Département Licence

Année 2006–2007 — 5 Janvier 2007
SVTE — SVT101
Mathématiques — Durée : 1h30
Ph. Thieullen

Aucun document n'est autorisé. Toute réponse non justifiée est considérée comme fausse. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1. On se propose de résoudre le problème suivant :

$$(E) \qquad y'' - 4y' + 4y = xe^x$$

avec conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

1. Donner la solution de l'équation homogène.
2. Donner la solution générale de l'équation complète (E).
3. Donner l'unique solution de l'équation complète qui vérifie les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

Exercice 2. Soit la variable aléatoire continue X de fonction densité f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} kxe^{-x} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer k pour que f soit une vraie fonction densité.
2. Déterminer $E[X]$, avec deux intégrations par parties successives.

Exercice 3. On s'intéresse à un problème de rentabilité d'une exploitation pétrolière. Des statistiques sur plusieurs décennies de forage montre qu'un puits de forage peut être :

- non rentable, avec probabilité 60%,
- peu rentable, avec probabilité 30%,
- très rentable, avec probabilité 10%.

On s'est rendu-compte par ailleurs que la nature géologique du sol dans lequel le forage est exécuté peut se ranger dans trois catégories : A, B et C. Les probabilités p_A, p_B, p_C d'obtenir les sols A, B, C suivant le puits de forage sont connues empiriquement et données respectivement par :

- pour un forage non rentable, $p_A = 75\%$, $p_B = 15\%$, $p_C = 10\%$.
- pour un forage peu rentable, $p_A = 25\%$, $p_B = 50\%$, $p_C = 25\%$.
- pour un forage très rentable, $p_A = 10\%$, $p_B = 25\%$, $p_C = 65\%$.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir un forage non rentable et un sol A ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un sol A en général ?
3. On réalise une étude sismique préalable (moins coûteuse) révélant un sol A. Quelle est alors la probabilité d'obtenir un forage non rentable ?

Exercice 4. Un fournisseur d'accès internet met à disposition de ses clients une "hot line" ne répondant que 8 fois sur 10. On admet que les appels d'un même client sont pris en compte, ou ne sont pas pris ne compte, de façon indépendante les uns des autres. On appellera dans la suite n le nombre de fois qu'un même client appelle la "hot line" et X la variable aléatoire représentant le nombre de fois que le fournisseur répond à ce client au cours des n appels.

1. Un client appelle 7 fois ($n = 7$).
   (a) Quelle est la loi de X ?
   (b) Donner l'espérance de X, donner l'écart-type de X.
   (c) Calculer la probabilité que le fournisseur réponde au moins 1 fois.
2. Un autre client appelle 100 fois ($n = 100$).
   (a) Par quelle loi peut-on approcher la loi de X ?
   (b) Calculer l'espérance de X, calculer l'écart-type de X.
   (c) Déterminer la probabilité que le fournisseur réponde entre 75 et 85 fois.
   (d) Déterminer l'entier r pour que le fournisseur réponde entre r et $160 - r$ fois dans 98% de cas au moins.

Barême : exo1=**50**, exo2=**50**, exo3=**50**, exo4=**50**