circ F^{-1} \\ &= (L_X(L_Y(h \circ F) \circ F^{-1} \circ F) \circ F^{-1} - (L_Y(L_X(h \circ F) \circ F^{-1} \circ F)) \circ F^{-1} \\ &= L_X(L_{F_*Y}(h) \circ F) \circ F^{-1} - L_Y(L_{F_*X}(h) \circ F) \circ F^{-1} = L_{[F_*X,F_*Y]}(h) \end{aligned}$$

□

Théorème 2.2.20. *Soient X et Y deux champs de vecteurs sur M. Soit ϕ^Y le flot de Y. Alors*

$$\frac{d}{dt}\,(\Phi^Y_t{}_*X)|_{t=0} = [X, Y].$$

Preuve. Soit $f \in C^\infty(M)$. La fonction $\bar{f} : (x, t) \mapsto f(\Phi^Y_t(x)) - f(x)$ vérifie $\bar{f}(x, 0) = 0$. La fonction $g : (x, t) \mapsto \frac{\bar{f}(x,t)}{t}$ est donc lisse (regarder le développement de Taylor de $\bar{f}$), on donc $\bar{f}(x, t) = tg(x, t)$, on écrira $\bar{f}(x, t) = tg_t(x)$. Alors

$$\begin{aligned} L_{\Phi^Y_t{}_*X}(f) &= (L_X(f \circ \Phi^Y_t)) \circ \Phi^Y_{-t} \\ &= (L_X(f + tg_t) \circ \Phi^Y_{-t} \\ &= L_X(f) \circ \Phi_{-t} + tL_X(g_t) \circ \Phi^Y_{-t}. \end{aligned}$$

La dérivée par rapport à t en 0 du 1er terme est $-L_Y(L_X(f))$ et celle du deuxième est $L_Xg_0 + 0 \times$ (un truc incalculable). Or $L_Xg_0 = L_X(f)$, on a donc fini. □

Exercice 2.2.21. Soit X et Y deux champs de vecteurs sur une variété compacte M tels que $[X, Y] = 0$. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, \Phi^Y_t{}_*X = X$. En déduire que les flots de X et de Y commutent.

Chapitre 3

Formes différentielles

3.1 Rappels

3.1.1 Formes multilinéaires alternées et produit extérieur.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie et $k \in \mathbb{N}$. On note $\bigwedge^k E^*$ l'espace vectoriel des k-formes linéaires alternées sur E. Par convention $\bigwedge^0 E^* = \mathbb{R}$, une 0-forme est une constante. Bien sûr $\bigwedge^1 E^* = E^*$. L'application $(v_1, \dots, v_n) \mapsto \det((v_i^j)_{i,j})$ appartient à $\bigwedge^n \mathbb{R}^{n*}$.

Proposition-Définition 3.1.1. *Le produit extérieur de $L \in \bigwedge^k E^*$ et de $T \in \bigwedge^l E^*$ est la forme $L \wedge T \in \bigwedge^{k+\ell} E^*$ définie par*

$$L \wedge T(v_1, \dots v_{k+\ell}) = \sum_{\sigma \in \Gamma_{k,\ell}} \varepsilon(\sigma) L(v_{\sigma(1)}, \dots v_{\sigma(k)}) T(v_{\sigma(k+1)}, \dots v_{\sigma(k+l)}),$$

où $\Gamma_{k,\ell}$ est le groupe des permutations de $\{1, \dots, k+\ell\}$ vérifiant $\sigma(1) \leq \dots \leq \sigma(k)$ et $\sigma(k+1) \leq \dots \leq \sigma(k+\ell)$.
Le produit extérieur est bilinéaire, associatif et vérifie $L \wedge T = (-1)^{k\ell} T \wedge L$.

Exercice 3.1.2. Soit $L_1, \dots, L_k$ des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$. Montrer (on pourra s'aider d'une base adaptée de $\mathbb{R}^n$) que

$$L_1 \wedge \dots \wedge L_k(v_1, \dots v_k) = \det((L_i(v_j))_{i,j}).$$

Théorème 3.1.3. *Si $k > n$, $\bigwedge^k E^* = \{0\}$, sinon* $\dim(\bigwedge^k E^*) = \binom{n}{k}$.
Plus précisément, si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E de base duale $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ alors $(e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^* \,|\, 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n)$ est une base de $\bigwedge^k E^*$.

Proposition 3.1.4. *Soient $L \in \bigwedge^k F^*$, $T \in \bigwedge^\ell F^*$ et $A : E \to F$ linéaire. Alors*

$$A^t(L \wedge T) = (A^t L) \wedge (A^t T).$$

3.1.2 Formes différentielles sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Définition 3.1.5. *Une forme différentielle de degré k (ou une k-forme différentielle) lisse sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est une application lisse de U dans $\bigwedge^k \mathbb{R}^{n*}$.*
L'espace vectoriel des formes de degré k sur U est noté $\Omega^k(U)$, c'est en fait un $C^\infty(U)$-module.

Un élément de $\Omega^0(U)$ est une fonction lisse de U dans $\mathbb{R}$. La différentielle d'une fonction lisse $f : U \to \mathbb{R}$ appartient à $\Omega^1(U)$, on la note df. Ainsi dx^i est la 1-forme constante $x \mapsto e_i^*$.

Définition 3.1.6. *Soient $\alpha \in \Omega^k(U)$ et $\beta \in \Omega^\ell(U)$. Le produit extérieur de α et β est la $(k+\ell)$-forme différentielle lisse*[1] *sur U notée $\alpha \wedge \beta$ et définie par $(\alpha \wedge \beta)_x = \alpha_x \wedge \beta_x$. L'opération ainsi définie est encore bilinéaire, associative et $\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha$.*

Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E et $\alpha \in \Omega^k(U)$, alors il existe des fonctions lisses[2] $\alpha_{i_1,\ldots,i_k}$ telles que :

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \alpha_{i_1,\ldots,i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.$$

Ainsi la différentielle d'une application lisse $f : U \to \mathbb{R}$ s'écrit $df = \displaystyle\sum_{i=1}^n \partial_i f dx^i$.

Définition 3.1.7. *Soit U et V des ouverts d'espaces vectoriels et $F : U \to V$ une application lisse. L'image réciproque par F de $\alpha \in \Omega^k(V)$, notée $F^*\alpha$, est la forme sur U définie par*

$$(F^*\alpha)_x(v_1, \ldots, v_k) = \alpha_{f(x)}(T_xF.v_1, \ldots, T_xF.v_k).$$

Exercice 3.1.8. Soient $(y^1, \ldots, y^m)$ des coordonnées sur V et $(F^1, \ldots, F^m)$ les composantes de F. Montrer que si $F^* dy^i = dF^i$ puis que

$$\alpha_y = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m} \alpha_{i_1,\ldots,i_k}(y)\, dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k}, \text{ alors } (F^*\alpha)_x = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m} \alpha_{i_1,\ldots,i_k}(F(x))\, (dF_x^{i_1} \wedge \cdots \wedge dF_x^{i_k}).$$

3.2 Formes différentielles sur une variété

Définition 3.2.1. *Une k-forme différentielle sur une variété M est une section lisse du fibré vectoriel $\bigwedge^k T^*M$ défini au chapitre 2. On note $\Omega^k(M)$ l'espace vectoriel (qui est aussi un $C^\infty(M)$-module) des k-formes sur M.*

Soient $\alpha \in \Omega^k(M)$, (U, Φ) une carte de M et (TU, Ξ_Φ) la carte de $\bigwedge^k T^*M$. La lecture de α dans ces cartes est une application lisse de $\Phi(U)$ dans $\Phi(U) \times \bigwedge^k \mathbb{R}^{n*}$ de la forme $x \mapsto (x, *)$. On reconnaît une k-forme sur $\Phi(U)$. Notons (temporairement) la α^Φ.

De plus, si (V, Ψ) est une autre carte de M alors on voit que sur $U \cap V$,

$$\alpha^\Psi = (\Phi \circ \Psi^{-1})^* \alpha^\Phi.$$

Réciproquement, si $(U_i, \Phi_i)_{i \in I}$ est un atlas de M, la donnée d'une famille de k-formes $\alpha_i \in \Omega^k(U_i)$ vérifiant $\forall i, j \in I, (\Phi_i \circ \Phi_j^{-1})^* \alpha_i = \alpha_j$ sur $U_i \cap U_j$ défini une k-forme sur M.

On en déduit que les propriétés des formes différentielles sur les ouverts de $\mathbb{R}^n$ qui commutent avec les images réciproques se transposent sur les variétés.

Soit $\alpha \in \Omega^k(M)$ et $\beta \in \Omega^\ell(M)$. On définit le produit extérieur de α et β par $(\alpha \wedge \beta)_x = \alpha_x \wedge \beta_x$. La proposition 3.1.4, pour toute carte (U, Φ), $(\alpha \wedge \beta)^\Phi = \alpha^\Phi \wedge \beta^\Phi$. Cette section est donc lisse, c'est bien une $(k+\ell)$-forme.

1. l'application est bien lisse car ses composantes s'écrivent somme et produit de fonctions lisses
2. une application entre ouverts d'espaces vectoriels de dimension finie est lisse si et seulement si ses composantes le sont

Proposition-Définition 3.2.2. *Soit $\alpha \in \Omega^k(N)$ et $F : M \to N$ lisse. L'image réciproque de α par F est la k-forme sur M notée $F^*\alpha$ définie par*

$$(F^*\alpha)_x(\xi_1, \dots, \xi_k) = \alpha_{F(x)}(T_xF(\xi_1), \dots, T_xF(\xi_k)),$$

où $x \in M$ et $(\xi_1, \dots, \xi_k) \in T_xM^k$.

Preuve. Il est clair qu'on a affaire à une section de $\bigwedge^k T^*M$, il faut juste s'assurer qu'elle est lisse. Soit (U, Φ) une carte en $x \in M$ et (V, Ψ) une carte en $f(x) \in N$. En reprenant les notations ci-dessus, cela provient du fait que $(F^*\alpha)^\Phi = (\Psi \circ F \circ \Phi^{-1})^*\alpha^\Psi$. Ce qui est clair vu que α^Φ n'est rien d'autre que $\Phi^{-1*}\alpha$. □

Proposition 3.2.3. *Soient $G : P \to N$, $F : N \to M$ des applications lisses, α et α' dans $\Omega^k(M)$, $\beta \in \Omega^\ell(M)$. Alors*

$$F^*(\alpha + \alpha') = F^*\alpha + F^*\alpha', \quad F^*(\alpha \wedge \beta) = (F^*\alpha) \wedge (F^*\beta) \quad \text{et } (F \circ G)^*\alpha = G^*(F^*\alpha).$$

Preuve.
$$\begin{aligned}
((F \circ G)^*\alpha)_x(v_1, \dots, v_k) &= \alpha_{F\circ G(x)}(T_x(F \circ G).v_1, \dots, T_x(F \circ G).v_k) \\
&= \alpha_{F\circ G(x)}(T_{G(x)}F.T_xG.v_1, \dots, T_{G(x)}F.T_xG.v_k) \\
&= (F^*\alpha)_{G(x)}(T_xG.v_1, \dots, T_xG.v_k) \\
&= (G^*(F^*\alpha))_x(v_1, \dots, v_k). \qquad \square
\end{aligned}$$

Après avoir étendu aux variétés les notions de produit extérieur et d'image réciproque, on fait de même pour la différentielle extérieure. Commençons par la différentielle des 0-formes ie des fonctions. La différentielle d'une fonction lisse f est la 1-forme notée df qui localement s'écrit $\sum_i \partial_i f dx^i$.

On pose $\Omega(M) = \bigoplus_{k=0}^{\dim M} \Omega^k(M)$.

Théorème 3.2.4. *Soit M une variété. Il existe une application linéaire $d : \Omega(M) \to \Omega(M)$ et une seule ayant les propriétés suivantes :*

i) si $\alpha \in \Omega^k(M)$ alors $d\alpha \in \Omega^{k+1}(M)$.

ii) la restriction de d à $\Omega^0(M)$ est la différentielle des fonctions.

iii) si $\alpha \in \Omega^k(M)$, alors $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \beta$.

iv) $d \circ d = 0$.

Preuve. Dans le cas où M est un ouvert d'un espace vectoriel ce théorème a été prouvé en licence. On reproduit la preuve de l'existence de d dans ce cas :
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\alpha = \sum_{\underline{i}} a_{\underline{i}} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$. On pose

$$d\alpha = \sum_{\underline{i}} da_{\underline{i}} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \quad (\star).$$

Il est clair que d est linéaire et que i) et ii) sont vérifiés. Pour prouver iii), il suffit de considérer le cas où

$$\alpha = f\ dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \quad \text{et} \quad \beta = g\ dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
d(\alpha \wedge \beta) &= d(fg) \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l} \\
&= (f\ dg + g\ df) \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l} \\
d\alpha \wedge \beta &= gdf \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l} \\
\alpha \wedge d\beta &= f\ dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dg \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l} \\
&= (-1)^k f\ dg \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l}
\end{aligned}$$

Pour prouver $d \circ d = 0$, on commence par les fonctions : $df = \sum_{i=1}^n \partial_i f dx^i$. D'aprés $(\star)$, on a donc

$$d(df) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \partial_j(\partial_i f) dx^j \right) \wedge dx^i = \sum_{i,j} \partial^2_{j,i} f dx^j \wedge dx^i = \sum_{i<j} \left(\partial^2_{j,i} f - \partial^2_{i,j} f \right) dx^j \wedge dx^i = 0,$$

d'aprés le théorème de Schwarz.
Toujours d'aprés $(\star)$, $d(dx^i) = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Donc pour toute k forme α

$$d(d\alpha) = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le m} d(da_{i_1,\dots,i_k}) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = 0.$$

On montre maintenant l'unicté dans le cas général des variétés.
Soit (U, Φ) une carte de M et f une fonction plateau à support dans U et valant 1 sur un ouvert (non vide) V. Soit $\alpha \in \Omega^k(M)$. Pour tout $1 \le i \le n$, on définit $\Phi^i : M \to \mathbb{R}$ par $\Phi^i(x) = f(x).e_i^*(\Phi(x))$ si $x \in U$ et $\Phi^i(x) = 0$ sinon.

Il existe des fonctions lisses $a_{\underline{i}}$ sur $\Phi(U)$ telle que $\Phi^{-1*}\alpha|_U = \sum_{\underline{i}} a_{\underline{i}}\, dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k}$. On étend grace à f les fonctions $a_{\underline{i}}$ à M. La forme $\overline{\alpha} = \sum_{\underline{i}} a_{\underline{i}}\, d\Phi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\Phi^{i_k}$ appartient à $\Omega^k(M)$. Les formes α et $\overline{\alpha}$ coïncident sur V.

Lemme 3.2.5. *Si d satisfait aux hypothèses de 3.2.4, V est un ouvert de M, α et β sont 2 formes différentielles telles que $\alpha|_V = \beta|_V$ alors $d\alpha|_V = d\beta|_V$.*

Preuve du lemme. Soit $a \in V$ et g une fonction lisse à support dans V telle que $f(a) = 1$ et $d_a f = 0$. Il est clair que $f(\alpha - \beta) = 0$ et donc $d(f(\alpha - \beta)) = 0$. On a donc

$$0 = \underbrace{d_a f \wedge (\alpha_a \wedge \beta_a)}_{=0} + \underbrace{f(a)}_{=1}(d\alpha_a - d\beta_a).$$

□

Si d existe alors $d(d\Phi^i) = 0$ par iv) et donc par iii) on a $d(d\Phi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\Phi^{i_k}) = 0$ pour tout $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ et donc (par linéarité et iii))

$$d\overline{\alpha} = \sum_{\underline{i}} da_{\underline{i}} \wedge d\Phi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\Phi^{i_k}.$$

On voit donc que

$$(d\alpha)^\Phi = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le m} d\alpha_{i_1,\dots,i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}. \qquad (\star)$$

Si d existe alors son expression en coordonnées locales est celle donnée par $(\star)$. Soit (U_i, Φ_i) un atlas de M. Soit $\alpha \in \Omega^k(M)$. Pour finir la preuve il suffit de voir que les formes $d(\Phi_i^{-1*}\alpha) \in \Omega^k(\Phi_i(U_i))$ définissent bien en une $(k+1)$-forme de M ie que $(\Phi_i \circ \Phi_j^{-1})^* d(\Phi_i^{-1*}\alpha) = d(\Phi_j^{-1*}\alpha)$. Ce qui est une conséquence immédiate du fait que $(\Phi_i \circ \Phi_j^{-1})^* d(\Phi_i^{-1*}\alpha) = d(\Phi_i \circ \Phi_j^{-1})^*(\Phi_i^{-1*}\alpha) = d(\Phi_i^{-1} \circ \Phi_i \circ \Phi_j^{-1})^*(\alpha)$, ce qui suit de la proposition 3.2.6. On note $d\alpha$ la forme ainsi définie. L'application d obtenue a bien toutes propriétés demandées. □

Proposition 3.2.6. *Si $\alpha \in \Omega(N)$ et $F : M \to N$ est lisse alors $d(F^*\alpha) = F^*(d\alpha)$.*

Preuve : Pour une fonction f la formule devient $d(f \circ F) = F^*df$, où l'on reconnait le théorème de dérivation composée.

En raisonnant comme pour la preuve du théorème 3.2.4, on voit qu'il suffit de montrer le résultat pour les formes qui s'écrivent $f\ d\Phi^{i_1} \wedge \cdots \wedge d\Phi^{i_k}$. On note F^i les applications $\Phi^i \circ F$,

$$\begin{aligned} d(F^*\alpha) &= d((f\circ F)dF^{i_1} \wedge \cdots \wedge dF^{i_k}) \\ &= d(f\circ F) \wedge dF^{i_1} \wedge \cdots \wedge dF^{i_k}, \\ &= (F^*df) \wedge F^*(d\Phi^{i_1} \wedge \cdots \wedge d\Phi^{i_k}) \\ &= F^*(d\alpha) \qquad \square \end{aligned}$$

Exemples 3.2.7. Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et si $\alpha = Pdx + Bdy + Cdz$, alors

$$d\alpha = \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x}\right) dz \wedge dx.$$

Si $\beta = P(dy \wedge dz) + Q(dz \wedge dx) + R(dx \wedge dy)$, $d\beta = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz$.

Définition 3.2.8. *L'opérateur ainsi défini s'appelle la différentielle extérieure.*
Si $d\alpha = 0$ on dit que α est fermée. S'il existe β telle que $d\beta = \alpha$. On dit que α est exacte.

On peut donc exprimer la proposition $d \circ d = 0$ par « toute forme exacte est fermée ». Attention, la réciproque est fausse. La 1-forme sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ donnée par $\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ est fermée mais non exacte.

La proposition 3.2.6 dit que l'image réciproque d'une forme fermée (resp. exacte) est fermée (resp. exacte). Attention cependant, prenons $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}, (r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$, alors $F^*(\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}) = d\theta$ qui est non seulement fermée mais exacte ! Au passage comprend pourquoi on l'appelle la forme d'angle.

3.3 Dérivée de Lie

Soit X un champ de vecteur sur M, Φ_t son flot local et $\alpha \in \Omega^k(M)$. En général Φ_t n'est pas défini sur tout M. Toutefois, pour tout $x \in M$ il existe $U \ni x$ et $\varepsilon > 0$ tels que Φ_t est défini sur U si $|t| < \varepsilon$ et donc pour t petit $\Phi_t^*\alpha$ est bien définie sur U. L'application $t \mapsto (\Phi_t^*\alpha)_x$ est un chemin lisse dans $\bigwedge^k T_x^*M$, sa dérivée en 0 est encore un élément de $\bigwedge^k T_x^*M$. On en déduit que $\frac{d}{dt}\Phi_t^*\alpha|_{t=0}$ définit une section globale de $\bigwedge^k T^*M$. Cette section est lisse [3] et donc $\frac{d}{dt}\Phi_t^*\alpha|_{t=0} \in \Omega^k(M)$.

Proposition-Définition 3.3.1. *La dérivée de Lie associée à un champ de vecteurs lisse X sur M est l'application linéaire*

$$\begin{aligned} L_X : \Omega^k(M) &\to \Omega^k(M) \\ X &\mapsto L_X\alpha = \frac{d}{dt}(\Phi_t^*\alpha)|_{t=0}. \end{aligned}$$

Théorème 3.3.2. *La dérivée de Lie est l'unique application linéaire de $\Omega(M)$ dans lui même vérifiant :*

1) si $f \in C^\infty(M), L_X f = df(X)$,

3. cf. calcul en coordonnées : $\frac{d}{dt}(\Phi_t^*(f dx^{i_1} \wedge \ldots dx^{i_k}))|_{t=0}$ s'exprime en fonction des $\frac{d}{dt}(\frac{\partial \Phi_t^{i_j}}{\partial x^{i\ell}})|_{t=0}$ qui sont lisses

2) $L_X \circ d = d \circ L_X$*,*

3) $\forall \alpha, \beta \in \Omega(M), L_X(\alpha \wedge \beta) = L_X\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge L_X\beta$.

Preuve. 1) est évident, 2) s'obtient en dérivant l'égalité $\Phi_t^* \circ d = d \circ \Phi_t^*$ et 3) en dérivant $\Phi_t^*(\alpha \wedge \beta) = \Phi_t^*\alpha \wedge \Phi_t^*\beta$.

Réciproquement, si P est une application linéaire de $\Omega(M)$ dans lui-même et vérifie 1), 2) et 3), alors en adaptant la preuve du lemme 3.2.5, on montre que si α et β coïncident sur U alors $P\alpha$ et $P\beta$ coïncident sur U. Pour tout point $x \in M$, on sait trouver $\beta = \sum_{\underline{i}} a_{\underline{i}}\, d\Phi^{i_1} \wedge \cdots \wedge d\Phi^{i_k}$ telle que $\alpha = \beta$ sur un voisinage de U de x. On a alors $P\alpha|_U = \sum_{\underline{i}}(L_X a_{\underline{i}})\, d(L_X\Phi^{i_1}) \wedge \cdots \wedge d(L_X(\Phi^{i_k})) = L_X\alpha|_U$. □

La dérivée de Lie permet de savoir si une forme est invariante par le flot d'un champ de vecteurs X (supposé complet). En effet

$$\frac{d}{dt}(\Phi_t^*\alpha)|_{t=t_0} = \frac{d}{dt}(\Phi_{t_0+t}^*\alpha)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\Phi_{t_0}^*(\Phi_t^*\alpha))|_{t=0} = \Phi_{t_0}^*(\frac{d}{dt}(\Phi_t^*\alpha)|_{t=0}) = \Phi_{t_0}^*(L_X\alpha),$$

vu que $\Phi_{t_0}^*$ est une application linéaire. On voit donc que $\Phi_t^*\alpha$ est constant (ne dépend pas de t) si et seulement si $L_X\alpha = 0$. Comme $\Phi_0 = \mathrm{id}$, si $\Phi_t^*\alpha$ est constant alors $\Phi_t^*\alpha \equiv \alpha$.

Exemples 3.3.3. Soit X un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$ et Φ_t son flot. D'après le cours d'intégration Φ_t préserve le volume si en tous points $|\det(d_x\Phi_t)| = 1$ mais pour des raisons de connexité $\det(d_x\Phi_t) > 0$. Par ailleurs (exercice !) $\Phi_t^*(dx^1 \wedge \ldots dx^n) = \det(d_x\Phi_t)(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)$. Le flot de X préserve le volume si et seulement $L_X(dx^1 \wedge \ldots dx^n) = 0$.

Or, par 3.3.2, $L_X(dx^1 \wedge \ldots dx^n) = \sum_i dx^1 \wedge \cdots \wedge L_X dx^i \wedge \cdots \wedge dx^n$ et $L_X dx^i = dX^i$. Ainsi

$$L_X(dx^1 \wedge \ldots dx^n) = \sum \partial_i X_i(dx^1 \wedge \ldots dx^n) = \mathrm{div}X(dx^1 \wedge \ldots dx^n).$$

On n'a pas besoin de calculer le flot pour savoir s'il préserve le volume. On peut toujours calculer une dérivée de Lie sans calculer le flot dit la formule de Cartan ci-dessous.

Définition 3.3.4. *Le produit intérieur de* $\alpha \in \Omega^k(M)$ $(k > 0)$ *par le champ de vecteurs* X *est la forme* $i_X\alpha \in \Omega^{k-1}$ *donnée par*

$$i_X\alpha_x(\xi_1, \ldots, \xi_{k-1} = \alpha_x(X_x, v_1, \ldots, v_{k+1}), \text{ si } k > 0,$$

et si $k = 0, i_X\alpha = 0$.

Remarque 3.3.5. Si $\alpha \in \Omega^k(M)$ alors $i_X(\alpha\wedge\beta) = (i_X\alpha)\wedge\beta + (-1)^k\alpha\wedge i_X\beta$ (c'est une propriété ponctuelle).

Théorème 3.3.6 (formule de Cartan)**.**

$$L_X = d \circ i_X + i_X \circ d$$

Preuve. On montre que $P = d \circ i_X + i_X \circ d$ vérifie les hypothèses du théorème 3.3.2. Si α est de degré k, alors

$$\begin{aligned} d(i_X(\alpha \wedge \beta) &= d((i_X\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge i_X\beta) \\ &= d(i_X\alpha) \wedge \beta + (-1)^{k-1}(i_X\alpha) \wedge d\beta + (-1)^k d\alpha \wedge i_X\beta + (-1)^{2k}\alpha \wedge (d(i_X\beta)) \\ i_X(d(\alpha \wedge \beta) &= i_X(d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta) \\ &= (i_X d\alpha) \wedge \beta + (-1)^{k+1} d\alpha \wedge i_X\beta + (-1)^k i_X\alpha \wedge d\beta + (-1)^{2k}\alpha \wedge i_X d\beta \end{aligned}$$

et donc P vérifie la troisième propriété, les autres se vérifient facilement $(d \circ d = 0)$ et donc $P = L_X$. □

3.4 Lemme de Poincaré

On se place à nouveau sur un ouvert U d'un espace vectoriel de dimension finie.

Définition 3.4.1. *Une famille à un paramètre de k-formes sur U est une application $t \mapsto \alpha(t)$ d'un intervalle I dans $\Omega^k(U)$ telle que les fonctions $\alpha_{\underline{i}} : U \times I \to \mathbb{R}$ définies par $\alpha(t) = \sum_{\underline{i}} \alpha_{\underline{i}}(t,x) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$ sont lisses.*

Si $\alpha(t)$ est une famille à un paramètre de k-formes sur U il en est de même des formes $\frac{d}{dt}\alpha(t) := \sum_{\underline{i}} \frac{d}{dt}(\alpha_{\underline{i}})(t,x) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$, et $I_a^b \alpha := \sum_{\underline{i}} \left(\int_a^b \alpha_{\underline{i}}(t,x) dt \right) \, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$ (a et b dans I).

Le théorème de dérivation sous l'intégrale et celui de Schwarz nous disent que ces opérations commutent avec la différentielle extérieure :

$$d(\frac{d}{dt}\alpha(t)) = \frac{d}{dt} d(\alpha(t)) \quad \text{et} \quad dI_a^b \alpha = I_a^b d\alpha.$$

Lemme 3.4.2. *Soit X un champ de vecteurs sur U dont le flot local, noté Φ_t, est défini sur $\mathbb{R}_- \times U$. Soit $\alpha \in \Omega^k(U)$, $k \geq 1$. Si α est fermée alors pour tous $t_0 < t_1 \leq 0$, la forme $\Phi_{t_1}^* \alpha - \Phi_{t_0}^* \alpha$ est exacte, ie il existe $\beta \in \Omega^{k-1}(U)$ telle que $\Phi_{t_1}^* \alpha - \Phi_{t_0}^* \alpha = d\beta$.*

Preuve. On voit les $\Phi_t^* \alpha$ comme une famille à un paramètres de k-formes. On a

$$\Phi_{t_1}^* \alpha - \Phi_{t_0}^* \alpha = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \Phi_t^* \alpha dt.$$

Or $\frac{d}{dt}\Phi_t^* \alpha = L_X(\Phi_t^\alpha) = (d \circ i_X + i_X \circ d)(\Phi_t^* \alpha)$. Si α est fermée alors $\Phi_t^* \alpha$ aussi et donc

$$\Phi_{t_1}^* \alpha - \Phi_{t_0}^* \alpha = \int_{t_0}^{t_1} d \circ i_X(\Phi_t^* \alpha) dt = d \left(\int_{t_0}^{t_1} i_X(\Phi_t^* \alpha) dt \right).$$

□

Définition 3.4.3. *Un ouvert U est étoilé en m, si pour tout $x \in U$ le segment $[x, m] \subset U$.*

Un ouvert U est étoilé en m si et seulement il est invariant par les homothéties de centre m et de rapport e^t avec $t \in \mathbb{R}_-$. Autrement dit si le flot du champ radial en m (le champ X donné par $X_x = x - m$) est défini sur $\mathbb{R}_-$.

Théorème 3.4.4 (Lemme de Poincaré)**.** *Soit $\alpha \in \Omega^k(U)$. Si U est étoilé et α est fermée alors α est exacte.*

Preuve. On peut supposer que U est étoilé en 0. On applique le lemme 3.4.2 avec $X_x = x$, $\Phi_t : x \mapsto e^t x$, $t_0 < 0$ et $t_1 = 0$:

$$\alpha - \Phi_{t_0}^* \alpha = d \left(\int_{t_0}^{0} i_X(\Phi_t^* \alpha) dt \right).$$

Soient $v_1, \ldots v_k \in \mathbb{R}^n$,

$$\Phi_{t_0}^* \alpha_x(v_1, \ldots v_k) = e^{t_0 k} \alpha_{e^{t_0} x}(v_1, \ldots v_k) \underset{t_0 \to -\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$i_X(\Phi_t^* \alpha)_x(v_1, \ldots v_{k-1}) = e^{tk} \alpha_{e^t x}(x, v_1, \ldots, v_{k-1}).$$

Soit $\beta = \sum_{\underline{i}} \beta_{\underline{i}} \, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{k-1}}$ définie par $\beta_{i_1,\ldots,i_{k-1}}(x) = \int_{-\infty}^0 e^{tk} \alpha_{e^t x}(x, \partial_{i_1}, \ldots, \partial_{i_{k-1}}) dt = \int_0^1 u^{k-1} \alpha_{ux}(x, \partial_{i_1}, \ldots, \partial_{i_{k-1}}) du$. On voit que les $\beta_{\underline{i}}$ sont lisses ie $\beta \in \Omega^{k-1}(U)$ et que

$$(\alpha - \Phi_{t_0}^* \alpha)(\partial_{i_1}, \ldots, \partial_{i_k}) \underset{t_0 \to -\infty}{\longrightarrow} \beta(\partial_{i_1}, \ldots, \partial_{i_k}).$$

En passant à la limite on voit que $\alpha = d\beta$. □

Corollaire 3.4.5. *Soit $\alpha \in \Omega^k(M)$ fermée. Pour tout $x \in M$ il existe $U \ni x$ tel que $\alpha|_U$ est exacte.*

Chapitre 4

Intégration

4.1 Orientation et forme volume

On rappelle que deux bases d'un espace vectoriel $E \neq \{0\}$ définissent la même orientation si la matrice de passage de l'une à l'autre a un déterminant positif. Ainsi deux bases de E, notées $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(e'_1, \ldots, e'_n)$, définissent la même orientation si $(e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^*)(e'_1, \ldots, e'_n) > 0$.

Définition 4.1.1. *Soit M une variété de dimension supérieure à 1.*

1) On appelle atlas d'orientation d'une variété M tout atlas $(U_i, \Phi_i)_{i\in I}$ tel que les changements de cartes $\Phi_i \circ \Phi_j^{-1}$ aient un jacobien positif.

2) Une variété orientable est une variété sur laquelle existe un atlas d'orientation.

Exemples 4.1.2. Les sphères sont orientables. Les espaces projectifs $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ sont orientables si et seulement si n est impair (cf TD). Les fibrés tangents sont orientables.

Deux atlas d'orientation dont l'union est encore un atlas d'orientation sont dit équivalents. Si M est connexe et orientable alors il existe exactement deux classes d'équivalence d'atlas d'orientation (exercice !). Une orientation de M est alors le choix d'une de ces deux classes, on dit alors que M est orientée.

Définition 4.1.3. *Soient M et N orientées par les atlas $(U_i, \Phi_i)_{i\in I}$ et $(V_j, \Phi_j)_{j\in J}$. Un difféomorphisme local $f : M \to N$ préserve (resp. renverse) l'orientation si pour tout $(i, j) \in I \times J$ le jacobien de $\Psi_j \circ f \circ \Phi_i^{-1}$ est positif (resp négatif).*

Proposition 4.1.4. *Soit $G \times M \to M$ une action lisse, discontinue et séparante sur une variété M. La variété quotient M/G est orientable si et seulement si il existe une orientation de M préservée par l'action de G.*

Preuve. Voir TD. □

Définition 4.1.5. *Une forme volume sur M est une forme différentielle de degré* $\dim M$ *partout non nulle.*

Exercice 4.1.6. Si ω est une forme volume sur M alors toute forme de degré maximal sur M peut s'écrire $f\omega$ avec $f \in C^\infty(M)$ (commencer localement).

Sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, les formes volumes sont les n-formes $f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ avec f partout non nulle. Si M possède une forme volume ω alors l'ensemble des cartes (U, Φ) tel que $\Phi^{-1*}\omega = f_\Phi dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ avec $f_\Phi > 0$ est un atlas d'orientation (maximal) de M. En effet,

$$f_\Psi dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = (\Phi \circ \Psi^{-1})^*(f_\Phi dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n) = \det(\Phi \circ \Psi^{-1}) f_\Phi(\Phi \circ \Psi^{-1}) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Définition 4.1.7. *Une partition de l'unité subordonnée à un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ est une collection de fonctions lisses $\rho_i : M \to [0,1]$, vérifiant :*

1) $\mathrm{Supp}(\rho_i) \subset U_i$,

2) Tout $x \in M$ possède un voisinage V_x tel que $\{i \in I; \rho_i|_{V_x} \not\equiv 0\}$ est fini.

3) $\sum_{i\in I} \rho_i = 1$.

Proposition 4.1.8. *Soient $(U_i)_{i\in I}$ recouvrement ouvert fini d'une partie compacte K d'une variété M et $U_\star$ l'ouvert $M \smallsetminus K$. Alors il existe une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(U_i)_{i\in I\cup\{\star\}}$.*

Preuve. Il existe un recouvrement ouvert V_i de K tel que $\overline{V}_i \subset U_i$ est compact. On choisit $f_i : M \to [0,1]$ lisse, à support dans U_i et valant 1 sur V_i (voir proposition 1.4.3). Soit $f_\star = \prod_{i=1}^k (1-f_i)$ c'est une fonction lisse positive et à support dans $U_\star$. On voit que $\sum_{i\in I} f_i + f_\star > 0$. Pour tout $i \in I$, on prend $\rho_i = f_i/(f_\star + \sum_{j\in I} f_j)$ et $\rho_\star = f_\star/(f_\star + \sum_{j\in I} f_j)$. □

Par abus de langage on dira que la partition de l'unité obtenue ci-dessus est subordonnée au recouvrement $(U_i)_{i\in I}$ (celui de K).

En fait tout recouvrement ouvert d'une variété dénombrable à l'infini possède une partition de l'unité qui lui est subordonnée. C'est (on s'en doute) plus long à montrer, cf `https://irma.math.unistra.fr/~opshtein/fichiers-enseignement/GeoRim/partitions1.pdf`

Théorème 4.1.9. *Une variété compacte (en fait dénombrable à l'infini) est orientable si et seulement si elle admet une forme volume.*

Preuve. Soit $(U_i, \Phi_i)_{i\in I}$ un atlas d'orientation fini (quelconque) et $\{\rho_i, i \in I\}$ une partition de l'unité qui lui est subordonnée. Pour tout $i \in I$ on note $\omega_i = \rho_i \Phi_i^*(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)$. Pour tout i, j dans I tels que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, on a $\Phi_j^{-1*}\omega_i = (\rho_i \circ \phi_j^{-1}) \det(d(\Phi_i \circ \Phi_j^{-1}))dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$. Par conséquent, la forme $\omega = \sum_{i\in I} \omega_i$ (la somme est toujours sur un ensemble fini d'indices) est une forme volume. □

Remarque 4.1.10. On a supposé jusqu'ici que $\dim M \geq 1$. Le théorème 4.1.9 permet d'étendre à la dimension 0 la définition de variété orientée. Une orientation d'une variété M de dimension 0 est l'attribution d'un signe (+ ou −) à chaque point de M. Une forme volume (ie une fonction partout non nulle) définit bien une orientation. Toute variété de dimension 0 est orientable.

Exemples 4.1.11. Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}$ une submersion lisse. Soient ∇f le gradient de f ie le champ de vecteurs (partout non nul) sur U défini par $\nabla f = \sum_i \partial_i f\, \partial_i$ et $X = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$. Soit $\omega = i_X(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n) \in \Omega^{n-1}(U)$.
Soit $M = f^{-1}(0)$ (supposé non vide) et $i : M \to U$ l'inclusion. Pour tout $x \in U, \nabla f_x \cdot v = d_x f(v)$ et donc si $x \in M$, ∇f_x est perpendiculaire à $T_x M$ et donc $i^*\omega$ est une forme volume sur M (qui prend les valeurs ± 1 sur les bases orthonormées). On a montré que M est orientable.

Exercice 4.1.12. On se place dans le cadre de l'exemple 4.1.11 dans le cas $n = 3$. Soient $U \subset \mathbb{R}^2$ et $\varphi : U \to M \subset \mathbb{R}^3$ une immersion. Soit $E = \|T_x\varphi(\partial_1)\|^2$, $G = \|T_x\varphi(\partial_2)\|^2$ et $F = \langle T_x\varphi(\partial_1), T_x\varphi(\partial_2)\rangle$. Montrer que $\varphi^*\omega = \pm\sqrt{EG - F^2}\, dx^1 \wedge dx^2$ (on pourra remarquer que pour tous $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ alors $\left(v_i^j\right)_{i,j} \cdot \left(v_j^i\right)_{i,j} = (\langle v_i, v_j\rangle)_{i,j}$).

4.2 Intégration sur les variétés

On munit $\mathbb{R}^n$ de son orientation naturelle (celle donnée par $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$).

Définition 4.2.1. *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $\alpha = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ une n-forme sur U à support compact[1]. On appelle intégrale de α et on note $\int_U \alpha$ l'expression*

$$\int_U f dx^1 \dots dx^n.$$

On a défini quelque chose d'invariant par difféomorphisme préservant l'orientation :

Exercice 4.2.2. Soit α est une n-forme sur $U \subset \mathbb{R}^n$ à support compact et $\Phi : V \to U$ un difféomorphisme (au moins C^1). Montrer que

$$\int_V \Phi^* \alpha = \pm \int_U \alpha,$$

avec égalité si et seulement Φ préserve l'orientation. En fait cela marche dès lors que que la fonction f donnée plus haut est intégrable.

On note $\Omega_0^n(M)$ l'espace vectoriel des n-formes à support compact ($n = \dim M$ bien sûr).

Théorème 4.2.3. *Soit M une variété compacte et orientée de dimension n. Il existe une unique forme linéaire INT sur $\Omega_0^n(M)$ telle que pour toute n-forme α à support (compact) contenu dans le domaine d'une carte (U, Φ) préservant l'orientation, on ait*

$$\mathrm{INT}(\alpha) = \int_{\Phi(U)} \Phi^{-1*} \alpha.$$

Preuve. Soit $\alpha \in \Omega_0^n(M)$. Soient $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement fini de $\mathrm{Supp}(\alpha)$ composé de domaines de cartes Φ_i d'un atlas d'orientation et $(\rho_i, \rho_\star)_{i \in I}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(U_\star = M \setminus \mathrm{supp}(\alpha), U_i)_{i \in I}$. Bien sûr $\alpha = \sum_i \rho_i \alpha$, donc si INT existe alors

$$\mathrm{INT}(\alpha) = \sum_i \mathrm{INT}(\rho_i \alpha) = \sum_i \int_{\Phi(U_i)} \Phi_i^{-1*} \rho_i \alpha,$$

ce qui montre l'unicité.

La formule ci-dessus ne dépend pas du choix d'une partition de l'unité : Soit $(\widetilde{\rho}_j)_{i \in J}$ une partition de l'unité subordonnée à un recouvrement ouvert fini $(V_j)_{j \in J}$ de $\mathrm{supp}(\alpha)$ par des domaines de cartes Ψ_j préservant l'orientation.

$$\sum_{i \in I} \int_{\Phi(U_i)} \Phi_i^{-1*} (\rho_i \widetilde{\rho}_j \alpha) = \sum_{i \in I} \int_{\phi(U_i \cap V_j)} \Phi_i^{-1*} \rho_i \widetilde{\rho}_j \alpha.$$

D'après l'exercice 4.2.2, vu que Ψ_j préserve l'orientation,

$$\sum_{i \in I} \int_{\Phi(U_i \cap V_j)} \Phi_i^{-1*} \rho_i \widetilde{\rho}_j \alpha = \sum_{i \in I} \int_{\Psi(U_i \cap V_j)} \Psi_j^{-1*} \rho_i \widetilde{\rho}_j \alpha = \int_{\Psi(V_j)} \Psi^{-1*} \widetilde{\rho}_j \alpha.$$

Par conséquent,

$$\sum_{i \in I} \int_{\Phi(U_i)} \Phi_i^{-1*} \rho_i \alpha = \sum_{j \in J} \int_{\Psi(V_j)} \Psi_j^{-1*} \widetilde{\rho}_j \alpha.$$

1. ie $\overline{\{x \in U ; \alpha_x \neq 0\}}$ est compact

L'argument ci-dessus montre aussi que pour toute carte (V, Ψ) conservant l'orientation et toute n-forme α à support compact inclus dans V

$$\mathrm{INT}(\alpha) = \int_{\Psi(U)} \Psi^{-1*}\alpha.$$

□

Bien entendu on notera $\int_M \alpha$ le réel obtenu qu'on appellera l'intégrale de α sur M (on se rappellera que le signe de cette intégrale dépend du choix d'une orientation).

Si M est de dimension 0, $\int_M \alpha = \sum_{x\in M} \epsilon(x)\alpha(x)$ où $\epsilon(x)$ est le signe attribué à x par l'orientation de M.

Exercice 4.2.4. Soient M et N deux variétés orientées et compactes. Soient $\Psi : M \to N$ un difféomorphisme qui préserve l'orientation et $\alpha \in \Omega^n(N)$. Montrer que

$$\int_N \alpha = \int_M \Psi^*\alpha.$$

(hint : si (U, Φ) est une carte de N alors $(\Psi^{-1}(U), \Phi \circ \Psi)$ est une carte de M).

Remarque 4.2.5. Les preuves du théorème 4.2.3 et de l'exercice 4.2.2 fonctionnent encore telle quelle si on suppose la forme α mesurable et bornée.

Si M est compacte, on peut voir le choix d'une forme volume sur M comme celui d'une mesure sur M. Si B est un borélien de M on pose $\mu_\omega(B) = \int_M \mathbf{1}_B\omega$ où $\mathbf{1}_B$ est la fonction indicatrice de B.

Définition 4.2.6. *Un borélien B de M est dit négligeable s'il existe un atlas (U_i, Φ_i) de M tel que pour tout $i \in I, \Phi_i(U_i \cap B)$ est une partie négligeable de $\mathbb{R}^n$.*

Si K est une partie compacte de M on définit $\int_K \alpha$ comme étant $\int_M \mathbf{1}_K\alpha$ (qui est une n-forme mesurable, bornée et à support compact).

Proposition 4.2.7. *Si K et L sont deux compacts d'intersection négligeable alors*

$$\int_{K\cup L} \alpha = \int_K \alpha + \int_L \alpha.$$

Preuve. Soit ρ une fonction plateau dont le support est contenu dans le domaine d'une carte (U, Φ) préservant l'orientation.

$$\int_{K\cup L} \rho\alpha = \int_{\Phi(U)} \Phi^{-1*}(\mathbf{1}_{K\cup L}\rho\alpha) = \int_{\Phi(U)} \Phi^{-1*}((\mathbf{1}_K + \mathbf{1}_L)\rho\alpha) = \int_K \rho\alpha + \int_L \rho\alpha$$

(les deux formes apparaissant au centre sont presque partout égales). □

Corollaire 4.2.8. *Soient M une variété compacte, $(D_i)_i$ une famille finie de compacts de $\mathbb{R}^n$ et $\Phi_i : D_i \to M$ des applications lisses[2] dont la restriction à $\mathring{D}_i$ est une paramétrisation locale préservant l'orientation. Si de plus*

1) $M \smallsetminus \left(\bigcup_i \phi_i(\mathring{D}_i)\right)$ est négligeable,

2) si $i \neq j, \Phi_i(\mathring{D}_i) \cap \Phi_j(\mathring{D}_j) = \emptyset$,

2. ie définie sur un voisinage ouvert de D_i

alors

$$\int_M \alpha = \sum_i \int_{D_i} \phi_i^* \alpha.$$

C'est LE corollaire qui permet de faire des calculs :

— Soit $\Psi : (u,v) \mapsto (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$, la restriction de Ψ à $D = [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$ satisfait aux hypothèses ci-dessus. Pour toute forme $\alpha \in \Omega^2(S^2)$ on a donc $\int_{S^2} \alpha = \pm \int_D \Psi^* \alpha$ (selon le choix de l'orientation).

— Soit $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ la projection canonique. Si α est une 2-forme sur T^2 alors $\int_{T^2} \alpha = \int_{[0,1]^2} p^* \alpha$.

4.3 Théorème de Stokes

Définition 4.3.1. *On dit qu'un compact $D \subset M$ est un domaine régulier s'il est égal à l'adhérence de son intérieur et si sa frontière est soit vide soit une sous-variété de dimension $n-1$. On note cette sous-variété ∂D et on l'appelle le bord de D.*

Exemples 4.3.2. 1) Une variété compacte est un domaine régulier de bord vide.

2) Une boule fermée euclidienne de $\mathbb{R}^n$ est un domaine régulier.

3) Un tore plein de $\mathbb{R}^3$ est un domaine régulier (Le théorème d'Alexander dit que toute hypersurface compacte de $\mathbb{R}^n$ est le bord d'un domaine régulier).

4) Si M est une variété compacte alors $M \times [0,1]$ est une variété compacte de $M \times \mathbb{R}$ de bord $M \times \{0,1\}$.

5) Si M est une variété compacte et $D_1, \dots D_k$ sont des fermés disjoints difféomorphes à des boules euclidiennes alors $M \setminus (\cup_i \mathring{D}_i)$ est un domaine régulier.

Lemme 4.3.3. *Soit D un domaine régulier d'une variété M. Alors*

1) D a un nombre fini de composantes connexes, qui sont des domaines réguliers ;

2) Pour tout point p de ∂D, il existe un ouvert U contenant p et une carte $\Phi : U \to \mathbb{R}^n$ telle que

$$\Phi(U \cap \partial D) = \{x \in \Phi(U); x^1 \leq 0\}.$$

Preuve. 1) vient du fait que les composantes connexes de M sont des ouverts disjoints.
Montrons 2) : Si ∂D n'est pas vide, c'est une sous-variété de M et donc pour tout $p \in \partial D$ il existe une carte (U, Φ) en p telle que $\Phi(U \cap \partial D) = \{x \in \Phi(U); x^1 = 0\}$. On peut supposer que $\Phi(U)$ est une boule de centre 0.

Il est alors clair que la frontière de $\Phi(U \cap \mathring{D})$ dans $\Phi(U)$ est contenue dans $\Phi(U \cap \partial D)$ et donc $\Phi(U \cap \mathring{D})$ est ouvert et fermé dans $\Phi(U) \setminus \{x \in \Phi(U); x^1 = 0\}$.

Mais si $\Phi(U \cap D) = \Phi(U) \setminus \{x \in \Phi(U); x^1 = 0\}$ alors $D \cap U = U$ et D ne contient aucun point du bord de D. Ainsi $\Phi(U \cap D)$ est une demi boule. □

Théorème 4.3.4. *Si M est une variété orientable et $D \subset M$ est un domaine régulier alors D est orientable.*

Preuve. Si M est de dimension 1 il n'y a rien à montrer : toute variété de dimension 0 est orientable (orienter ∂D consiste alors à attribuer un signe à chaque point de ∂D). On suppose donc $\dim M > 1$.

On considère l'atlas de sous-variété induit par les cartes de M donnée par le lemme 4.3.3 2) et qui préserve l'orientation de M. De telles cartes existent car, comme $\dim M \geq 2$, on peut, si besoin, remplacer une carte $(U,(\Phi^1,\dots,\Phi^n))$ par $(U,(\Phi^1,\dots,-\Phi^n))$. Soient (U,Φ) et (V,Ψ) deux telles cartes. Si $p\in U\cap V$ alors la jacobienne de $\Psi\circ\Phi^{-1},(x^1,\dots,x^n)\mapsto(y^1,\dots,y^n)$ en $\Phi(p)$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & 0 & \dots & 0 \\ * & & (\frac{\partial y^i}{\partial x^j})_{2\le i,j\le n} & \end{pmatrix}$$

vu que $d_{\Phi(p)}(\Psi\circ\Phi^{-1})$ envoie le plan $x^1=0$ sur le plan $y^1=0$. De plus $\frac{\partial y^1}{\partial x^1}>0$ vu $\Psi\circ\Phi^{-1}$ envoie le demi-espace d'équation $x^1\le 0$ sur celui d'équation $y^1\le 0$. Ce qui prouve que

$$\det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)_{2\le i,j\le n}>0.$$

L'atlas considéré est bien un atlas d'orientation.
NB : les coordonnées « directes » $x^1,\dots x^n$ induisent des coordonnées directes $x^2,\dots,x^n$ sur ∂D. □

Définition 4.3.5. *Soit D un domaine régulier d'une variété orientée M de dimension $n>1$. On appelle bord orienté de D la variété ∂D munie de l'orientation définie dans la preuve ci-dessus (voir ci-dessous si $n=1$).*

Si $\dim M=1$ et D est un domaine régulier de M alors ∂D consiste en un nombre fini de points. On attribue le signe $+$ à un point $p\in\partial D$ s'il existe une carte (U,Φ) en p préservant l'orientation et telle que $\Phi(U\cap\partial D)=\{x\in\Phi(U);x^1\le 0\}$ (et donc $\Phi(p)$ est à droite de la demi-droite $\Phi(U\cap D)$) et le signe $-$ dans le cas contraire. Quelle est l'orientation du domaine régulier $[a,b]\subset\mathbb{R}$?

Remarque 4.3.6. Normale sortante et orientation : Si H est un hyperplan orienté d'un espace vectoriel orienté E il existe $\nu\in E\smallsetminus H$ tel que une base $(v_1,\dots,v_{n-1})$ de H est directe si et seulement si $(\nu,v_1\dots,v_{n-1})$ est une base directe de E et réciproquement le choix d'un tel ν oriente H. L'orientation de $T_x\partial D\subset T_xM$ qu'on s'est donné on a choisi un vecteur « sortant ». Un vecteur $\nu\in T_xM\smallsetminus T_x\partial D$ est dit sortant si toute courbe $c:[0,1]\to M$ telle que $c(0)=x$, $c'(0)=\nu$, il existe $\varepsilon>0$ tel que $c(t)\notin D$ pour tout $t\in]0,\varepsilon[$ (ie si $c=(c^1,\dots,c^n)$ dans les coordonnées du lemme 4.3.3 alors $c^{1\prime}(0)>0$).

Exemples 4.3.7. — La boule $B=\{x\in\mathbb{R}^n;\|x\|\le 1\}$ a pour bord S^{n-1}. L'orientation de bord de ∂B munit S^{n-1} de l'orientation donnée par la normale sortante (qu'on appellera l'orientation usuelle). Quand $n=2$ cela correspond à parcourir S^1 dans le sens trigonométrique et plus généralement c'est l'orientation compatible avec la projection stéréographique de pôle $S=(-1,0,\dots,0)$.

— Soient $0<a<b$. Le bord de $D=\{x\in\mathbb{R}^n;a\le\|x\|\le b\}$ est l'union des sphères S_a et S_b de centre 0 et de rayon a et b. L'orientation de bord ∂D munit S_b de l'orientation usuelle et S_a de l'autre orientation.

Théorème 4.3.8 (Théorème de Stokes)**.** *Soient D un domaine régulier d'une variété orientée M de dimension n, ∂D son bord orienté et soit $\alpha\in\Omega^{n-1}(M)$. Alors*[3]

$$\int_{\partial D}\alpha_{|\partial D}=\int_D d\alpha.$$

3. Attention au sens de $\alpha_{|\partial D}$ il s'agit de l'image réciproque par l'inclusion de ∂D dans M de la forme α, $\alpha_{|\partial D}\in\Omega^{n-1}(\partial D)$.

Preuve. On suppose $n > 1$ (l'adaptation au cas $n = 1$ est laissée en exercice).
Soit $(U_i, \Phi_i)_{i\in I}$ une famille finie de cartes de M préservant l'orientation, telles que $(U_i)_i$ est un recouvrement fini de D et que si $U_i \cap \partial D \neq \emptyset$ alors $\Phi_i(U_i \cap D) = \{x; x^1 \leq 0\}$. Soit $(\rho_i)_i$ une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement. On peut supposer que :

— il existe $i \in I$ tel que $\mathrm{Supp}(\alpha) \subset U_i$, vu que $\alpha = \sum_i \rho_i\alpha$;

— le support de α rencontre D, sinon il n'y a rien à montrer.

— il existe k tel que $\Phi^{-1*}\alpha = f dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^k} \wedge \cdots \wedge dx^n$.

Il reste deux cas à considérer :
1) L'ouvert U_i ne rencontre pas ∂D (seul cas si $\partial D = \emptyset$) ie $U_i \subset \mathring{D}$. Vu que $\Phi^{-1*}\alpha$ est à support compact,

$$\int_D d\alpha = \int_{\Phi_i(U_i)} d(\Phi^{-1*}\alpha) = \int_{\mathbb{R}^n} d(\Phi^{-1*}\alpha).$$

Or $d(\Phi^{-1*}\alpha) = (-1)^k\partial_k f\ dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$. Or, comme f est à support compact, $\int_{-\infty}^{+\infty} \partial_k f dx^k = 0$. D'après le théorème de Fubini on a donc :

$$(-1)^k \int_D d\alpha = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_k f\ dx^1 \dots dx^n = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \partial_k f dx^k\right) dx^1 \dots \widehat{dx^k} \dots dx^n = 0.$$

2) L'ouvert U_i rencontre ∂D. Dans ce cas, $\Phi_i(U_i \cap D) \subset \mathbb{R}^n_- := \{x; x^1 \leq 0\}$.

$$\int_D d\alpha = \int_{\Phi_i(U_i\cap D)} d(\Phi^{-1*}\alpha) = \int_{\mathbb{R}^n_-} (-1)^k\partial_k f\ dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

Si $k \geq 2$ le calcul précédent redonne $\int_D d\alpha = 0$ mais la restriction de $dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^k} \wedge \cdots \wedge dx^n$ à $\{x; x^1 = 0\}$ est nulle et donc $\alpha_{|_{\partial D}} = 0$.
Reste le cas où $k = 1$, toujours grâce au théorème de Fubini, on a :

$$\int_D d\alpha = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{0} \partial_k f dx^k\right) dx^2 \dots dx^n = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(0, x^2, \dots, x^n) dx^2 \dots dx^n = \int_{\partial D} \alpha_{|\partial D},$$

vu que $x^2, \dots, x^n$ sont des coordonnées sur $\partial D \cap U_i$ compatibles avec l'orientation de bord et que $(\Phi_{i|_{\partial D\cap U_i}})^{-1*}\alpha_{|_{\partial D}} = (\Phi_i^{-1*}\alpha)_{|_{\{x;x^1=0\}}} = f(0, x^2, \dots, x^n)dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n$. □

Corollaire 4.3.9 (cas $\partial D = \emptyset$)**.** *Si M est compacte, orientée et de dimension n et si $\alpha \in \Omega^{n-1}(M)$ alors*

$$\int_M d\alpha = 0.$$

Par conséquent si $\int_M \beta \neq 0$ alors β n'est pas exacte.

Exemples 4.3.10. La forme d'angle $\alpha = \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est fermée (calcul). Si elle était exacte sa restriction à S^1 (qu'on va noter $i^*\alpha$ le serait aussi et $\int_{S^1} i^*\alpha$ serait nulle. Or $\int_{S^1} i^*\alpha = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 t+\sin^2 t}{\cos^2 t+\sin^2 t} dt = 2\pi \neq 0$.

Exercice 4.3.11. Montrer que la forme $\sigma \in \Omega^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ définie par

$$\sigma = \frac{x\, dy \wedge dz - y\, dx \wedge dz + z\, dx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

n'est pas exacte.

Exemples 4.3.12. *Formule d'Ostrogradski :*
Soient $D \subset \mathbb{R}^3$ un domaine régulier, X un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^3$ et $\omega = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$. Comme $d\omega = 0$, $d(i_X\omega) = L_X\omega = (\text{div}X)\omega$. La formule de Stokes donne :

$$\int_{\partial D} (i_X\omega)|_{\partial D} = \int_D (\text{div}X)\omega.$$

Soit ν la normale unitaire sortante de ∂D et σ la forme d'aire canonique de ∂D (ie $i_\nu\omega|_{\partial D}$, avec abus de notation, celle qui prend la valeur 1 sur les bases orthonormées directes de $T_x\partial D$). On voit que $(i_X\omega)|_{\partial D} = \langle \nu, X\rangle\sigma$. En physique, on appelle

$$\int_{\partial D} \langle \nu, X\rangle\sigma$$

le flux de X à travers ∂D. Si X est à divergence nulle, son flot préserve le volume et le flux de X à travers ∂D est nul. Autrement dit si X est un fluide incompressible (ie un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^3$ tel que vu que $\text{div}(X) = 0$) son flux à travers le bord de tout domaine régulier est nul ie pour tout temps la quantité de fluide qui rentre dans ce domaine est égale à la quantité de fluide qui en sort.

4.4 Un peu de Gauss-Bonnet

Soient S une surface compacte parallélisable, orientée et $\Phi : S \to \mathbb{R}^3$. Soient Y_1 et Y_2 deux champs de vecteurs sur S partout linéairement indépendants et tels que (Y_1, Y_2) soit partout directe. Comme en L3, on voit chaque T_xS (ou plutôt chaque $T_x\Phi(T_xS)$) comme un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ et on le munit de la restriction du produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$ (ie on pose $\langle u, v\rangle_{T_xS} = \langle T_x\Phi(u), T_x\Phi(v)\rangle_{\mathbb{R}^3}$). On note X_1 et X_2 les deux champs de vecteurs sur S obtenus en appliquant en chaque point l'algorithme de Gram-Schmidt aux champs Y_1 et Y_2. On va voir X_1 et X_2 comme deux applications de S dans $\mathbb{R}^3$ (on part de $x \mapsto T_x\Phi(X_{ix})$ et on écrit $T_x\Phi(X_{ix}) = (\Phi(x), \text{“}X_{ix}\text{”}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ (abus de notation !!) et on compose par la projection sur le deuxième facteur). Cela permet de définir $X_3 : S \to S^2 \subset \mathbb{R}^3, x \mapsto X_{1x} \times X_{2x}$ où $\times$ désigne le produit vectoriel ($\wedge$ est pris) .

Pour tout $x \in S$, T_xX_3 va de T_xS dans T_xS^2, ces deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont les mêmes, vu que $X_{3x} \perp T_xS$, on peut voir T_xX_3 comme un endomorphisme de T_xS et donc calculer son déterminant. C'est ce qu'on appelle la courbure de S en x, notée $K(x)$. On a donc

$$K(x) = \langle T_xX_3(X_{1x}), X_{1x}\rangle\langle T_xX_3(X_{2x}), X_{2x}\rangle - \langle T_xX_3(X_{1x}), X_{2x}\rangle\langle T_xX_3(X-2_x), X_{1x}\rangle.$$

Soit θ_1 et θ_2 les 1-formes sur S telles que $\theta_i(X_j) = \delta^i_j$. On voit que $T_x\Phi(u) = \theta_1(u)X_{1x} + \theta_2(u)X_{2x}$. De même il existe des 1-formes notées ω_{ij} telles que

$$T_xX_i(u) = \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij}(u)X_{jx}.$$

En dérivant les égalités $\langle X_i, X_j\rangle = \delta^i_j$ on montre que $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ et donc que chaque $\omega_{ii} = 0$.

Proposition 4.4.1. *Avec les notations ci-dessus :*

$$d\theta_i = \theta_k \wedge \omega_{ki}, \text{ avec } k \neq i$$
$$d\omega_{ij} = \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} \text{ avec } \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$$

Preuve. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Il existe des fonctions lisses β_{ij} sur S telles que $X^i_x = \sum_j \beta_{ij}(x)e_j$. Comme les bases (e_1, e_2, e_3) et (X_1, X_2, X_3) sont orthonormales la matrice $(\beta_{ij})_{i,j}$ est orthogonale. On vérifie en appliquant aux e_j que

$$\theta_i = \sum_j \beta_{ij} dx_j.$$

On calcule les $d\beta_{ij}$:

$$T_x X^i = \sum_k \omega_{ik}(u) X^i_x = \sum_{k,j} \omega_{ik}\beta_{kj} e_j = \sum_j d\beta_{ij} e_j \Longrightarrow d\beta_{ij} = \sum_k \omega_{ik}\beta_{kj}.$$

D'où

$$d\theta_i = \sum_j d\beta_{ij} \wedge dx^j = \sum_{j,k} \omega_{ik}\beta_{kj} \wedge dx^j = \sum_k \omega_{ik} \wedge \theta_k.$$

De plus :

$$0 = d(d\beta_{ij}) = \sum_k d\omega_{ik}\beta_{kj} - \sum_k \omega_{ik} \wedge d\beta_{kj} \Longrightarrow \sum_k d\omega_{ik}\beta_{kj} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \sum_s \omega_{ks}\beta_{sj}.$$

d'où, en multipliant par l'inverse de la matrice (β_{ij}),

$$d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}$$

et comme $\omega_{ii} = \omega_{jj} = 0$ on a la deuxième égalité. □

On a en particulier $d\omega_{12} = \omega_{13} \wedge \omega_{32}$, par conséquent

$$d\omega_{12}(X_1, X_2) = \omega_{13}(X_1)\omega_{32}(X_2) - \omega_{13}(X_2)\omega_{32}(X_1).$$

Remarquons aussi que $\omega_{13}(X_i) = -\omega_{31}(X_i) = -\langle T_x X_3(X_i), X_1\rangle$ et $\omega_{32}(X_i) = \langle T_x X_3(X_i), X_2\rangle$. Ainsi

$$\boxed{d\omega_{12} = -K\ \theta_1 \wedge \theta_2.}$$

On reconnaît en $\theta_1 \wedge \theta_2$ la forme volume qui vaut 1 sur les bases orthonormées directes aka la forme volume canonique de $\Phi(S)$. On la note σ.

Corollaire 4.4.2 (Baby Gauss-Bonnet)**.** *Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ est une surface compacte orientable qui possède un champ de vecteurs partout non nul (par exemple[4] un tore). On note K sa courbure de S et σ sa forme volume canonique alors*

$$\int_S K\sigma = 0$$

Preuve. On commence par montrer que si S possède un champ de vecteurs partout non nul X alors il en possède un deuxième donné par $X \wedge N$ où N est un vecteur normal qui existe vu que S est orientable. La variété est donc parallélisable et donc la forme considérée est exacte et son intégrale est nulle d'après Stokes ! □

Corollaire 4.4.3. *La sphère S^2 ne possède pas de champs de vecteurs partout non nul.*

Preuve. Elle possède une métrique à courbure constante égale à 1 et donc d'intégrale non nulle. □

4. en fait c'est le seul exemple

Bibliographie

[1] M. do Carmo, *Differential forms and applications,* Universitext, Springer-Verlag.

[2] J. Lee, *Introduction to smooth manifolds*, Graduate Text in Math, Springer.

[3] J. Lafontaine, *Introduction aux variétés différentielles*, EDP sciences.

[4] F. Paulin : *Géométrie différentielle élémentaire*, notes de cours 2006-2007, `https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~paulin/notescours/cours_geodiff.pdf`