

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION C

P. THIEULLEN

**Fibres dynamiques asymptotiquement compacts
exposants de Lyapounov. Entropie. Dimension**

Annales de l'I. H. P., section C, tome 4, n° 1 (1987), p. 49-97.

http://www.numdam.org/item?id=AIHPC_1987__4_1_49_0

© Gauthier-Villars, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales de l'I. H. P., section C* » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpc>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Fibres dynamiques asymptotiquement compacts exposants de Lyapounov. Entropie. Dimension

par

P. THIEULLEN (*)

RÉSUMÉ. — Cet article se compose de deux parties. La première partie démontre un théorème abstrait d'Oseledec [OS] en dimension infinie, améliorant celui de Mañé [MA] (théorème spectral pour les produits d'opérateurs linéaires aléatoires dans un espace de Banach E : construction des exposants de Lyapounov et des sous-espaces stables associés). La deuxième partie est une application de ce théorème dans le cadre différentiel suivant : U est un ouvert de E , $\phi : U \rightarrow E$ est de classe C^1 , laisse stable un compact $K \subset U$, et préserve une mesure de probabilité μ définie sur les boréliens de K . Sous certaines hypothèses de compacité asymptotique sur la suite $(D_x \phi^n)_{n \geq 0}$, on démontre l'inégalité entropique de Ruelle (majoration de l'entropie de par la somme des exposants de Lyapounov positifs), ainsi que la majoration de la dimension capacitaire de μ par la dimension de Lyapounov du fibré. L'intérêt de ces différentes notions de dimension apparaît par exemple dans l'étude des attracteurs étranges comme l'ont montré Ruelle et Eckmann dans l'article [RE].

Je tiens à remercier Monsieur F. Ledrappier pour m'avoir guidé dans ce travail.

ABSTRACT. — This paper is divided in tow parts. In the first, we prove an abstract Oseledec's theorem [OS] in infinite dimension (a spectral theorem for random linear transformation products: construction of Lyapounov exponents and stable associated bundles). The second part

(*) Université Paris VI, Laboratoire de Probabilités, 4, Place Jussieu, Tour 56, 3^e étage, 75252 Paris Cedex 05.

is an application of this theorem in a differentiable frame: E is a Banach space, U an open set of E , $\phi: U \rightarrow E$ a C^1 map, $K \subset E$ a compact set such that $\phi(K) \subset K$, and μ a ϕ -invariant probability on the Borel sets of K . Using some compactness assumptions, we prove the estimation from above of entropy of such map ϕ though the sum of its positive Lyapounov exponents. We also give the proof of the inequality $\dim_c(\mu) \leq \dim_L(\mu)$ between the two dimensions: capacity dimension and Lyapounov dimension. The interest of these two different notions of dimension appears for example in the study of strange attractors as shown by Ruelle and Eckmann in [RE].

Liste de mots-clés : Analyse nonlinéaire, Systèmes dynamiques, Théorie ergodique.

PLAN

PREMIÈRE PARTIE

1. Rappels et notations	51
2. Définition des points réguliers et énoncé des théorèmes principaux	53
3. Démonstration du théorème 2.2.	57
4. Démonstration du théorème 2.3.	73

DEUXIÈME PARTIE

1. Notations	77
2. Rappel sur différentes notions de dimension	79
3. Énoncé des théorèmes principaux	80
4. Démonstration des différentes assertions	82
A. — Appendice de théorie ergodique.	91
B. — Appendice sur les variétés grassmanniennes	94
Références	96

PREMIÈRE PARTIE

Cette première partie prolonge l'article de Mañé [MA], en améliorant le théorème d'existence des points réguliers pour un fibré dynamique

général (sans hypothèse de compacité). La différence avec cet article réside dans l'introduction d'un nouvel indice (indice de compacité asymptotique) qui représente en fait la borne inférieure des exposants de Lyapounov. L'espace de Banach n'étant plus supposé séparable, une autre notion de mesurabilité sera utilisée.

La théorie a été développée en dimension finie par Oseledec [OS], Pesin [PE], Ruelle [RU]₁, dans les espaces de Hilbert séparables par Ruelle [RU]₂, puis dans les espaces de Banach séparables par Mañé [MA].

Ce cadre infini apparaît naturellement dans la théorie des équations différentielles fonctionnelles (Hale [HA]).

1. RAPPELS ET NOTATIONS

On appellera système dynamique S. D. un triplet (X, \mathcal{B}, ϕ) où X est un espace topologique homéomorphe à une partie borélienne d'un espace métrique complet séparable, où \mathcal{B} est la tribu des boréliens de X , et $\phi: X \rightarrow X$ est une application continue. Si ϕ est un homéomorphisme le système dynamique sera dit inversible. On appellera fibré dynamique F. D. la donnée d'un S. D. (X, \mathcal{B}, ϕ) et d'un couple $(E, \tilde{\mathcal{C}})$ où E est un espace de Banach quelconque (non supposé séparable et $\tilde{\mathcal{C}} = (T_x)_{x \in X}$ est une famille indexée par X d'opérateurs continus de E . Pour tout espace de Banach E , $L(E)$ désigne l'ensemble des opérateurs continus, $G(E)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels s. e. v. de E admettant un supplémentaire topologique (appelé aussi variété grassmannienne de E). La définition de $G(E)$ et ses premières propriétés sont rappelées dans le livre de Bourbaki [BO]. L'appendice B rassemble les résultats intuitifs et faciles à démontrer sur $G(E)$ utilisés dans le reste de l'article, tandis que l'appendice A regroupe les théorèmes classiques mais fondamentaux de théorie ergodique.

Dans la suite les conventions suivantes seront appliquées :

. Si $(X, \mathcal{B}, \phi, E, \tilde{\mathcal{C}})$ est un F. D. on notera pour tout $n \geq 0$ et $x \in X$ $T_x^n = T_{\phi_x^{n-1}} \circ \dots \circ T_x$.

. Si $\mathcal{E} = (E_x)_{x \in X}$ est un champ de s. e. v. de E , \mathcal{E} sera dit $\tilde{\mathcal{C}}$ -invariant si $\forall x \in X T_x(E_x) \subset E_{\phi_x}$.

. Si ϕ est un homéomorphisme, $n \geq 0$, $x \in X$, $v \in E$, on dira que $T_x^{-n} \cdot v$ existe si v admet un antécédent par $T_{\phi_x^n}$ (il faut interpréter $\tilde{\mathcal{C}}$ comme un morphisme de fibré)

$$\left\{ \begin{array}{l} X \times E \rightarrow X \times E \\ (x, v) \mapsto (\phi_x, T_x \cdot v) \end{array} \right\}.$$

. Si F et G sont deux s. e. v. de E en somme topologique ($F \underset{s.t.}{\oplus} G = E$), $\pi_{(F|G)}$ désignera la projection sur F parallèlement à G .

Avant d'énoncer les résultats, il est nécessaire de donner la définition et les propriétés de deux nouvelles notions importantes. Le théorème de Lusin ([PA], corollaire 24.22) justifie l'introduction de la notion de μ -continuité, et le livre de Roseau [RO] montre l'importance de l'indice de compacité dans les équations différentielles fonctionnelles.

1.1. DÉFINITION. — Soient X et Y deux espaces topologiques, \mathcal{B}_X la tribu des boréliens de X , μ une mesure de probabilité sur \mathcal{B}_X et $f: X \rightarrow Y$ une application. On dira que f est μ -continue, s'il existe une famille $(A_n)_{n \geq 0}$ de boréliens de X telle que :

$$i) \quad \mu\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) = 1$$

ii) la restriction de f à A_n est continue ($\forall n \geq 0$).

1.2. PROPRIÉTÉ. — Soient X un espace métrique complet séparable, Y un espace topologique, et $f: X \rightarrow Y$ une application. Pour toute mesure de probabilité, μ sur \mathcal{B}_X , f est μ -continue si et seulement si, il existe une suite de compacts $(K_n)_{n \geq 0}$ deux à deux disjoints qui vérifie

$$a) \quad \mu\left(\bigcup_{n \geq 0} K_n\right) = 1$$

b) la restriction de f à K_n est continue pour tout $n \geq 0$.

1.3. PROPRIÉTÉ. — Soient $(X, \mathcal{B}, \mu, \phi)$ un S. D. mesuré inversible, et $(K_n)_{n \geq 0}$ une suite croissante de compacts telle que $\mu\left(\bigcup_{n \geq 0} K_n\right) = 1$. Alors il existe une suite croissante de compacts $(L_n)_{n \geq 0}$ qui vérifie :

$$i) \quad \mu\left(\bigcup_{n \geq 0} L_n\right) = 1$$

$$ii) \quad \forall m \geq 0 \exists n \geq 0 \quad L_m \subset K_n$$

$$iii) \quad \forall m \geq 0 \exists n \geq 0 \quad \phi(L_m) \subset L_n$$

$$iv) \quad \forall m \geq 0 \exists n \geq 0 \quad \phi^{-1}(L_m) \subset L_n.$$

1.4. APPLICATION. — Soient $(X, \mathcal{B}, \mu, \phi)$ un S. D. mesuré inversible (i. e. : (X, \mathcal{B}, ϕ) est un S. D. inversible et μ est une mesure de probabilité ϕ -invariante sur \mathcal{B}), Y un espace topologique, $f: X \rightarrow Y$ une application μ -continue. Alors il existe une suite croissante de compacts $(L_p)_{p \geq 0}$ telle que :

$$a) \quad \mu\left(\bigcup_{p \geq 0} L_p\right) = 1,$$

$$b) \quad \forall p \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad \left\{ \begin{array}{l} L_p \rightarrow Y \\ x \mapsto f \circ \phi^k(x) \end{array} \right\} \text{ est continue.}$$

1.5. DÉFINITION. — Soit (E, d) un espace métrique. Pour toute partie bornée A de E , on appelle indice de compacité de A , le réel $\alpha(A) = \inf \{ r > 0 \mid A \text{ peut être recouvert par un nombre fini de boules ouvertes de } E \text{ de rayon } r \}$. $\alpha(A)$ est une notion relative à E et dépend de la métrique choisie.

1.6. PROPRIÉTÉ. — Soient (E, d) un espace métrique et A, B deux parties bornées de E . Alors :

- i) $A \subset B \Rightarrow \alpha(A) \leq \alpha(B)$
- ii) $\alpha(A \cup B) = \max(\alpha(A), \alpha(B))$
- iii) $\alpha(\overline{A}) = \alpha(A)$.

Soient (E_1, d_1) et (E_2, d_2) deux espaces métriques, $E = E_1 \times E_2$, $d = \max(d_1, d_2)$. Alors pour toute partie bornée A_1 de E_1 et A_2 de E_2 , $\alpha(A_1 \times A_2) = \max(\alpha(A_1), \alpha(A_2))$.

1.7. PROPRIÉTÉ. — Soient $(E, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé sur \mathbb{R} , A et B deux parties bornées de E . Alors

- i) $\forall \lambda \in \mathbb{R}^+ \quad \alpha(\lambda A) = \lambda \alpha(A) \quad \text{et} \quad \alpha(A + B) \leq \alpha(A) + \alpha(B)$.
- ii) Si E est complet alors [E est de dimension infinie $\Leftrightarrow \alpha(B_E) = 1$] où B_E désigne la boule unité ouverte de E .

1.8. DÉFINITION. — Soit $(E, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé sur \mathbb{R} . Pour tout opérateur continu $T \in L(E)$ on appelle indice de compacité de T , le réel $\rho(T) = \alpha(T \cdot B_E) = \alpha(T \cdot \overline{B_E})$.

1.9. PROPRIÉTÉ. — Soit $(E, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé sur \mathbb{R} . Alors

- i) $\forall (S, T) \in L(E)^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}^+ \quad \rho(T) \leq \|T\|, \rho(\lambda T) = \lambda \rho(T), \rho(S + T) \leq \rho(S) + \rho(T), \rho(S \circ T) \leq \rho(S) \cdot \rho(T)$
- ii) $\forall (F, G) \in G(E)^2 \quad F \underset{y.z.}{\oplus} G = E \Rightarrow \rho(T) \leq \| \pi_{(F|G)} \| \cdot \rho(T|F) + \| \pi_{(G|F)} \| \cdot \rho(T|G)$
- iii) Si E est complet et $T \in L(E)$ alors [T est un opérateur compact $\Leftrightarrow \rho(T) = 0$].

iv) L'application $\left\{ \begin{array}{l} L(E) \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ T \mapsto \rho(T) \end{array} \right\}$ est l -lipschitzienne.

2. DÉFINITION DES POINTS RÉGULIERS ET ÉNONCÉ DES THÉORÈMES PRINCIPAUX

La définition des points réguliers d'un F. D. est peu différente de celle que donne Mañé et met en évidence les nouveaux résultats. Si F est un s. e. v. de E et T un opérateur de E , on écrira alors $(T|F)$ pour désigner la

restriction de T à F . Pour tout F. D. $(X, \mathcal{B}, \phi, E, \mathcal{C})$ on définit dans chacun des deux cas suivants des parties de X , Σ_i (resp. Λ_i) pour $i \in \bar{\mathbb{N}}$, et on appellera points réguliers dans le cas inversible (resp. dans le cas général) un point de $\Sigma = \bigcup_{i \in \bar{\mathbb{N}}} \Sigma_i$ (resp. $\Lambda = \bigcup_{i \in \bar{\mathbb{N}}} \Lambda_i$). La seule différence avec l'article de Mañé réside dans l'introduction d'un indice de compacité asymptotique $\varkappa(x) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log } \rho(T_x^n)$, et on dira que le F. D. est asymptotiquement compact si $\varkappa(x) = -\infty$ ($\forall x \in X$), ce qui sera réalisé lorsque par exemple T_x est un opérateur compact pour tout $x \in X$.

Premier cas : ϕ est un homoémorphisme et $T_x \in L(E)$ est injectif pour tout $x \in X$.

$$\Sigma_0 = \left\{ x \in X \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log } \|T_x^n\| = \varkappa(x) \right\}$$

$$\Sigma_p = \{ x \in X \mid \exists (E_1, \dots, E_p, F) \in G(E)^{p+1}, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p :$$

$$i) \quad \lambda_1 > \dots > \lambda_p > \varkappa(x), E = E_1 \oplus \dots \oplus E_p \oplus F, \forall i \in \mathbb{N}_p \quad 1 \leq \dim E_i < +\infty$$

$$ii) \quad \forall i \in \mathbb{N}_p \quad \forall v \in E_i \setminus \{0\} : \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log } \|T_x^n \cdot v\| = \lambda_i$$

$$\cdot T_x^{-n} \cdot v \text{ existe pour tout } n \geq 0$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log } \|T_x^{-n} \cdot v\| = -\lambda_i.$$

$$iii) \quad \forall i \in \mathbb{N}_p \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log } \|T_x^n | E_i \oplus \dots \oplus E_p \oplus F\| = \lambda_i,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log } \|T_x^n | F\| = \varkappa(x).$$

pour tout $v \in F \setminus \{0\}$ tel que T_x^{-n} existe pour tout $n \geq 0$

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log } \|T_x^{-n} \cdot v\| > -\lambda_p \left. \right\}.$$

$$\Sigma_\infty = \{ x \in X \mid \exists (E_i)_{i \geq 1}, (F_i)_{i \geq 1} \in G(E), \exists (\lambda_i)_{i \geq 1} \in \mathbb{R} :$$

$$i) \quad \forall i \geq 1 \quad \lambda_i > \lambda_{i+1} > \varkappa(x), \quad 1 \leq \dim E_i < +\infty,$$

$$F_i = E_i \oplus F_{i+1}, \quad F_1 = E \quad \text{et} \quad \inf \lambda_i = \varkappa(x)$$

$$ii) \quad \forall i \geq 1 \quad \forall v \in E_i \setminus \{0\} : \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log } \|T_x^n \cdot v\| = \lambda_i$$

$$\cdot T_x^{-n} \cdot v \text{ existe pour tout } n \geq 0$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log } \|T_x^{-n} \cdot v\| = -\lambda_i$$

$$iii) \quad \forall i \geq 1 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log } \|T_x^n | F_i\| = \lambda_i$$

pour tout $v \in F_{i+1} \setminus \{0\}$ tel que $T_x^{-n}v$ existe pour tout $n \geq 0$

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log} \| T_x^{-n} \cdot v \| > -\lambda_i \}.$$

Deuxième cas : $\phi : X \rightarrow X$ est seulement supposée continue et $T_x \in L(E)$ est quelconque

$$\Lambda_0 = \left\{ x \in X \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log} \| T_x^n \| = \varkappa(x) \right\}$$

$$\Lambda_p = \left\{ x \in X \mid \exists (F_1, \dots, F_{p+1}) \in G^{p+1}(E), \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p : \right.$$

$$i) \quad \lambda_1 > \dots > \lambda_p > \varkappa(x), E = F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_{p+1}, \\ \forall i \in \mathbb{N}_p \text{ codim } F_i < \text{codim } F_{i+1} < +\infty$$

$$ii) \quad \forall i \in \mathbb{N}_p \quad \forall v \in F_i \setminus F_{i+1} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log} \| T_x^n v \| = \lambda_i$$

$$iii) \quad \forall i \in \mathbb{N}_p \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log} \| T_x^n | F_i \| = \lambda_i$$

$$\left. \text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log} \| T_x^n | F_{p+1} \| = \varkappa(x) \right\}$$

$$\Lambda_\infty = \left\{ x \in X \mid \exists (F_i)_{i \geq 1} \in G(E), \exists (\lambda_i)_{i \geq 1} \in \mathbb{R} : \right.$$

$$i) \quad \forall i \geq 1 \quad \lambda_i > \lambda_{i+1} > \varkappa(x), \text{codim } F_i < \text{codim } F_{i+1} < +\infty, \\ F_i \supset F_{i+1}, F_1 = E \quad \text{et} \quad \inf \lambda_i = \varkappa(x)$$

$$ii) \quad \forall i \geq 1 \quad \forall v \in F_i \setminus F_{i+1} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log} \| T_x^n \cdot v \| = \lambda_i$$

$$iii) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log} \| T_x^n | F_i \| = \lambda_i \}.$$

Plusieurs remarques sont nécessaires pour comprendre ces ensembles Σ et Λ . Supposons donné un F. D. $(X, \mathcal{B}, \phi, E, \mathcal{C})$ où ϕ est un homéomorphisme (le F. D. sera dit inversible) et où T_x est injectif pour tout $x \in X$. On appellera limite de Lyapounov au point $x \in X$, toutes les valeurs possibles de $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log} \| T_x^n \cdot v \|$ lorsque $v \in E \setminus \{0\}$. Alors chaque point $x \in \Sigma_p (p \in \overline{\mathbb{N}})$ possède p limites de Lyapounov distinctes strictement supérieures à l'indice de compacité asymptotique \varkappa . On peut donc définir sur Σ une famille de fonctions $(\lambda_i)_{i \geq 1}$, qui seront appelées par la suite « exposant de Lyapounov », de la manière suivante :

$$\text{si } x \in \Sigma_0 \quad \forall i \geq 1 \quad \lambda_i(x) = \varkappa(x)$$

$$\text{si } x \in \Sigma_p \quad \forall i \in \mathbb{N}_p \lambda_i(x) = \lambda_i, \forall i \geq p + 1 \quad \lambda_i(x) = \varkappa(x)$$

$$\text{si } x \in \Sigma_0 \quad \forall i \geq 1 \quad \lambda_i(x) = \lambda_i.$$

Il est par ailleurs possible de voir que les sous-espaces E_i, F_i, F qui interviennent dans Σ sont uniquement déterminés à partir de x . Ce qui permet

de définir deux familles de s. e. v. $(F_i(x))_{i \geq 1}$ et $(E_i(x))_{i \geq 1}$ pour tout $x \in \Sigma$

$$\forall x \in \Sigma \quad \forall i \geq 1 \quad F_i(x) = \left\{ v \in E \mid \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log} \| T_x^n \cdot v \| \leq \lambda_i(x) \right\}$$

$$\forall x \in \Sigma \quad \text{si } \lambda_i(x) = \varkappa(x) \quad \text{alors } E_i(x) = \{ 0 \}, \quad \text{si } \lambda_i(x) > \varkappa(x)$$

$$\text{alors } E_i(x) = \{ 0 \} \cup \left\{ v \in E \setminus \{ 0 \} \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log} \| T_x^n \cdot v \| = \lambda_i(x) \right.$$

et $T_x^{-n} \cdot v$ existe pour tout $n \geq 0$

$$\left. \text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log} \| T_x^{-n} \cdot v \| = -\lambda_i(x) \right\}.$$

Les propriétés de ces exposants de Lyapounov et de ces deux champs E_i , F_i découlant directement de la définition de Σ sont regroupées dans la proposition 2.1.

2.1. PROPOSITION. — Pour tout $x \in \Sigma$ alors

i) $\forall i \geq 1 \quad \lambda_i(x) \geq \lambda_{i+1}(x) \geq \varkappa(x), \quad \inf \lambda_i(x) = \varkappa(x),$

$$\lambda_1(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log} \| T_x^n \|.$$

ii) $\forall v \in E \setminus \{ 0 \}$ ou bien $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log} \| T_x^n \cdot v \| \leq \varkappa(x)$

$$\text{ou bien } \exists i \geq 1 \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log} \| T_x^n \cdot v \| = \lambda_i(x).$$

iii) Si $\lambda_i(x) > \varkappa(x)$, alors pour tout $v \in E \setminus \{ 0 \}$ tel que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log} \| T_x^n \cdot v \| = \lambda_i(x), \quad \left(\frac{1}{n} \text{Log} \| T_x^n \cdot v \| \right)_{n \geq 1},$$

converge en fait vers $\lambda_i(x)$.

iv) $E = F_1(x)$ et pour tout $i \geq 1$ $E_i(x)$ est un espace vectoriel de dimension finie vérifiant :

$$F_i(x) = E_i(x) \oplus F_{i+1}(x) \quad (\text{et donc } E = E_1(x) \oplus \dots \oplus E_i(x) \oplus F_{i+1}(x)).$$

De la même manière, on peut définir des exposants de Lyapounov $(\lambda_i)_{i \geq 1}$ et une suite décroissante de s. e. v. de E de codimension finie $(F_i)_{i \geq 1}$ pour tout $x \in \Lambda$ dans le cas d'un F. D. général.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer les deux plus importants théorèmes de cet article, qui montrent que l'ensemble des points réguliers Σ dans le cas inversible, Λ dans le cas général, contient suffisamment de points, et que les fonctions λ_i , E_i , F_i vérifient certaines conditions de mesurabilité.

2.2. THÉORÈME. — Soit $(X, \mathcal{B}, \phi, E, \mathcal{C})$ un F. D. tel que ϕ soit un homéomorphisme et tel que T_x soit injectif pour tout $x \in X$. Alors pour toute

mesure de probabilité μ sur (X, \mathcal{B}) ϕ -invariante telle que $(x \in X \rightarrow T_x \in L(E))$ soit μ -continue et telle que $\int_X \text{Log}^+ \|T_x\| d\mu(x) < +\infty$, il existe $B \in \mathcal{B}$ qui vérifie :

- i) $B \subset \Sigma, \phi(B) = B, \mu(B) = 1$
 - ii) $\forall i \geq 1 \left\{ \begin{array}{l} \Sigma \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ x \mapsto \lambda_i(x) \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} \Sigma \rightarrow G(E) \\ x \mapsto E_i(x) \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} \Sigma \rightarrow G(E) \\ x \mapsto E_i(x), F_i(x) \end{array} \right\}$
- sont μ -continues
- iii) $\forall x \in B \forall i \geq 1 \lambda_i(\phi_x) = \lambda_i(x) \ E_i(\phi_x) = E_i(x) \ F_i(\phi_x) = F_i(x)$.
 - iv) Si on appelle, pour tout $\varepsilon > 0, i \geq 1, x \in B$

$$A_{\varepsilon,i}(x) = \sup_{n \in \mathbb{Z}} [e^{-|n|\varepsilon} \cdot \|\pi_{(E_i(\phi_x^n) \| F_{i+1}(\phi_x^n))}\|]$$

alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log } A_{\varepsilon,i}(\phi_x^n) = 0$ pour tout $x \in B$.

2.3. THÉORÈME. — Soient X un espace métrique compact et $(X, \mathcal{B}, \phi, E, \mathcal{C})$ un F. D. quelconque. Alors pour toute mesure de probabilité μ sur (X, \mathcal{B})

ϕ -invariantes telle que $\left\{ \begin{array}{l} X \rightarrow L(E) \\ x \mapsto T_x \end{array} \right\}$ soit μ -continue et telle que

$\int_X \text{Log}^+ \|T_x\| d\mu(x) < +\infty$, il existe $B \in \mathcal{B}$ qui vérifie

- i) $B \subset \Lambda, \phi^{-1}(B) = B, \mu(B) = 1$
- ii) $\forall i \geq 1 \left\{ \begin{array}{l} \Lambda \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ x \mapsto \lambda_i(x) \end{array} \right\}$ et $\left\{ \begin{array}{l} \Lambda \rightarrow G(E) \\ x \mapsto F_i(x) \end{array} \right\}$ sont μ -continues.
- iii) $\forall i \geq 1 \ x \in B \ \lambda_i(\phi_x) = \lambda_i(x)$ et $F_i(\phi_x) = F_i(x)$.

3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.2

Le plan de cette démonstration suit de très près celui de Mañé.

3.1. On montre qu'il est possible de supposer que la famille $(T_x)_{x \in X}$ est bornée dans le théorème 2.2.

3.2. Énoncé d'un théorème plus précis que 2.2.

3.3. Preuve du théorème 2.2 à partir de 3.2.

3.4. Lemme important d'analyse combinatoire (Pliss).

3.5. Définition de la fonction $R(T, r), T \in L(E), r > 0$.

3.6. Proposition géométrique dans les e. v. n. (utilise le lemme 3.4).

3.7. Preuve du point a) du théorème 3.2 (utilise la proposition 3.6).

3.8. Lemme simple sur les filtres à indice de compacité tendant vers 0.

3.9. Proposition montrant comment la notion d'indice de compacité explique la convergence de suite dans E .

3.10. Preuve du point *b*) du théorème 3.2 (utilise la proposition et la propriété 1.3).

3.11. Preuve du point *c*) du théorème 3.2 (utilise de nouveau le lemme 3.4).

3.12. Preuve du point *d*) du théorème 3.2 (utilise pour la première fois la proposition A.5).

3.13. Preuve du point *e*) du théorème 3.2 (utilise l'appendice B).

3.1. REMARQUE. — Soient $(X, \mathcal{B}, \phi, E, \tilde{\mathcal{C}})$ un F. D. et μ une mesure de probabilité ϕ -invariante sur (X, \mathcal{B}) telle que $\left\{ \begin{array}{l} X \rightarrow L(E) \\ x \mapsto T_x \end{array} \right\}$ soit μ -continue et telle $\int \text{Log}^+ \|T_x\| d\mu(x) < +\infty$. Pour démontrer le théorème 2.2,

on peut supposer que la famille $(T_x)_{x \in X}$ est bornée en norme dans $L(E)$. Sinon, on définit un nouveau F. D. $(X, \mathcal{B}, \phi, E, \tilde{\mathcal{C}})$ où $\tilde{\mathcal{C}} = (\tilde{T}_x)_{x \in X}$ en posant

$r(x) = \max(1, \|T_x\|)$ et $\tilde{T}_x = \frac{T_x}{r(x)} (\forall x \in X)$. $\left\{ \begin{array}{l} X \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto \log(r(x)) \end{array} \right\}$ est une application μ -intégrable et grâce au théorème de Birkhoff (A.1),

$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \text{Log } r(\phi^k x) \right)_{n \geq 1}$ converge μ -presque partout vers une application

$r^*(x)$ μ -continue positive. Pour tout $x \in X$ et $n \geq 1$ $\tilde{T}_x^n = \frac{T_x^n}{r(\phi_x^{n-1}) \dots r(x)}$,

pour tout $n \geq 1$ et μ -presque partout $\tilde{\lambda}(x) = \lambda(x) - r^*(x)$. Ainsi pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\tilde{\Sigma}_p = \Sigma_p$ (à un ensemble négligeable près), $\tilde{E}_i = E_i$, $\tilde{\lambda}_i = \lambda_i - r^*$, μ -presque partout sur Σ .

Avant d'énoncer le théorème 3.2, introduisons plusieurs définitions. Pour tout F. D. $(X, \mathcal{B}, \phi, E, \tilde{\mathcal{C}})$ inversible et tout champ $\mathcal{E} = (E_x)_{x \in X}$ de s. e. v. de $G(E)$ $\tilde{\mathcal{C}}$ -invariant tel que T_x soit injective sur E_x pour tout $x \in X$, on appelle :

* $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $E_x^\lambda = \{v \in E_x \mid T_x^{-n} \cdot v \text{ existe dans } E_{\phi_x^{-n}} \text{ pour tout } n \geq 0 \text{ et } \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log} \|T_x^{-n} \cdot v\| \leq -\lambda\}$ (pour tout $x \in X$, E_x^λ est un s. e. v. de E qui vérifie $T_x \cdot E_x = E_{\phi_x}$).

$$* \forall x \in X \quad \lambda(\tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{E})(x) = \sup_{p \geq 0} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log} \|T_{\phi_x^p}^n | E_{\phi_x^p}\|$$

$$\varkappa(\tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{E})(x) = \sup_{p \geq 0} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log} \rho(T_{\phi_x^p}^n | E_{\phi_x^p})$$

$(\lambda(\tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{E})$ et $\varkappa(\tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{E})$ sont des applications ϕ -invariantes qui vérifient $\varkappa(\tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{E}) \leq \lambda(\tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{E})$ partout).

Remarquons dès maintenant que, si μ est une mesure de probabilité sur (X, \mathcal{B}) ϕ -invariante et si $\tilde{\mathcal{C}}$ et \mathcal{E} sont μ -continues,

$$\left(\frac{1}{n} \text{Log} \| T_x^n | E_x \| \right)_{n \geq 1} \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{n} \text{Log} \rho(T_x^n | E_x) \right)_{n \geq 1}$$

converge μ -p. p. vers des fonctions ϕ -invariantes (théorème A.2 appliqué à la relation $T_x^{m+n} = T_x^n \circ T_x^m (\forall x \in X)$, $(\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2)$).

3.2. THÉORÈME. — Soient $(X, \mathcal{B}, \phi, E, \tilde{\mathcal{C}})$ un F. D. inversible, μ une mesure de probabilité sur (X, \mathcal{B}) ϕ -invariante telle que $\tilde{\mathcal{C}}$ soit μ -continue, $\mathcal{E} = (E_x)_{x \in X}$ un champ μ -continu $\tilde{\mathcal{C}}$ -invariant de s. e. v. de $G(E)$ tel que la restriction de T_x à E_x soit injectif pour tout $x \in X$ et $\sup_x \| T_x | E_x \|$ soit fini. Il existe alors $B \in \mathcal{B}$ ϕ -invariant de mesure 1 tel que :

$$o) \left\{ \begin{array}{l} B \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ x \mapsto \lambda(\tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{E})(x) \end{array} \right\} \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} B \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ x \mapsto \kappa(\tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{E})(x) \end{array} \right\} \quad \text{sont des applications}$$

mesurables

$$\forall x \in B \quad \lambda(\tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{E})(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log} \| T_x^n | E_x \|$$

$$\text{et} \quad \kappa(\tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{E})(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log} \rho(T_x^n | E_x)$$

$$a) \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall x \in B \cap \{ \kappa(\tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{E}) < \lambda \} \quad \dim E_x^\lambda < +\infty.$$

$$b) \text{ Pour toute application } \left\{ \begin{array}{l} X \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda(x) \end{array} \right\} \mu\text{-continue,}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B \cap \{ \kappa(\tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{E}) < \lambda \} \rightarrow G(E) \\ x \mapsto E_x^\lambda(x) \end{array} \right\} \text{ est } \mu\text{-continue.}$$

$$c) \forall x \in B \cap \{ \kappa(\tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{E}) < \lambda(\tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{E}) \} \quad \dim E_x^{\lambda(\tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{E})} \geq 1.$$

$$d) \forall x \in B \cap \{ \kappa(\tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{E}) < \lambda(\tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{E}) \} \quad \forall v \in E_x^{\lambda(\tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{E})} \setminus \{ 0 \}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log} \| T_x^n \cdot v \| = \lambda(\tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{E})(x)$$

$T_x^{-n} \cdot v$ existe dans $E_{\phi_x^{-n}}$ pour tout $n \geq 0$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log} \| T_x^{-n} \cdot v \| = -\lambda(\tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{E})(x).$$

e) Il existe un champ $\mathcal{F} = (F_x(\tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{E}))_{x \in X}$ de s. e. v. de $G(E)$ μ -continu $\tilde{\mathcal{C}}$ -invariant tel que, pour tout $x \in B \cap \{ \kappa(\tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{E}) < \lambda(\tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{E}) \}$,

$$e1) F_x(\tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{E}) \cap E_x^{\lambda(\tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{E})(x)} = E_x$$

$$e2) \lambda(\tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{F}(\tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{E}))(x) < \lambda(\tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{E})(x)$$

e3) pour tout $v \in F_x(\mathcal{C}, \mathcal{E}) \setminus \{0\}$ tel que $T_x^{-n} \cdot v$ existe dans $E_{\phi_x^{-n}}$ pour tout $n \geq 0$

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log} \| T_x^{-n} \cdot v \| > -\lambda(\mathcal{C}, \mathcal{E})(x)$$

e4) en appelant $A_\varepsilon(x) = \sup_{n \in \mathbb{Z}} [e^{-|n|\varepsilon} \cdot \|\pi_{(E_{\phi_x^{2n}(\mathcal{C}, \mathcal{E})})} \|\pi_{(E_{\phi_x^{2n}(\mathcal{C}, \mathcal{E})})}(\mathcal{C}, \mathcal{E})\|]$ pour tout $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log} A_\varepsilon(\phi_x^n) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} A_\varepsilon(\phi_x^{-n}) = 0.$$

3.3. PREUVE DU THÉORÈME 2.2. — La construction des fonctions λ_i , E_i , F_i se fait par récurrence à partir du théorème 3.2. Soient $(X, \mathcal{B}, \phi, E, \mathcal{C})$ un F. D. inversible tel que $\sup_x \|T_x\| < +\infty$ et T_x soit injectif pour tout

$x \in X$, μ une mesure de probabilité ϕ -invariante sur \mathcal{B} telle que \mathcal{C} soit μ -continue. On commence par appliquer le théorème 3.2 au champ constant $E_x = E$ ($\forall x \in X$), $\mathcal{E}_1 = (E_x)_{x \in X}$, qui assure l'existence de $B_1 \in \mathcal{B}$, $\mu(B_1) = 1$, $\phi(B_1) = B_1$ vérifiant les propriétés o , a , \dots , e . Cette première étape permet de définir λ_1 , E_1 , F_1 par : $\lambda_1(x) = \max(\varkappa(\mathcal{C}, \mathcal{E}_1), \lambda(\mathcal{C}, \mathcal{E}_1))$ ($\forall x \in B_1$), $E_1(x) = \{0\}$ et $F_1(x) = E$ pour tout $x \in B_1 \cap \{\varkappa(\mathcal{C}, \mathcal{E}_1) = \lambda(\mathcal{C}, \mathcal{E}_1)\}$, $E_1(x) = E_x^{\lambda(\mathcal{C}, \mathcal{E}_1)(x)}$ et $F_1(x) = F_x(\mathcal{C}, \mathcal{E}_1)$ pour tout $x \in B_1 \cap \{\varkappa(\mathcal{C}, \mathcal{E}_1) < \lambda(\mathcal{C}, \mathcal{E}_1)\}$. Comme B_1 , $\varkappa(\mathcal{C}, \mathcal{E}_1)$, $\lambda(\mathcal{C}, \mathcal{E}_1)$ sont ϕ -invariants, λ_1 , E_1 , F_1 sont aussi ϕ -invariants sur B_1 et vérifient pour tout $x \in B_1$, $E = E_1(x) \bigoplus_{s.i.} F_1(x)$, $\dim E_1(x) < +\infty$.

Maintenant, ce qui vient d'être dit, peut être reproduit pour le F. D. $(B_1, \mathcal{B}|_{B_1}, \phi|_{B_1}, E, \mathcal{C}|_{B_1})$ et le champ $\mathcal{E}_2 = (F_1(x))_{x \in B_1}$, en remarquant que $\varkappa(\mathcal{C}, \mathcal{E}_2) = \varkappa(\mathcal{C}, \mathcal{E}_1)$ sur B_1 (propriété 1.9, ii). Alors $B = \bigcup_{i \geq 1} B_i$ convient

bien et il reste à vérifier que $\inf_{i \geq 1} \lambda_i(x) = \varkappa(\mathcal{C}, \mathcal{E}_1)(x)$ ($\forall x \in B_1$). Sinon, s'il existait $x \in B \cap \{\varkappa(\mathcal{C}, \mathcal{E}_1) < \inf_{i \geq 1} \lambda_i\}$, alors $x \in B_i \cap \{\varkappa(\mathcal{C}, \mathcal{E}_i) < \inf_{i \geq 1} \lambda_i\}$ ($\forall i \geq 1$), $\bigoplus_{i=1}^n E_x^{\lambda(\mathcal{C}, \mathcal{E}_i)(x)} \subset E_x^{\lambda(x)}$ pour tout $n \geq 1$ (où $\lambda = \inf_{i \geq 1} \lambda_i$), et ceci serait en contradiction avec le fait que $\dim E_x^{\lambda(x)} < +\infty$.

La suite est consacrée à la démonstration du théorème 3.2. Le point (o) résulte des théorèmes ergodiques classiques, et à partir de maintenant on peut supposer que la mesure de $B_0 \cap \{\varkappa(\mathcal{C}, \mathcal{E}) < \lambda(\mathcal{C}, \mathcal{E})\}$ n'est pas nulle (où B_0 est un borélien ϕ -invariant de mesure 1 qui satisfait aux conditions (o)), sinon la démonstration de 3.2 est terminée. Quitte à définir un nouveau F. D. $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\phi}, \tilde{E}, \tilde{\mathcal{C}})$ où $\tilde{X} = B_0 \cap \{\varkappa(\mathcal{C}, \mathcal{E}) < \lambda(\mathcal{C}, \mathcal{E})\}$, $\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}|_{\tilde{X}}$, $\tilde{\phi} = \phi|_{\tilde{X}}$, $\tilde{\mathcal{C}} = (T_x)_{x \in \tilde{X}}$ et une nouvelle mesure de probabilité $\tilde{\phi}$ -invariante $\tilde{\mu}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\tilde{X})}$ sur $\tilde{\mathcal{B}}$ on peut encore supposer que

$$\varkappa(\mathcal{C}, \mathcal{E})(x) < \lambda(\mathcal{C}, \mathcal{E})(x) \quad \text{pour tout } x \in X.$$

Le lemme suivant constitue la base du raisonnement des deux parties a) et c).

3.4. LEMME. — Soient (a_1, \dots, a_n) une suite de réels majorés par une constante v et $\lambda = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$. Alors pour tout réel $\kappa < \lambda$ et pour tout $1 \leq p \leq n$,

$$\frac{1}{n} \text{card} \{ i \in \{ 1, \dots, n \} \mid \forall 1 \leq q \leq \min(i, p) a_i + a_{i-1} + \dots + a_{i-q+1} > q \cdot \kappa \} \geq \frac{\lambda - \kappa}{v - \kappa}.$$

Démonstration. — (Elle présente quelques analogies avec les démonstrations des lemmes maximaux). On posera pour tout $1 \leq p \leq n$

$$A_n^p = \{ i \in \mathbb{N}_n \mid \forall 1 \leq q \leq \min(i, p) a_i + a_{i-1} + \dots + a_{i-q+1} > q \cdot \kappa \}$$

et
$$B_n^p = \mathbb{N}_n \setminus A_n^p.$$

Le passage important de cette démonstration est l'inégalité

$$\sum_{i \in B_n^p} a_i \leq \kappa \cdot \text{card}(B_n^p),$$

car alors

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = \frac{1}{n} \left[\sum_{i \in A_n^p} a_i + \sum_{i \in B_n^p} a_i \right] \leq \frac{1}{n} \cdot [v \cdot \text{card } A_n^p + \kappa (n - \text{card } B_n^p)]$$

et donc
$$\frac{1}{n} \text{card}(A_n^p) \geq \frac{\lambda - \kappa}{v - \kappa}.$$

Pour démontrer l'inégalité on définit une fonction $q(i)$ sur B_n^p par :

$q(i) = \inf \{ q \in \{ 1, \dots, \min(i, p) \} \mid a_i + \dots + a_{i-q+1} \leq q \cdot \kappa \}$ pour tout $i \in B_n^p$ et prouvons que la propriété * suivante est vraie pour tout $i \in B_n^p$:

$$\begin{aligned} * \quad & 1 \leq q(i) \leq \min(i, p), \quad a_i + \dots + a_{i-q(i)+1} \leq q(i) \cdot \kappa, \\ & \{ i - q(i) + 1, \dots, i \} \subset B_n^p. \end{aligned}$$

Car si $i - q(i) + 1 \leq k < i$, comme $a_i + \dots + a_{k+1} > (i - k)\kappa$ (par définition de $q(i)$) nécessairement $a_k + \dots + a_{i-q(i)+1} \leq \kappa(k - i + q(i))$ et donc $k \in B_n^p$. Montrons maintenant pourquoi * entraîne l'inégalité. Soit

$$b_n^p = \max(B_n^p) \text{ et } \Lambda = \left\{ k \in B_n^p \mid \sum_{i \in B_n^p \cap [k, +\infty[} a_i \leq \kappa \cdot \text{card}(B_n^p \cap [k, +\infty[) \right\}.$$

Λ n'est pas vide puisque $k = b_n^p - q(b_n^p) + 1 \in \Lambda$ et appelons $k = \inf \Lambda$. Si $k > \inf B_n^p$, on pose alors $l = \sup(B_n^p \cap [1, k])$ et on constate en appliquant *(l) que $l - q(l) + 1 \in \Lambda$: ce qui est en contradiction avec la définition de k . Donc $\inf \Lambda \leq \inf B_n^p$, le lemme 1 est prouvé.

3.5. DÉFINITION. — Pour tout $T \in L(E)$ et $r > 0$ on note :

$R(T, r) = \sup \{ n \geq 0 \mid \text{il existe } (w_1, \dots, w_n) \text{ de } T \cdot B_E \text{ tels que pour } i \neq j \text{ de } \mathbb{N}_n \parallel w_i - w_j \parallel \geq r \}$.

Alors la fonction R vérifie les deux propriétés :

i) si $r > 2\rho(T)$ alors $R(T, r) < +\infty$

et

ii) $\left\{ \begin{array}{l} L(E) \times \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \overline{\mathbb{N}} \\ (T, r) \mapsto R(T, r) \end{array} \right\}$ est une fonction semi-continue inférieurement (s. c. i.).

Démonstration. — i) Si $r > 2\rho(T)$, il existe alors n boules ouvertes $B\left(v_i, \frac{r}{2}\right)$ qui recouvrent $T \cdot B_E$. Si (w_1, \dots, w_p) sont p vecteurs de $T \cdot B_E$ et vérifient pour tout $i \neq j \parallel w_i - w_j \parallel \geq r$ alors chaque boule ne contient au maximum qu'un seul w_i : d'où $p \leq n : R(T, r) \leq n$.

ii) Soient $T_0 \in L(E)$ et $r_0 > 0$ fixés et vérifiant $R(T_0, r_0) \geq n_0$. Il existe v_1, \dots, v_{n_0} n_0 vecteurs de B_E tels que $\parallel T_0 \cdot v_i - T_0 \cdot v_j \parallel \geq r_0$ pour $i \neq j$. Appelons $\delta = \max(\parallel v_i \parallel \mid i \in \mathbb{N}_{n_0})$ et choisissons $\rho > 1$ tel que $\rho \cdot \delta < 1$.

Pour tout $T \in L(E)$ et $r \in \mathbb{R}_*^+$, si $\parallel T - T_0 \parallel < \frac{\rho - 1}{4} r_0$ et $r < \frac{\rho + 1}{2} r_0$, alors

$$\parallel T \cdot \rho v_i - T \cdot \rho v_j \parallel \geq \rho \parallel T_0 \cdot v_i - T_0 \cdot v_j \parallel - 2\rho \parallel T - T_0 \parallel \geq \frac{\rho + 1}{2} r_0 \geq r.$$

Comme les vecteurs ρv_i sont dans B_E , $R(T, r) \geq n_0$.

3.6. PROPOSITION. — Soient $(E_k)_{k \geq 0}$ une suite d'e. v. n. de dimension d (resp. de dimension ∞), $(T_k)_{k \geq 1}$ des bijections linéaires continues toutes bornées par $e^\nu : T_k : E_k \rightarrow E_{k-1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout

$$v \in E_0 \setminus \{0\} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log} \parallel T^{-n} \cdot v \parallel \leq -\lambda \quad (\text{où } T^{-n} \text{ désigne } T_n^{-1} \circ \dots \circ T_1^{-1}).$$

$$\text{Alors } \forall p \geq 1 \quad \forall \varkappa < \lambda \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \inf \left[1, \frac{R(T_k^p, e^{p \cdot \varkappa})}{d} \right] \geq \frac{\lambda - \varkappa}{v - \varkappa}, \text{ (respective-}$$

$$\text{ment } \forall p \geq 1 \quad \forall \varkappa < \lambda \quad \forall d \geq 1 \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{card} \{ k \in \{ p, \dots, n \} :$$

$$R(T_k^p, e^{p \cdot \varkappa}) \geq d \} \geq \frac{\lambda - \varkappa}{v - \varkappa}.$$

Démonstration. — Elle utilise les mêmes arguments que son homologue dans l'article de Mañé. On commence par construire par récurrence une suite $(v_i^0)_{0 \leq i \leq d}$ de E_0 vérifiant $\parallel v_i^0 \parallel = 1$, $d(v_{i+1}^0, F_i^0) = 1$ où $F_i^0 = \text{vect}(v_i^0, \dots, v_i^0)$. On pose ensuite pour tout $k \geq 0$ $F_i^k = \text{vect}(T^{-k} \cdot v_1^0, \dots, T^{-k} \cdot v_i^0) = T^{-k} \cdot F_i^0$, qui vérifient $T_k \cdot F_i^k = F_i^{k-1}$ pour tout $1 \leq i \leq d$. On construit enfin dans

chaque E_k une suite $(v_i^k)_{1 \leq i \leq d}$ avec $\|v_i^k\| = 1$ et $d(v_{i+1}^k, F_i^k) = 1$ pour tout $1 \leq i \leq d$. Par construction des (v_i^k) , il existe des réels non nuls (λ_i^k) tels que $T_k.v_i^k = \lambda_i^k v_{i-1}^{k-1} + w$ où $w \in F_{i-1}^{k-1}$. Ainsi pour tout $p \geq 1$ $T_k^p.v_i^k = \lambda_i^k \dots \lambda_i^{k-p+1} v_i^{k-p} + w$ avec $w \in F_{i-p}^{k-p}$; pour tout $w' \in F_{i-p}^{k-p}$, $\|T_k^p.v_i^k - w'\| \geq |\lambda_i^k \dots \lambda_i^{k-p+1}|$. On a aussi $T^{-n}.v_i^0 = [\lambda_i^1 \dots \lambda_i^n]^{-1}.v_i^n + w$ avec $w \in F_{i-1}^n$: $\|T^{-n}.v_i^0\| \geq |\lambda_i^1 \dots \lambda_i^n|^{-1}$.

Comme $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log} \|T^{-n}.v_i^0\| \leq -\lambda$, $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \text{Log} |\lambda_i^k| \geq +\lambda$.

Puisque $|\lambda_i^k| \leq e^\nu$ le lemme de Pliss peut s'appliquer :

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{card}(A_n^i) \geq \frac{\lambda - \varkappa}{\nu - \varkappa}$$

où on a posé $A_n^i = \{k \in \{p, \dots, n\} : |\lambda_i^k \dots \lambda_i^{k-p+1}| > e^{p.\varkappa}\}$ pour tout $i \in \mathbb{N}_d$ et $B_k = \{i \in \{1, \dots, d\} : |\lambda_i^k \dots \lambda_i^{k-p+1}| > e^{p.\varkappa}\}$. Par définition de

ces ensembles, $\sum_{i=1}^d \text{card}(A_n^i) = \sum_{k=p}^n \text{card}(B_k)$: ce qui montre donc que

$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=p}^n \text{card}(B_k) \geq d. \frac{\lambda - \varkappa}{\nu - \varkappa}$. Établissons maintenant le lien entre

$R(T_k^p, e^{p.\varkappa})$ et $\text{card} B_k$. Pour tout $i \in B_k$ et $w \in F_{i-1}^k$

$$\|T_k^p.v_i^k - T_k^p.w\| \geq |\lambda_i^k \dots \lambda_i^{k-p+1}| > e^{p.\varkappa},$$

ce qui montre donc $R(T_k^p, e^{p.\varkappa}) \geq \text{card}(B_k)$ d'où $\inf [d, R(T_k^p, e^{p.\varkappa})] \geq \text{card}(B_k)$.

Pour démontrer la deuxième partie, on part de la relation

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=p}^n \inf \left[1, \frac{R(T_k^p, e^{p.\varkappa})}{d} \right] \geq \delta$$

qui est vraie pour tout $d \in \mathbb{N}^*$ (où $\delta = \frac{\lambda - \varkappa}{\nu - \varkappa}$). En particulier elle est vraie

pour dd' . Alors $\frac{1}{n} \sum_{k=p}^n \inf \left[1, \frac{R(T_k^p, e^{p.\varkappa})}{dd'} \right] \leq \frac{1}{n} \left[\text{card}(C_n^{d'}) + \frac{1}{d'}(n - \text{card}(C_n^{d'})) \right]$

où on a défini $C_n^{d'} = \{k \in \{p, \dots, n\} \mid R(T_k^p, e^{p.\varkappa}) \geq dd'\}$. Et l'inégalité

précédente nous dit $\left(1 - \frac{1}{d'}\right) \frac{1}{n} \text{card} C_n^{d'} \geq \frac{1}{n} \sum_{k=p}^n \inf \left[1, \frac{R(T_k^p, e^{p.\varkappa})}{dd'} \right] - \frac{1}{d'}$. Il

suffit de faire tendre d vers $+\infty$ pour obtenir la deuxième partie de la proposition.

3.7. **PREUVE DE POINT a) DU THÉORÈME.** — Soient e^v un majorant de $\|T_x\|$ pour tout $x \in X$, et \mathcal{F} la tribu des événements ϕ -invariants. On peut trouver deux suites d'applications μ -continues ϕ -invariantes $(\lambda_t)_{t \geq 0}$ et $(\varkappa_t)_{t \geq 0}$ qui vérifient

$$i) \quad \varkappa(\bar{\mathcal{C}}, \mathcal{E}) < \varkappa_t < \lambda_t$$

$$ii) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \lambda_t = \varkappa(\bar{\mathcal{C}}, \mathcal{E}) \text{ ponctuellement (en prenant par exemple pour tout } t \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} \varkappa_t &= \mathbb{1}_{\{\varkappa(\bar{\mathcal{C}}, \mathcal{E}) < -\text{Log}(t+1)\}}[-\text{Log}(t+1)] \\ &\quad + \mathbb{1}_{\{\varkappa(\bar{\mathcal{C}}, \mathcal{E}) \geq -\text{Log}(t+1)\}}[\varkappa(\bar{\mathcal{C}}, \mathcal{E}) + \text{Log}(1+t)] \end{aligned}$$

et $\lambda_t = \varkappa_t + \frac{1}{t+1}$). La démonstration sera alors terminée si on établit que

$\dim E_x^{\lambda_t(x)} < +\infty$ pour tout $t \in \mathbb{N}$ et pour presque tout x . Pour simplifier les notations introduisons la fonction $f_{p,t}(x) = R[T_x^p, e^{p \cdot \varkappa_t(x)}]$ qui est μ -continue d'après 3.5, et remarquons dès maintenant que

$$\{f_{p,t} = +\infty\} \subset \{\rho(T_x^p) \geq 2e^{p \cdot \varkappa_t(x)}\} \subset \left\{ \frac{1}{p} \text{Log } \rho(T_x^p) \geq \varkappa_t(x) \right\}$$

pour tout $p \geq 1$.

On choisit maintenant B ϕ -invariant de mesure 1 tel que, pour tout $t \geq 0$, $p \geq 1$, $d \geq 1$, $x \in B$

$$1) \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{card} \{k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \mid f_{p,t}(\phi_x^{-k}) \geq d\} = \mu[\{f_{p,t} \geq d\} \mid \mathcal{F}](x)$$

$$2) \quad \lim_{d \rightarrow +\infty} \mu[\{f_{p,t} \geq d\} \mid \mathcal{F}](x) = \mu[\{f_{p,t} = +\infty\} \mid \mathcal{F}](x)$$

$$3) \quad \mu[\{f_{p,t} = +\infty\} \mid \mathcal{F}](x) \leq \mu\left[\left\{ \frac{1}{p} \text{Log } \rho(T_n^p) \geq \varkappa_t(y) \right\} \mid \mathcal{F}\right](x)$$

$$4) \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} \mu\left[\left\{ \frac{1}{p} \text{Log } \rho(T_y^p) \geq \varkappa_t(y) \right\} \mid \mathcal{F}\right](x) = \mu[\{\varkappa(\bar{\mathcal{C}}, \mathcal{E}) \geq \varkappa_t\} \mid \mathcal{F}](x)$$

$$5) \quad \mu[\{\varkappa(\bar{\mathcal{C}}, \mathcal{E}) \geq \varkappa_t\} \mid \mathcal{F}](x) = \mathbb{1}_{\{\varkappa(\bar{\mathcal{C}}, \mathcal{E}) \geq \varkappa_t\}}(x) = 0.$$

Soient $t \in \mathbb{N}$ et $x \in B$ fixés, si $\dim E_x^{\lambda_t(x)} = +\infty$, alors la proposition 3.6 appliquée à $(E_{\phi_x^{-k}}^{\lambda_t(x)})_{k \geq 0}$, $(T_{\phi_x^{-k}})_{k \geq 1}$, $\lambda_t(x)$, $\varkappa_t(x)$ nous dit que : pour tout $p \geq 1$ et $d \geq 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{card} \{k \in \mathbb{N}_n \mid f_{p,t}(\phi_x^{-k}) \geq d\} \geq \frac{\lambda_t(x) - \varkappa_t(x)}{v - \varkappa_t(x)} > 0$: en contradiction avec (1) à (5).

3.8. **LEMME.** — Soient (E, d) un espace métrique complet et \mathcal{U} une base de filtre sur E . Si $\inf \{\alpha(U) : U \in \mathcal{U}\} = 0$ alors \mathcal{U} possède une valeur d'adhérence (i. e. $\cap \{\bar{U} \mid U \in \mathcal{U}\} \neq \emptyset$).

La démonstration de ce lemme est facile et se ramène au cas d'une suite de parties emboîtées dont le diamètre tend vers 0.

3.9. PROPOSITION. — Soient $(X, \mathcal{B}, \phi, E, \mathcal{C})$ un F. D., $\mathcal{E} = (E_x)_{x \in X}$ un champ de s. e. v. de $G(E)$ \mathcal{C} -invariant $\lambda : X \rightarrow \mathbb{R}$ une application, et $K \subset X$ une partie compacte telle que $\left\{ \begin{array}{l} K \rightarrow L(E) \\ x \mapsto T_{\phi_x^{-k}} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} K \rightarrow G(E) \\ x \mapsto E_{\phi_x^{-k}} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} K \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda(x) \end{array} \right\}$ soient continues pour tout $k \geq 0$, et telle que $\bar{\kappa}(\mathcal{C}, \mathcal{E})(x) < \lambda(x)$ pour tout $x \in K, k \geq 0$. Si $F_p = \{v \in E \mid \exists x \in K : T_x^{-k} \cdot v \text{ existe dans } E_{\phi_x^{-k}} \text{ et } \|T_x^{-k} \cdot v\| \leq e^{-k\lambda(x)}\}$ pour tout $0 \leq k \leq p$ et $F_\infty = \{v \in E \mid \exists x \in K : T_x^{-k} \cdot v \text{ existe dans } E_{\phi_x^{-k}} \text{ et } \|T_x^{-k} \cdot v\| \leq e^{-k\lambda(x)} \text{ pour tout } k \geq 0\}$ alors toute suite $(v_p)_{p \geq 0}$ de vecteurs de E , telle que $v_p \in F_p$ pour tout $p \geq 0$, possède une valeur d'adhérence dans F_∞ , $\left(\text{où on a posé } \bar{\kappa}(\mathcal{C}, \mathcal{E})(x) = \sup_{p \geq 0} \left[\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log } \rho(T_{\phi_x^n}^n \mid E_{\phi_x^{n-p}}) \right] \right)$.

Démonstration. — Soient $(v_p)_{p \geq 0}$ une telle suite et pour tout $p \geq 0$ $x_p \in K$ correspondant à v_p . On suppose que x_p converge vers $x_\infty \in K$. Si on montre que chaque sous-suite de la suite $(T_{x_p}^{-k} \cdot v_p)_{p \geq k}$ possède une valeur d'adhérence dans E , en utilisant un argument classique d'extraction de suite en diagonal, on peut trouver $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \uparrow$ telle que $(T_{x_{\sigma(p)}}^{-k} \cdot v_{\sigma(p)})_{p \geq k}$ converge vers w_k pour tout $k \geq 0$. Grâce à la continuité de $T_{\phi_x^{-k}}$ et de $E_{\phi_x^{-k}}$ sur K , $T_{\phi_{x_\infty}^{-k-1}} \cdot w_{k+1} = w_k$ et $w_k \in E_{\phi_{x_\infty}^{-k}}$ pour tout $k \geq 0$, et donc $w_0 \in F_\infty$.

Pour ne pas compliquer les notations montrons seulement que $(v_p)_{p \geq 0}$ possède une valeur d'adhérence et donc que $\lim_{q \rightarrow +\infty} \alpha(\{v_p : p \geq q\}) = 0$ (lemme 3.8).

$$\forall p \geq k \geq 0 \quad v_p = T_{\phi_{x_p}^{-k}} \circ T_{x_p}^{-k} \cdot v_p \quad \text{et} \quad \|T_{x_p}^{-k} \cdot v_p\| \leq e^{-k\lambda(x_p)}$$

$$\forall 0 < \varepsilon < \lambda(x_\infty) - \bar{\kappa}(\mathcal{C}, \mathcal{E})(x_\infty) \quad \exists p_\varepsilon \quad \forall p \geq p_\varepsilon \quad |\lambda(x_p) - \lambda(x_\infty)| \leq \varepsilon$$

$$\forall p \geq p_\varepsilon \geq k \geq 0 \quad v_p \in e^{-k\lambda(x_\infty) + k\varepsilon} \cdot T_{\phi_{x_\infty}^{-k}} \cdot B_E + \|T_{\phi_{x_p}^{-k}} - T_{\phi_{x_\infty}^{-k}}\| \cdot e^{-k\lambda(x_\infty) + k\varepsilon} \cdot B_E.$$

Comme $\liminf_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \text{Log } \rho(T_{\phi_{x_\infty}^{-k}}^k \mid E_{\phi_{x_\infty}^{-k}}) < \lambda(x_\infty)$, on peut choisir k tel que $\exp[-k\lambda(x_\infty) + k\varepsilon] \rho(T_{\phi_{x_\infty}^{-k}}^k \mid E_{\phi_{x_\infty}^{-k}})$ soit aussi petit que l'on désire, et k étant fixé on peut choisir p grand de manière que $\exp[-k\lambda(x_\infty) + k\varepsilon] \cdot \|T_{\phi_{x_p}^{-k}} - T_{\phi_{x_\infty}^{-k}}\|$ soit petit.

3.10. PREUVE DU POINT b) DU THÉORÈME 3.2. — Soit $\lambda : X \rightarrow \mathbb{R}$ une application μ -continue; et à condition de la modifier sur l'ensemble $\{\lambda \leq \bar{\kappa}(\mathcal{C}, \mathcal{E})\}$, on peut supposer qu'elle vérifie, pour tout $x, \lambda(x) > \bar{\kappa}(\mathcal{C}, \mathcal{E})(x)$. Quitte à diminuer X en prenant le borélien B ϕ -invariant de mesure 1 du point a) du théorème 3.2, on peut admettre que $\dim E_x^\lambda < +\infty$ pour tout $x \in X$ et $\lambda > \bar{\kappa}(\mathcal{C}, \mathcal{E})(x)$. Établissons d'abord la μ -continuité de $(x \rightarrow \dim E_x^\lambda)$, en se servant de la proposition précédente et pour la première fois de la

propriété 1.3. Pour uniformiser les convergences on introduit les notations suivantes :

$$E^{\lambda, M} = \{ v \in E_x \mid T_x^{-k} \cdot v \text{ existe dans } E_{\phi_x^{-k}} \text{ et } \| T_x^{-k} \cdot v \| \leq M \cdot e^{-k \cdot \lambda} \text{ pour tout } k \geq 0 \}$$

$$I_x^{\lambda, M} = \sup \{ n \geq 1 \mid \exists v_1, \dots, v_n \in E_x^{\lambda, M} : \forall i \in \mathbb{N}_n \quad \| v_i \| = 1$$

$$\text{et} \quad d(v_i, \mathbb{R}v_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{R}v_{i-1}) = 1 \}.$$

Et il existe une suite de fonctions μ -continues $(\lambda_t)_{t \geq 0}$ qui vérifie

$$i) \quad \kappa(\mathcal{C}, \mathcal{E}) < \lambda_t < \lambda$$

et

$$ii) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \lambda_t(x) = \lambda(x) \text{ pour tout } x \in X.$$

$$\text{Alors pour tout } x \in X \quad \dim E_x^{\lambda(x)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} (\sup_M I_x^{\lambda_t(x), M}).$$

Il reste donc à montrer que chaque application $(x \rightarrow I_x^{\lambda_t(x), M})$ est μ -continue. Grâce à la propriété 1.3, il existe une suite croissante de compacts $(L_p)_{p \geq 0}$ telle que :

$$1) \quad B = \bigcup_{p \geq 0} L_p \text{ soit } \phi\text{-invariant de mesure } 1.$$

$$2) \quad \text{les applications } \left\{ \begin{array}{l} L_p \rightarrow L(E) \\ x \mapsto T_{\phi_x^{-k}} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} L_p \rightarrow G(E) \\ x \mapsto E_{\phi_x^{-k}} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} L_p \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda_t(x) \end{array} \right\}$$

soient continues $(\forall k, p, t)$.

La proposition 3.9 permet alors de montrer que chaque application $(x \in L_p \mapsto I_x^{\lambda_t(x), M})$ est s. c. i. En effet, si $x_\infty \in L_p$ et $(x_n)_{n \geq 0}$ est une suite de L_p qui tend vers x_∞ et satisfait $I_{x_n}^{\lambda_t(x_n), M} \geq n_0$ pour tout $n \geq n_0$, on peut trouver $(v_1^n, \dots, v_{n_0}^n) \in E_{x_n}^{\lambda_t(x_n), M}$ avec $\| v_i^n \| = 1$ et $d(v_i^n, \mathbb{R}v_1^n \oplus \dots \oplus \mathbb{R}v_{i-1}^n) = 1$, et donc extraire une sous-suite $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \uparrow$ telle que $(v_i^{\sigma(n)})_{n \geq 0}$ converge vers des vecteurs w_i avec $\| w_i \| = 1$, $d(w_i, \mathbb{R}w_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{R}w_{i-1}) = 1$, $w_i \in E_{x_\infty}^{\lambda_t(x_\infty), M}$: ce qui entraîne $I_{x_\infty}^{\lambda_t(x_\infty), M} \geq n_0$. Pour montrer la μ -continuité de $(x \rightarrow E_x^{\lambda(x)})$, on reprend des compacts $(L_p)_{p \geq 0}$ vérifiant (1), (2) et (3)

$$\forall p \geq 0 \exists t_p \geq 0 \exists M_p \geq 0 \forall x \in L_p \quad \dim E_x^{\lambda(x)} = I_x^{\lambda_{t_p}(x), M_p} = \dim E_{x_p}^{\lambda_{t_p}(x)} = \text{constante}.$$

Alors le raisonnement précédent et la proposition B.2.3 montrent que

$$\text{l'application } \left\{ \begin{array}{l} L_p \rightarrow G(E) \\ x \mapsto E_x^{\lambda(x)} \end{array} \right\} \text{ est continue.}$$

Puisque $(x \rightarrow \dim E_x^{\lambda(\mathcal{C}, \mathcal{E})(x)})$ est une application μ -continue et ϕ -invariante, quitte à découper X en une réunion dénombrable de parties boréliennes ϕ -invariantes sur chacune desquelles $(x \rightarrow \dim E_x^{\lambda(\mathcal{C}, \mathcal{E})(x)})$ est constante, on peut supposer à partir de maintenant que

$$\dim E_x^{\lambda(\mathcal{C}, \mathcal{E})(x)} = d(\forall x \in X).$$

3.11. PREUVE DU POINT c) DU THÉORÈME 3.2. — On désigne toujours par \mathcal{I} la tribu des invariants et par e^v un majorant de $\| T_x \|$ pour tout $x \in X$.

Comme précédemment on choisit une suite de fonctions $(\lambda_t)_{t \geq 0}$ μ -continues ϕ -invariantes qui vérifient

i) $\kappa(\mathcal{C}, \mathcal{E}) < \lambda_t < \lambda(\mathcal{C}, \mathcal{E})$

et

ii) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \lambda_t(x) = \lambda(\mathcal{C}, \mathcal{E})(x)$ pour tout $x \in X$; et la suite consiste à montrer μ -presque partout que $\dim E_x^{\lambda_t(x)} \geq 1$ pour tout $t \geq 0$. Pour cela introduisons pour tout $p \geq 0$ et $t \geq 0$ l'ensemble :

$A_{p,t} = \{ x \in X \mid \exists v \in E_x \setminus \{0\} : T_x^{-k} \cdot v \text{ existe dans } E_{\phi_x^{-k}} \text{ et } \|T_x^{-k} \cdot v\| < e^{-k \cdot \lambda_t(x)} \|v\| \text{ pour tout } 0 \leq k \leq p \}$

et remarquons dès maintenant que

$$\bigcap_{p \geq 0} \downarrow A_{p,t} \cap \{ \bar{\kappa}(\mathcal{C}, \mathcal{E}) < \lambda_t \} \subset \{ \dim E_x^{\lambda_t(x)} \geq 1 \}$$

(où $\bar{\kappa}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ a été défini dans la proposition 3.9) en appliquant la proposition 3.9 (le compact K se réduit ici à un singleton). Pour continuer la démonstration, admettons pour le moment que chaque $A_{p,t}$ est dans la tribu complétée de \mathcal{B} par μ . Il existe alors un borélien ϕ -invariant de mesure 1 tel que pour tout $x \in B$ on ait :

- 1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log} \|T_x^n | E_x\| = \lambda(\mathcal{C}, \mathcal{E})(x)$
- 2) $\forall p \geq 0 \forall t \geq 0 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{card} \{ i \in \mathbb{N}_n \mid \phi^i(x) \in A_{p,t} \} = \mu[A_{p,t} | \mathcal{I}](x)$
- 3) $\forall t \geq 0 \lim_{p \rightarrow +\infty} \mu[A_{p,t} | \mathcal{I}](x) = \mu[\bigcap_{p \geq 0} A_{p,t} | \mathcal{I}](x)$
- 4) $\forall t \geq 0 \mu[\bigcap_{p \geq 0} A_{p,t} | \mathcal{I}](x) \leq \mu[\{ \dim E_y^{\lambda_t(y)} \geq 1 \} | \mathcal{I}](x)$
- 5) $\mu[\{ \dim E_y^{\lambda_t(y)} \geq 1 \} | \mathcal{I}](x) = \mathbb{1}_{\{ \dim E_y^{\lambda_t(y)} \geq 1 \}}(x)$.

Soit $x \in B$ alors

$$\begin{aligned} \exists n_0(x) \forall n \geq n_0(x) \|T_x^n | E_x\| &> e^{n\lambda'_t(x)}, \exists w_n \in E_x \setminus \{0\} \\ &\|T_x^n \cdot w_n\| > e^{n\lambda'_t(x)} \|w_n\| \quad \left(\text{où } \lambda'_t = \frac{\lambda(\mathcal{C}, \mathcal{E}) + \lambda_t}{2} \right) \\ \forall n \geq n_0(x) \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \text{Log} \frac{\|T_x^k \cdot w_n\|}{\|T_x^{k-1} \cdot w_n\|} &> \lambda'_t(x) > \lambda_t(x) \\ \frac{1}{n} \text{card} \{ i \in \{1, \dots, n\} \mid \forall 1 \leq k \leq p \wedge i &\|T_x^i \cdot w_n\| > e^{k\lambda_t(x)} \cdot \|T_x^{i-k} \cdot w_n\| \} \\ &\geq \frac{\lambda'_t(x) - \lambda_t(x)}{v - \lambda_t(x)} \quad (\text{lemme 3.4}). \end{aligned}$$

Si i appartient à l'ensemble précédent en posant $v = T_x^i \cdot w_n$, on a pour tout $0 \leq k \leq p$ $\| T_{\phi_x^k}^{-k} \cdot v \| < e^{-k\lambda_t(x)} \| v \|$, et donc $\phi^i(x) \in A_{p,t}$. Ainsi

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{card} \{ i \in \mathbb{N}_n \mid \phi^i(x) \in A_{p,t} \} \geq \delta_t(x) \quad \text{pour tout } p \geq 0, t \geq 0, x \in B$$

$$\left(\text{où } \delta_t(x) = \frac{\lambda'_t(x) - \lambda_t(x)}{v - \lambda_t(x)} \right), \text{ et donc } B \subset \{ \dim E_y^{\lambda_t(y)} \geq 1 \}.$$

3.12. PREUVE DU POINT d) DU THÉORÈME 3.2. — Rappelons qu'il existe un réel v tel que $\| T_x \| \leq e^v (\forall x \in X)$ et un entier $d \geq 1$ tel que

$$\dim E_x^{\lambda(\bar{\mathcal{C}}, \mathcal{E})(x)} = d (\forall x \in X).$$

La convergence uniforme de la suite $\left(\frac{1}{n} \text{Log} \| T_x^{-n} \cdot v \| \right)_{n \geq 1}$ sur $E_x^{\lambda(\bar{\mathcal{C}}, \mathcal{E})(x)} \cap S_E$ résulte d'une part de l'existence d'une base finie dans $E_x^{\lambda(\bar{\mathcal{C}}, \mathcal{E})(x)}(v_1, \dots, v_d)$ qui vérifie $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log} \| T_x^{-n} \cdot v_i \| \leq -\lambda(\bar{\mathcal{C}}, \mathcal{E})(x)$ et d'autre part de la formule $\| v \| \leq \| T_{\phi_x^{-n}}^n | E_{\phi_x^{-n}} \| \cdot \| T_x^{-n} \cdot v \|$ pour tout $v \in E_x^{\lambda(\bar{\mathcal{C}}, \mathcal{E})(x)}$, car il suffit alors de choisir $x \in X$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log} \| T_{\phi_x^{-n}}^n | E_{\phi_x^{-n}} \| = \lambda(\bar{\mathcal{C}}, \mathcal{E})(x)$; ce qui est possible μ -presque partout d'après la remarque A.3.

La convergence uniforme de la suite $\left(\frac{1}{n} \text{Log} \| T_x^n \cdot v \| \right)_{n \geq 1}$ sur $E_x^{\lambda(\bar{\mathcal{C}}, \mathcal{E})(x)} \cap S_E$ est moins facile à établir car $(x \mapsto \text{Log}^+ \| T_x^{-n} | E_x^{\lambda(\bar{\mathcal{C}}, \mathcal{E})(x)} \|)$ n'est plus forcément intégrable. Remarquons d'abord que $\left\{ \begin{array}{l} X \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto \| T_x^{-n} | E_x^{\lambda(\bar{\mathcal{C}}, \mathcal{E})(x)} \| \end{array} \right\}$ est bien μ -continue d'après la proposition B.3.1 et que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log} \| T_x^{-n} | E_x^{\lambda(\bar{\mathcal{C}}, \mathcal{E})(x)} \| \leq -\lambda(\bar{\mathcal{C}}, \mathcal{E})(x) \quad \text{pour tout } x \in X.$$

On peut ainsi définir pour tout $\varepsilon > 0$ la fonction

$$A_\varepsilon(x) = \sup_{n \geq 0} [\| T_x^{-n} | E_x^{\lambda(\bar{\mathcal{C}}, \mathcal{E})(x)} \| \exp(n\lambda(\bar{\mathcal{C}}, \mathcal{E})(x) - n\varepsilon)] \quad (\forall x \in X).$$

Comme $\text{Log} A_\varepsilon(x) - \text{Log} A_\varepsilon(\phi_x) \leq v - \lambda(\bar{\mathcal{C}}, \mathcal{E})(x) + \varepsilon$ pour tout $x \in X$, on en déduit que, μ -p. p. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log} A_\varepsilon(\phi_x^n) = 0$ d'après la proposition A.5; et puisque, pour tout $n \geq 0$ et $x \in X$

$$\| T_{\phi_x^n}^{-n} | E_{\phi_x^n}^{\lambda(\bar{\mathcal{C}}, \mathcal{E})(\phi_x^n)} \| \leq A_\varepsilon(\phi_x^n) \exp[-n \cdot \lambda(\bar{\mathcal{C}}, \mathcal{E})(\phi_x^n) + n\varepsilon],$$

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log} \| T_{\phi_x^n}^{-n} | E_{\phi_x^n}^{\lambda(\bar{\mathcal{C}}, \mathcal{E})(\phi_x^n)} \| \leq -\lambda(\bar{\mathcal{C}}, \mathcal{E})(x) \quad \text{pour presque tout } x \in X.$$

La démonstration s'achève alors de la même manière en utilisant les formules

$$\|v\| \leq \|T_{\phi_x^n}^{-1} | E_{\phi_x^n}^{\lambda(\tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{E})(x)} | \| \cdot \| T_{\phi_x^n} \cdot v \|$$

et

$$\|T_{\phi_x^n} \cdot v\| \leq \|T_{\phi_x^n} | E_x | \| \cdot \| v \| \quad (\forall v \in E_x^{\lambda(\tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{E})(x)}).$$

3.13. PREUVE DU POINT e) DU THÉORÈME 3.2. — La démonstration de cette dernière partie procède en trois étapes. On commence par construire un champ supplémentaire $\mathcal{F} = (F_x)_{x \in X}$ à $(E_x^{\lambda(\tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{E})(x)})_{x \in X}$ dans \mathcal{E} tel que $\|\pi_{(E_x^{\lambda(\tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{E})(x)} | F_x)}\|$ soit majorée par $\dim E_x^{\lambda(\tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{E})(x)} + 1$, μ -presque partout. Les détails d'une telle construction se trouvent dans l'appendice B. Dans la deuxième partie on montre que l'opérateur $\tilde{T}_x : F_x \rightarrow F_{\phi_x}$ défini au moyen des projections vérifie $\lambda(\tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{F}) < \lambda(\tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{E})$ presque partout. La démonstration se fait par l'absurde et utilise la convergence uniforme de

$$\left(\frac{1}{n} \text{Log} \| T_{\phi_x^n} \cdot v \| \right)_{n \geq 1} \quad \text{pour} \quad v \in E_x^{\lambda(\tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{E})(x)} \cap S$$

et de

$$\left(\frac{1}{n} \text{Log} \| \tilde{T}_x^n \cdot v \| \right)_{n \geq 1} \quad \text{pour} \quad v \in F_x^{\lambda(\tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{F})(x)} \cap S.$$

Enfin dans la dernière partie, on construit $(F'_x)_{x \in X}$ où F'_x est le noyau d'un projecteur U_x . U_x est défini par une série qui enregistre à tous les instants n le décalage entre $\tilde{T}_{\phi_x^n}$ et $T_{\phi_x^n}$.

Pour alléger les notations on note pour toute la suite

$$\lambda = \lambda(\tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{E}) \geq \kappa = \kappa(\tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{E}),$$

un entier $d \geq 1$ tel que $\dim E_x^{\lambda(x)} = d (\forall x \in X)$ et v un réel tel que $\|T_x\| \leq e^v (\forall x \in X)$.

a) On construit d'abord un champ μ -continu $\mathcal{F} = (F_x)_{x \in X}$ tel que $F_x \oplus_{\text{s.t.}} E_x^{\lambda(x)} = E_x$ et $\|\pi_{(E_x^{\lambda(x)} | F_x)}\| \leq d + 1$ μ -presque partout de la manière suivante. Comme $\left\{ \begin{matrix} X \rightarrow G(E) \\ x \mapsto E_x \end{matrix} \right\}$ et $\left\{ \begin{matrix} X \rightarrow G(E) \\ x \mapsto E_x^{\lambda(x)} \end{matrix} \right\}$ sont des applications μ -continues, il existe un borélien B ϕ -invariant de mesure 1 et une suite de compacts $(K_p)_{p \geq 0}$ deux à deux disjoints tels que $B = \bigcup_{p \geq 0} K_p$ et $\left\{ \begin{matrix} K_p \rightarrow G(E) \\ x \mapsto E_x \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} K_p \rightarrow G(E) \\ x \mapsto E_x^{\lambda(x)} \end{matrix} \right\}$ soient des applications continues. La proposition B.4.4 assure alors l'existence de deux champs continus supplémentaires sur chaque K_p : $\left\{ \begin{matrix} K_p \rightarrow G(E) \\ x \mapsto E'_x \end{matrix} \right\}$ et $\left\{ \begin{matrix} K_p \rightarrow G(E) \\ x \mapsto G_x \end{matrix} \right\}$ tels que, pour tout $x \in B$, $E_x \oplus_{\text{s.t.}} E'_x = E$, $E_x^{\lambda(x)} \oplus_{\text{s.t.}} G_x = E$, $\|\pi_{(E_x^{\lambda(x)} | G_x)}\| \leq d + 1$. Et on

définit $F_x = E_x \cap G_x$ pour $x \in B$ et $F_x = E$ pour $x \in X \setminus B$. Ainsi $F_x = \text{Im } p_x$ et $E_x^{\lambda(x)} \oplus_{s.t.} E'_x = \ker p_x$ ($\forall x \in B$) où p_x est le projecteur $p_x = \pi_{(G_x || E_x^{\lambda(x)})} \circ \pi_{(E_x || E'_x)}$ avec $\| p_x | E_x \| = \| \pi_{(F_x || E_x^{\lambda(x)})} \| \leq \| \pi_{(G_x || E_x^{\lambda(x)})} \| \leq d + 2$ ($\forall x \in B$). Comme $\left\{ \begin{array}{l} X \rightarrow L(E) \\ x \mapsto p_x \end{array} \right\}$ est μ -continue (continue en fait sur chaque K_p), $\left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow G(E) \\ x \mapsto F_x \end{array} \right\}$ est aussi μ -continue.

b) On définit maintenant un nouvel opérateur $\tilde{T}_x \in L(E)$ pour tout $x \in X$ tel que i) \mathcal{F} est $\tilde{\mathcal{C}}$ -invariant ($\tilde{\mathcal{C}} = (\tilde{T}_x)_{x \in X}$), ii) $\left\{ \begin{array}{l} X \rightarrow L(E) \\ x \mapsto \tilde{T}_x \end{array} \right\}$ est μ -continue, iii) la restriction de \tilde{T}_x à F_x est injective pour tout $x \in X$, iv) $\sup_X \| \tilde{T}_x \| < +\infty$, en prenant $\tilde{T}_x = p_{\phi_x} \circ T_x \circ p_x$ pour tout $x \in B$ et $\tilde{T}_x = T_x$ pour tout $x \in X \setminus B$.

Remarquons que la formule de composition des opérateurs \tilde{T}_x^n s'écrit simplement : $\forall n \geq 0 \forall x \in X \tilde{T}_x^n = p_{\phi_x^n} \circ T_x^n \circ p_x$ (puisque le champ $(E_x^{\lambda(x)})_{x \in X}$ est invariant par $\tilde{\mathcal{C}}$). L'étape importante de b) consiste à montrer que $\lambda(\tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{F}) < \lambda(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ μ -p. p. Pour démontrer cette inégalité, on raisonne par l'absurde, et à condition de réduire l'espace X (la relation précédente est invariante par ϕ) on peut supposer que $\lambda(x) = \lambda(\mathcal{C}, \mathcal{E})(x) = \lambda(\tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{F})(x)$ pour tout $x \in X$; cette simplification permet alors d'appliquer le résultat a) . . . d) du théorème 3.2 au nouveau F. D. inversible $(X, \mathcal{B}, \phi, E, \tilde{\mathcal{C}})$ et au champ \mathcal{F} .

Comme $\kappa(\mathcal{C}, \mathcal{F}) \leq \kappa(\mathcal{C}, \mathcal{E}) < \lambda(\tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{F})$, il existe un borélien B ϕ -invariant de mesure 1 tel que $\left\{ \begin{array}{l} \bar{X} \rightarrow G(E) \\ x \mapsto F_x^{\lambda(x)} \end{array} \right\}$ soit μ -continue, $1 \leq \dim F_x^{\lambda(x)} < +\infty$

($\forall x \in B$). On note alors $H_x = F_x^{\lambda(x)} \oplus E_x^{\lambda(x)}$ pour tout $x \in B$ et $H_x = \{0\}$ pour tout $x \in X \setminus B$: ce qui définit un champ $\mathcal{H} = (H_x)_{x \in X}$ μ -continu de s. e. v. de dimension finie de E , $\tilde{\mathcal{C}}$ -invariant, tel que T_x soit une bijection de H_x sur H_{ϕ_x} pour tout $x \in X$, et tel que $\dim H_x \geq 1$ μ -p. p. Montrons maintenant que, μ -p. p. $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log} \| T_{\phi_x^n}^- | H_{\phi_x^n} \| > -\lambda(x)$. Sinon, en utilisant le même raisonnement qu'en 3.12 on obtiendrait sur un ensemble non négligeable $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log} \| T_x^{-n} | H_x \| \leq -\lambda(x)$ et on aurait donc $F_x^{\lambda(x)} \subset E_x^{\lambda(x)}$ non presque sûrement. Il est ainsi possible de choisir $B \in \mathcal{B}$ ϕ -invariant de mesure 1 vérifiant les quatre conditions, pour tout $x \in B$,

$$1) \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log} \| T_{\phi_x^n}^- | H_{\phi_x^n} \| > -\lambda(x)$$

$$2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log} \| T_{\phi_x^n}^- | F_{\phi_x^n}^{\lambda(x)} \| = -\lambda(x)$$

- 3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log} \|\mathbf{T}_{\phi_x^n}^- | \mathbf{E}_{\phi_x^n}^{\lambda(x)}\| = -\lambda(x)$
- 4) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log} \|\mathbf{T}_x^n | \mathbf{E}_x\| = \lambda(x)$.

Montrons qu'un point x vérifiant (1) . . . (4) amène une contradiction. Choisissons deux réels α, β tels que $-\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log} \|\mathbf{T}_{\phi_x^n}^- | \mathbf{H}_{\phi_x^n}\| < \alpha < \beta < \lambda(x)$. Alors il existe $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \uparrow$ telle que :

$$\forall n \geq 0 \quad \|\mathbf{T}_{\phi_x^{\sigma(n)}}^- | \mathbf{H}_{\phi_x^{\sigma(n)}}\| > e^{-\sigma(n)\alpha}, \quad \|\tilde{\mathbf{T}}_{\phi_x^{\sigma(n)}}^- | \mathbf{F}_{\phi_x^{\sigma(n)}}^{\lambda(x)}\| \leq e^{-\sigma(n)\beta},$$

$$\|\tilde{\mathbf{T}}_{\phi_x^{\sigma(n)}}^- | \mathbf{E}_{\phi_x^{\sigma(n)}}^{\lambda(x)}\| \leq e^{-\sigma(n)\beta} .$$

Pour simplifier les notations on suppose que $\sigma = \text{Id}$.

$$\forall n \geq 0 \quad \exists u_n \in \mathbf{H}_x, \quad \|u_n\| = 1 \quad \text{et} \quad \|\mathbf{T}_x^n \cdot u_n\| \leq e^{n\alpha}$$

$$u_n = v_n + w_n \quad \text{où} \quad v_n \in \mathbf{E}_x^{\lambda(x)} \quad \text{et} \quad w_n \in \mathbf{F}_x^{\lambda(x)}$$

$$\|\tilde{\mathbf{T}}_x^n \cdot w_n\| \leq \|p_{\phi_x^n} | \mathbf{E}_{\phi_x^n}\| \cdot \|\mathbf{T}_x^n \cdot u_n\|$$

$$\|w_n\| \leq \|\tilde{\mathbf{T}}_{\phi_x^n}^- | \mathbf{F}_{\phi_x^n}^{\lambda(x)}\| \cdot \|\tilde{\mathbf{T}}_x^n \cdot w_n\| \leq \|p_{\phi_x^n} | \mathbf{E}_{\phi_x^n}\| \cdot e^{+n(\alpha-\beta)}$$

$$\|v_n\| \leq \|\mathbf{T}_x^n \cdot v_n\| \cdot \|\mathbf{T}_{\phi_x^n}^- | \mathbf{E}_{\phi_x^n}^{\lambda(x)}\| \leq [\|\mathbf{T}_x^n \cdot u_n\| + \|\mathbf{T}_x^n \cdot w_n\|] \cdot \|\mathbf{T}_{\phi_x^n}^- | \mathbf{E}_{\phi_x^n}^{\lambda(x)}\|$$

$$1 = \|u_n\| \leq \|v_n\| + \|w_n\| \leq e^{-n(\beta-\alpha)} [1 + \|p_{\phi_x^n} | \mathbf{E}_{\phi_x^n}\| \cdot (1 + \|\mathbf{T}_x^n | \mathbf{E}_x\| \cdot e^{-n\beta})] .$$

Si on impose en plus $\lambda(x) - \beta < \beta - \alpha$, le membre de droite tend vers 0.

c) Soit \mathbf{B} un borélien ϕ -invariant de mesure 1 et $(\mathbf{L}_p)_{p \geq 0}$ une suite croissante de compacts tels que :

$$\mathbf{B} = \bigcup_{p \geq 0} \mathbf{L}_p, \quad \forall p \geq 0 \quad \forall k \geq 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{L}_p \rightarrow \mathbf{L}(\mathbf{E}) \\ x \mapsto \tilde{\mathbf{T}}_x^k \end{array} \right\},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{L}_p \rightarrow \mathbf{L}(\mathbf{E}) \\ x \mapsto (\mathbf{T}_{\phi_x^k}^- | \mathbf{E}_{\phi_x^k}^{\lambda(x)}) \circ \pi(\mathbf{E}_{\phi_x^k}^{\lambda(x)} | \mathbf{G}_{\phi_x^k}) \end{array} \right\},$$

$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{L}_p \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda(x) \end{array} \right\}$ et $\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{L}_p \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \tilde{\lambda}(x) = \lambda(\tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{F})(x) \end{array} \right\}$ sont continues, pour tout $x \in \mathbf{B}$, $\tilde{\lambda}(x) < \lambda(x)$,

$$\tilde{\lambda}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log} \|\tilde{\mathbf{T}}_x^n | \mathbf{F}_x\|, \quad -\lambda(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log} \|\mathbf{T}_{\phi_x^n}^- | \mathbf{E}_{\phi_x^n}^{\lambda(x)}\| .$$

La construction d'un champ supplémentaire invariant \mathcal{F}' devient possible. On cherche une famille continue de projecteurs $(\mathbf{U}_x)_{x \in \mathbf{B}}$ de $\mathbf{L}(\mathbf{E})$ qui vérifient :

$$\mathbf{F}'_x = \ker \mathbf{U}_x \subset \mathbf{E}_x \quad \text{et} \quad \text{Im } \mathbf{U}_x = \mathbf{E}_x^{\lambda(x)} \underset{\text{s.t.}}{\oplus} \mathbf{E}'_x \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{B} .$$

Si $v \in \mathbf{F}_x$, $\mathbf{T}_x(v - \mathbf{U}_x v) \in \mathbf{F}'_{\phi_x}$, il existe $w = \tilde{\mathbf{T}}_x v$ tel que $\mathbf{T}_x(v - \mathbf{U}_x \cdot v) = w - \mathbf{U}_{\phi_x}(w)$

alors $T_x \circ U_x(v) = q_{\phi_x} \circ T_x(v) + U_{\phi_x} \circ \tilde{T}_x(v)$ (où $q_x = Id - p_x$ pour tout $x \in B$).

En posant $S_x = (T_{\phi_x}^{-1} | E_{\phi_x}^{\lambda(x)}) q_{\phi_x} T_x p_x$ pour tout $x \in B$.

On a

$$\begin{aligned} U_x(v) &= S_x(v) + (T_{\phi_x}^{-1} | E_{\phi_x}^{\lambda(x)}) U_{\phi_x} \tilde{T}_x(v) \\ &= S_x(v) + (T_{\phi_x}^{-1} | E_{\phi_x}^{\lambda(x)}) S_x \tilde{T}_x(v) + (T_{\phi_x}^{-2} | E_{\phi_x}^{\lambda(x)}) U_{\phi_x} \tilde{T}_x^2(v) \end{aligned}$$

et ainsi de suite.

Finalement pour tout $x \in B$ on pose

$$\begin{aligned} U_x &= q_x + \sum_{k \geq 0} (T_{\phi_x^k}^{-k} | E_{\phi_x^k}^{\lambda(x)}) S_{\phi_x^k} \tilde{T}_x^k \\ &= q_x + \sum_{k \geq 0} (T_{\phi_x^{k+1}}^{-k-1} | E_{\phi_x^{k+1}}^{\lambda(x)}) \circ (q_{\phi_x^{k+1}} T_{\phi_x^k} p_{\phi_x^k}) \circ \tilde{T}_x^k p_x \end{aligned}$$

qui existe bien dans $L(E)$ ($\| q_{\phi_x^{k+1}} T_{\phi_x^k} p_{\phi_x^k} | E_{\phi_x^k} \| \leq e^v \cdot (d+2)^2, \forall k \geq 0$) et chaque application $\left\{ \begin{array}{l} L_p \rightarrow L(E) \\ x \mapsto U_x \end{array} \right\}$ est continue. La famille $(U_x)_{x \in B}$ con-

vient : U_x vaut l'identité sur $E_x' \oplus E_x = \ker p_x$ et $\text{Im } U_x \subset E_x \oplus E_x'$, donc U_x est un projecteur de $L(E)$ ($\forall x \in B$).

$$\pi_{(E_x^{\lambda(x)} | F_x')} = (U_x | E_x), \quad \|\pi_{(E_x^{\lambda(x)} | F_x')}\| \leq C_1 \cdot \sum_{k \geq 0} \| T_{\phi_x^{k+1}}^{-k-1} | E_{\phi_x^{k+1}} \| \cdot \| \tilde{T}_x^k | F_x \| + C_2$$

où $C_1 = \sup \{ \| q_{\phi_x^{k+1}} T_{\phi_x^k} p_{\phi_x^k} | E_{\phi_x^k} \| \cdot \| p_x | E_x \| \mid x \in B \text{ et } k \geq 0 \}$

$$C_2 = \| q_x | E_x \|.$$

Pour montrer la propriété sur les angles énoncés dans le théorème 3.2, on choisit deux applications μ -continues ϕ -invariantes λ_1 et $\tilde{\lambda}_1$ qui vérifient pour tout $x \in B$ $\tilde{\lambda}(x) < \tilde{\lambda}_1(x) < \lambda_1(x) < \lambda(x)$, et on pose pour tout

$$x \in B : \alpha(x) = \sup_{n \geq 0} [\| T_{\phi_x^n}^{-n} | E_{\phi_x^n} \| e^{n\lambda_1(x)}]$$

$$\text{et} \quad \tilde{\alpha}(x) = \sup_{n \geq 0} [\| \tilde{T}_x^n | F_x \| e^{-n\tilde{\lambda}_1(x)}].$$

Comme $\text{Log } \alpha(\phi_x) - \text{Log } \alpha(x) \leq v - \lambda_1(x)$ et $\text{Log } \tilde{\alpha}(x) - \text{Log } \tilde{\alpha}(\phi_x) \leq v - \tilde{\lambda}_1(x)$, on en déduit en utilisant le corollaire A.6 que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log } \alpha(\phi_x^n) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log } \tilde{\alpha}(\phi_x^n) = 0$ μ -p. p. Mais

$$\|\pi_{(E_x^{\lambda(x)} | F_x')}\| \leq C_1 \alpha(x) \tilde{\alpha}(x) \sum_{k \geq 0} e^{-(k+1)\lambda_1(x) + k\tilde{\lambda}_1(x)} + C_2 \leq C_3 \tilde{\alpha}(x) \alpha(x) \beta(x)$$

où $\beta(x) = \sum_{k \geq 0} \exp [-k\lambda_1(x) + k\tilde{\lambda}_1(x)] (\forall x \in B)$. Et comme pour presque tout x

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log} \left[\sup_{p \in \mathbb{Z}} e^{-|p|\varepsilon} \cdot \alpha(\phi_x^p) \right] = 0$$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log} \left[\sup_{p \in \mathbb{Z}} e^{-|p|\varepsilon} \cdot \tilde{\alpha}(\phi_x^p) \right] = 0, \quad \mu\text{-p. p.}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log} \left[\sup_{p \in \mathbb{Z}} e^{-|p|\varepsilon} \cdot \|\pi_{(E_{\phi_x^p}^{\lambda(x)} \| F_{\phi_x^p}')} \|\right] = 0.$$

4. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.3

La démonstration se fait en deux parties, dans 4.1 on conserve d'abord l'hypothèse d'injectivité des opérateurs T_x , puis dans 4.3 le cas général est traité en introduisant une extension du fibré dynamique lui-même. Désormais on se fixe un F. D. $(X, \mathcal{B}, \phi, E, \tilde{\mathcal{C}})$ où X est un espace métrique compact et μ une mesure de probabilité sur (X, \mathcal{B}) ϕ -invariante telle que $\tilde{\mathcal{C}}$ soit μ -continue et telle que $\int \text{Log}^+ \|T_x\| d\mu < +\infty$. Et comme dans le chapitre 3 on suppose en fait que $\|T_x\| \leq e^\nu (\forall x \in X)$.

4.1. CAS OU T_x EST INJECTIF POUR TOUT $x \in X$. — L'application du théorème A.7 au système dynamique mesuré $(X, \mathcal{B}, \mu, \phi)$ nous permet de supposer que ϕ est surjective et par conséquent de construire l'extension naturelle de $(X, \mathcal{B}, \phi, \mu)$ notée $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\phi}, \tilde{\mu})$ et $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ la surjection associée. Définissons le nouveau F. D. $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\phi}, E, \tilde{\mathcal{C}})$ par $\tilde{T}_x = T_{\pi(x)} (\forall x \in \tilde{X})$. Alors $\tilde{\mathcal{C}}$ et $\tilde{\mu}$ -continue, $\tilde{T}_x^n = T_{\pi(x)}^n (\forall x \in \tilde{X}) (\forall n \geq 0)$, $\int \text{Log}^+ \|\tilde{T}_x\| d\tilde{\mu} = \int \text{Log}^+ \|T_x\| d\mu$

Soient $\tilde{\Sigma}$ et Λ l'ensemble des points réguliers des deux F. D., alors $\pi(\tilde{\Sigma}_i) \subset \Lambda_i (\forall i \in \overline{\mathbb{N}})$. Il existe $\tilde{B} \in \tilde{\mathcal{B}}$ réunion dénombrable de compacts de mesure 1 pour $\tilde{\mu}$ satisfaisant aux conditions a) . . . e) du théorème 2.2, alors $\pi(\tilde{B}) = B \in \mathcal{B}, \mu(B) = 1, B \subset \phi^{-1}(B)$, et pour chaque $x \in B$ et y un antécédent de x par π on définit les fonctions λ_i, E_i, F_i par $\lambda_i(x) = \tilde{\lambda}_i(y), E_i(x) = \tilde{E}_i(y), F_i(x) = \tilde{F}_i(y)$ (indépendamment du point y). Puisque les applications $\lambda_i \circ \pi, E_i \circ \pi, F_i \circ \pi$ sont μ -continues sur $\tilde{\Sigma}$ et que λ_i, E_i, F_i sont constantes sur $B \cap \pi^{-1}(x)$ pour tout $x \in X$, les applications λ_i, E_i, F_i sont donc, d'après la remarque A.9, μ -continues.

Le lemme suivant permet de comparer le comportement de deux suites lorsque l'une d'entre elles est perturbée par un coefficient qui tend vite vers 0.

4.2. LEMME. — Soient $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(\gamma_n)_{n \geq 0}$ deux suites réelles vérifiant les propriétés suivantes :

- i) $\forall m, n, a_{m+n} \leq a_m + n \cdot v$
- ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \gamma_n = -\infty$
- iii) $\forall \mu < 0 \sup \{ p \geq 0 \mid \gamma_p \geq (n+p)\mu \} = o(n)$.

(Les deux dernières conditions assurent la décroissance rapide de la suite $(\gamma_n)_{n \geq 0}$).

Si on appelle $b_n = \sup_{0 \leq p \leq n} (a_{n-p} + \gamma_p)$ ($\forall n \geq 0$), alors

$$\underline{\lim} \frac{b_n}{n} \leq \underline{\lim} \frac{a_n}{n} \leq \overline{\lim} \frac{a_n}{n} \leq \overline{\lim} \frac{b_n}{n}.$$

Démonstration. — L'inégalité $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n}{n}$ est évidente. Pour tout $n \geq 0$ $a_n \leq a_0 + n \cdot v$, ainsi $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} \leq v$. Pour tout $\mu \in \mathbb{R}^-$ et $n \geq 0$, appelons $P_\mu(n) = \sup \{ p \geq 0 \mid \gamma_p \geq (p+n)\mu \}$. Alors si $\mu < 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_\mu(n) = +\infty$ (car $(P_\mu(n))_{n \geq 0}$ est une suite croissante et si elle était bornée par P aurait $\gamma_{p+1} \leq (P+1+n)\mu$ ($\forall n \geq 0$)). Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} < \lambda < v+1$ et posons $\mu = \lambda - v - 1 < 0$. Il existe une sous-suite $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \uparrow$ telle que $\frac{a_{\sigma(n)}}{\sigma(n)} \leq \lambda$ pour tout $n \geq 0$. Pour simplifier l'écriture on suppose que $\sigma = \text{Id}$.

Si $0 \leq q \leq P_\mu(n)$, $\gamma_q + a_{n+P_\mu(n)-q} \leq \Gamma + (P_\mu(n)-q)v + a_n$ (où $\Gamma = \sup_{q \geq 0} \gamma_q$)
 , $\gamma_q + a_{n+P_\mu(n)-q} \leq \Gamma + P_\mu(n) \cdot (v-\lambda) + [P_\mu(n)+n]\lambda$.

Si $q > P_\mu(n)$, $\gamma_q + a_{n+P_\mu(n)-q} \leq (q+n)\mu + nv \leq (P_\mu(n)+n)\lambda$.

Ce qui montre que $\frac{1}{P_\mu(n)+n} b_{P_\mu(n)+n} \leq \frac{\Gamma + P_\mu(n) \cdot (v-\lambda)}{P_\mu(n)+n} + \lambda$ et donc $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n}{n} \leq \lambda$.

4.3. CAS GÉNÉRAL. — Soit $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ une suite strictement positive décroissante qui tend très vite vers 0 telle que $\left(\gamma_n = \sum_{k=0}^n \text{Log } \alpha_k \right)_{n \geq 0}$ vérifie les conditions du lemme 4.2. On appelle $\tilde{\mathbb{E}} = \{ v = (v_p)_{p \geq 0} \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}} \mid \sup_{p \geq 0} \|v_p\| < \infty \}$

que l'on munit de la norme du sup ; $(\tilde{E}, \| \cdot \|_\infty)$ devient à son tour un espace de Banach, et on définit le nouveau F. D. $\tilde{\mathcal{C}} = (\tilde{T}_x)_{x \in X}$ par

$$\tilde{T}_x(v_0, v_1, v_2, \dots) = (T_x \cdot v_0, \alpha_0 v_0, \alpha_1 v_1, \dots).$$

\tilde{T}_x est bien injectif pour tout $x \in X$ majoré en norme indépendamment de x et vérifie $T_x^n = \pi \circ \tilde{T}_x^n (\forall n \geq 0), (\forall x \in X)$, (où $\pi : \tilde{E} \rightarrow E$ désigne la projection canonique de \tilde{E} sur $E((v_0, v_1, \dots) \mapsto v_0)$). Remarquons maintenant la formule :

$$\tilde{T}_x^n(v_0, v_1, \dots) = (T_x^n \cdot v_0, \alpha_0 T_x^{n-1} v_0, \dots, \alpha_{n-1} \dots \alpha_1 \alpha_0 v_0, \alpha_n \dots \alpha_1 v_1, \dots),$$

d'où

- i) $\liminf \frac{1}{n} \text{Log } \rho(\tilde{T}_x^n) \leq \liminf \frac{1}{n} \text{Log } \rho(T_x^n)$
 $\leq \limsup \frac{1}{n} \text{Log } \rho(T_x^n) \leq \limsup \frac{1}{n} \text{Log } \rho(\tilde{T}_x^n)$
- ii) $\liminf \frac{1}{n} \text{Log } \|\tilde{T}_x^n\| \leq \liminf \frac{1}{n} \text{Log } \|T_x^n\| \leq \limsup \frac{1}{n} \text{Log } \|T_x^n\|$
 $\leq \limsup \frac{1}{n} \text{Log } \|\tilde{T}_x^n\|$
- iii) $\liminf \frac{1}{n} \text{Log } \|\tilde{T}_x^n \cdot v\| \leq \liminf \frac{1}{n} \text{Log } \|T_x^n \cdot v_0\| \leq \limsup \frac{1}{n} \text{Log } \|T_x^n \cdot v_0\|$
 $\leq \limsup \frac{1}{n} \text{Log } \|\tilde{T}_x^n \cdot v\|$

car

$$\begin{aligned} \rho(\tilde{T}_x^n) &= \sup_{0 \leq k \leq n} [\rho(T_x^{n-k}) \cdot \alpha_0 \dots \alpha_{k-1}] \\ \|\tilde{T}_x^n\| &= \sup_{0 \leq k \leq n} [\|T_x^{n-k}\| \cdot \alpha_0 \dots \alpha_{k-1}] \\ \|\tilde{T}_x^n \cdot v\| &= \sup_{0 \leq k \leq n} [\|T_x^{n-k} \cdot v_0\| \alpha_0 \dots \alpha_{k-1}]. \end{aligned}$$

Appelons $\tilde{\Lambda}$ l'ensemble des points réguliers du F. D. $(X, \mathcal{B}, \phi, \tilde{E}, \tilde{\mathcal{C}})$, alors $\tilde{\Lambda} \subset \Lambda$. Si $x \in \tilde{\Lambda}$ et $i \geq 1$ $\tilde{F}_i(x) = \left\{ v \in \tilde{E} \mid \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log } \|\tilde{T}_x^n \cdot v\| \leq \lambda_i(x) \right\}$, alors $\tilde{F}_i(x) \supset \ker \pi$ et

$$F_i(x) = \pi(\tilde{F}_i(x)) = \left\{ v \in E \mid \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log } \|T_x^n \cdot v\| \leq \lambda_i(x) \right\}$$

(il y a bien égalité car si $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log } \|\tilde{T}_x^n \cdot v\| > \tilde{\lambda}(x)$ alors

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log } \|\tilde{T}_x^n \cdot v\| = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log } \|\tilde{T}_x^n \cdot v\|).$$

Enfin la proposition B.3.3 montre que la μ -continuité des champs $(F_i(x))_{x \in \Lambda}$ est conservée.

DEUXIÈME PARTIE

Dans toute la suite de cet article, on se placera sur le fibré dynamique engendré par une application ϕ de classe C^1 seulement, définie sur un ouvert U à valeurs dans un espace de Banach E laissant globalement invariante une partie compacte K incluse dans U ; on pourra définir en tout point régulier la suite des exposants de Lyapounov $(\lambda_i)_{i \geq 1}$ associée à la famille des dérivées $(D_x \phi)_{x \in K}$. Une mesure de probabilité μ ϕ -invariante étant fixée, on obtiendra la majoration de l'entropie et de la dimension capacitaire de μ , en étendant la notion d'entropie locale introduite par Brin et Katok [BK]. Cette méthode permet d'étendre des résultats obtenus par Ledrappier et Young [LY] concernant la minoration logarithmique des mesures des boules en fonction de la dimension de Lyapounov \dim_L . En supposant tous les opérateurs $(D_x \phi)_{x \in K}$ compacts, on obtient en particulier :

$$* \dim_c(K) < +\infty \quad h_{\text{top}}(\phi) < +\infty$$

$$* h_\mu(\phi) \leq \int_K \sum_{i \geq 1} d_i(x) \lambda_i^+(x) d\mu(x)$$

$$* \mu\text{-p. p. } \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\text{Log } \mu[B(x, \varepsilon)]}{\text{Log } \varepsilon} \leq \dim_L(x, \phi).$$

* Pour tout $\alpha > 0$ et pour μ -presque tout $x \in K$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} \text{Log } \mu \left[\bigcap_{i=0}^{n-1} \phi^{-i} B(\phi^i(x), \varepsilon e^{-i\alpha}) \right] \leq \sum_{i \geq 1} d_i(x) [\lambda_i(x) + \alpha]^+.$$

Takens [TA] a introduit pour la première fois, dans l'étude des attracteurs étranges, la nouvelle métrique :

$$d_n^{\phi, \alpha}(x, y) = \max_{0 \leq i \leq n-1} \{ d[\phi^i(x), \phi^i(y)] e^{i\alpha} : (x, y) \in K^2 \}.$$

Cette métrique est l'outil principal pour montrer la minoration logarithmique des mesures des boules en fonction de $\dim_L(x, \phi)$:

$$\dim_L(x, \phi) = \inf \left\{ \frac{1}{\alpha} \sum_{i \geq 1} d_i(x) [\lambda_i(x) + \alpha]^+ : 0 < \alpha < -\varkappa(x) \right\}$$

où $\varkappa(x)$ désigne la borne inférieure des exposants de Lyapounov, ou bien l'indice de compacité du fibré, au point régulier x .

I. NOTATIONS

I. 1° CADRE DIFFÉRENTIABLE :

E est un espace de Banach quelconque

U est une partie ouverte de E et K est une partie compacte de U

$\mathcal{B}(K)$ est la tribu des boréliens de K

$\mathcal{C}_K^1(U)$ est l'ensemble des applications $(\phi : U \rightarrow E)$ de classe C^1 préservant K (i. e. $\phi(K) \subset K$)

$\mathcal{F}_K(\phi) = \left\{ \begin{array}{l} K \times E \rightarrow K \times E \\ (x, v) \rightarrow (\phi(x), D_x \phi \cdot v) \end{array} \right\}$ le fibré dynamique sur K engendré par $\phi \in \mathcal{C}_K^1(U)$.

Remarquons que l'hypothèse de classe C^1 sur ϕ ne sera utilisée que par l'intermédiaire du lemme suivant :

I. 2° LEMME. — Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ on définit le module de continuité de $D\phi$ sur K :

$$C_K(\varepsilon, \phi) = \sup \{ \| \phi(x) - \phi(y) - D_x \phi \cdot (x - y) \| / \| x - y \| : (x, y) \in K^2 \text{ et } 0 < \| x - y \| < \varepsilon \}.$$

Alors, $(\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \rightarrow C_K(\varepsilon, \phi) \in \mathbb{R})$ est une application décroissante de limite nulle.

On aurait pu ainsi travailler dans un cadre plus général où, E est un espace de Banach, K est une partie compacte de E, $\phi : K \rightarrow K$ est une application continue, $(x \in K \rightarrow T_x \in L(E))$ est une application continue d'opérateurs. En appelant toujours :

$$(C_K(\varepsilon, \phi) = \sup \{ \| \phi(x) - \phi(y) - T_x \cdot (x - y) \| / \| x - y \| : (x, y) \in K^2 \text{ et } 0 < \| x - y \| < \varepsilon \})$$

il faudrait alors imposer : $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C_K(\varepsilon, \phi) = 0$.

Ce cadre apparaît en particulier dans l'extension naturelle $\tilde{\mathcal{F}}$ du fibré précédent \mathcal{F} ; on aurait pu ainsi supposer $\tilde{\phi}$ bijective et chaque opérateur \tilde{T}_x injectif.

I. 3° DÉFINITION DES POINTS RÉGULIERS DU FIBRÉ $\mathcal{F}_K(\phi)$. — Soit $\phi \in \mathcal{C}_K^1(U)$, on appelle alors points réguliers de ϕ , l'ensemble $\Lambda_K(\phi) = \{ x \in K : \exists (F_i)_{i \geq 1}$ des s. e. v. fermés de E de codimension finie tels que

- * $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log } \rho(D_x \phi^n) = \kappa$
- * $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log } \| D_x \phi^n / F_i \| = \lambda_i \quad (\forall i \geq 1)$
- * $F_1 = E \quad \text{et} \quad F_{i+1} \subset F_i \quad (\forall i \geq 1)$

- * Si $\lambda_i > \kappa$ alors $\lambda_i > \lambda_{i+1}$ et $\inf_{i \geq 1} \lambda_i = \kappa$
 * $\forall v \in F_i \setminus F_{i+1} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log} \| D_x \phi^n \cdot v \| = \lambda_i$.

Dans l'ensemble $\Lambda_K(\phi)$, la notation « $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = l$ » signifie que la limite de la suite (s_n) existe et vaut l . Il est possible aussi de montrer que les coefficients κ et λ_i , les s. e. v. F_i qui interviennent dans $\Lambda_K(\phi)$ sont en fait des fonctions de x . κ s'appelle l'indice de compacité asymptotique et $(\lambda_i)_{i \geq 1}$ s'appelle la suite des exposants de Lyapounov.

I.4° LEMME. — Sur l'ensemble $\bigcap_{n \geq 0} \phi^{-n} \Lambda_K(\phi)$, on a :

$$\kappa(x) \leq \kappa \circ \phi(x), \quad \lambda_i(x) \leq \lambda_i \circ \phi(x), \quad D_x \phi(F_i(x)) \subset F_i \circ \phi(x),$$

$d_i(x) \leq d_i \circ \phi(x)$ (où $d_i(x)$ est la codimension de $F_{i+1}(x)$ dans $F_i(x)$).

I.5° DÉFINITIONS :

A) Nombre de recouvrement d'une partie A d'un espace métrique (E, d)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad r(A, \varepsilon) = \inf \{ n \geq 1 : \exists (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \quad \exists (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \mathbb{R}_+^{*n}$$

tels que $A \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon_i)$ et $\varepsilon_i < \varepsilon$ }.

S'il est nécessaire de préciser la métrique d on pose : $r(A, \varepsilon, d)$.

B) Nombre de recouvrement d'un opérateur $T \in L(E)$ où E est un e. v. n.
 $\forall \varepsilon > 0 \quad R(T, \varepsilon) = r(T(B_E), \varepsilon)$.

I.6° PROPRIÉTÉS :

A) $\forall (S, T) \in L(E)^2 \quad \forall (\delta, \varepsilon) \in \mathbb{R}_+^{*2} \quad R(S \circ T, \delta\varepsilon) \leq R(S, \delta)R(T, \varepsilon)$

B) $[(T, \varepsilon) \in L(E) \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow R(T, \varepsilon) \in \overline{\mathbb{N}}]$ est une application s. c. s.

C) $\forall (T, \varepsilon) \in L(E) \times \mathbb{R}_+^* \quad (\varepsilon > \rho(T) \Rightarrow R(T, \varepsilon) < +\infty)$.

I.7° DÉFINITIONS :

A) Indice de compacité asymptotique uniforme :

$$\forall \phi \in \mathcal{C}_K^1(U) \quad \rho_K(\phi) = \sup_{x \in K} \rho(D_x \phi) \quad \kappa_K(\phi) = \inf_{n \geq 1} \frac{1}{n} \text{Log} \rho_K(\phi^n).$$

B) Nombre de recouvrement asymptotique local :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_K^1(U) \quad \Delta^\alpha(x, \phi) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log} R(D_x \phi^n, e^{-n\alpha}).$$

C) Nombre de recouvrement asymptotique uniforme :

$$\forall (\phi, \varepsilon) \in \mathcal{C}_K^1(U) \times \mathbb{R}_+^* \quad R_K(\phi, \varepsilon) = \sup_{x \in K} R(D_x \phi, \varepsilon)$$

$$\forall (\phi, \varepsilon) \in \mathcal{C}_K^1(U) \times \mathbb{R}_+^* \quad \Delta_K^\alpha(\phi) = \inf_{n \geq 1} \frac{1}{n} \text{Log } R_K(\phi^n, e^{-n\alpha}).$$

I.8° PROPRIÉTÉS. — Pour tout $\phi \in \mathcal{C}_K^1(U)$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$

A) $\{ \text{Log } \rho_K(\phi^n) \}_{n \geq 0}$ et $\{ \text{Log } R_K(\phi^n, e^{-n\alpha}) \}_{n \geq 0}$ sont sous additives

B) $\varkappa_K(\phi) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log } \rho_K(\phi^n) < +\infty$

$$\Delta_K^\alpha(\phi) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log } R_K(\phi^n, e^{-n\alpha}).$$

C) Si $\alpha < -\varkappa_K(\phi)$ alors $\Delta_K^\alpha(\phi) < +\infty$.

II. RAPPEL SUR DIFFÉRENTES NOTIONS DE DIMENSION

II. 1° DIMENSION CAPACITAIRE D'UN ENSEMBLE :

Pour tout espace métrique (A, d) , on définit sa dimension capacitaire (supérieure) ou dimension fractale

$$\dim_C(A) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} - \frac{\text{Log } r(A, \varepsilon)}{\text{Log } \varepsilon}.$$

II. 2° DIMENSION CAPACITAIRE D'UNE MESURE :

Pour tout compact métrique (K, d) et toute mesure de probabilité sur la tribu $\mathcal{B}(K)$ des boréliens de K , on définit la dimension capacitaire de μ

$$\dim_C(\mu) = \sup_{0 < \delta < 1} \inf \{ \dim_C(A) : A \in \mathcal{B}(K) \text{ et } \mu(A) < \delta \}.$$

II. 3° PROPOSITION. — Soient (K, d) un espace métrique compact et μ une mesure de probabilité sur les boréliens de K , alors :

A) $[x \in K \rightarrow \mu[B(x, \varepsilon)] \in \mathbb{R}^+]$ est une application s. c. i.

B) S'il existe $\phi : K \rightarrow K$ lipschitzienne préservant μ alors

$$\left[x \in K \rightarrow \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\text{Log } \mu[B(x, \varepsilon)]}{\text{Log } \varepsilon} \in \mathbb{R}^+ \right]$$

est ϕ -sous-invariante borélienne.

C) $\forall d \geq 0 \left[\dim_C(\mu) \leq d \Leftrightarrow \mu\text{-p. p. } \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\text{Log } \mu[B(x, \varepsilon)]}{\text{Log } \varepsilon} \leq d \right].$

D) Si $\phi \in \mathcal{C}_K^1(U)$ et μ est ϕ -invariante ergodique, alors

$$\dim_C(\mu) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\text{Log } \mu[\mathbf{B}(x, \varepsilon)]}{\text{Log } \varepsilon} \quad \mu\text{-p. p.}$$

II.4° DIMENSION DE LYAPOUNOV EN UN POINT RÉGULIER. — Soient $\phi \in \mathcal{C}_K^1(U)$, $\mathcal{F}_K(\phi)$ le fibré dynamique engendré par ϕ , $x \in \Lambda_K(\phi)$ un point régulier pour ϕ qui vérifie $\kappa(x) < 0$. On rappelle alors dimension de Lyapounov au point x , le réel fini :

$$\dim_L(x, \phi) = \inf \left\{ \frac{1}{\alpha} \sum_{i \geq 1} d_i(x) [\lambda_i(x) + \alpha]^+ : 0 < \alpha < -\kappa(x) \right\}.$$

On peut vérifier que cette définition coïncide bien avec la définition classique en dimension finie, pour une mesure ergodique et en prenant $\kappa(\mu) = -\infty$; (par exemple dans l'article de Ruelle et Eckmann [RE]).

II.5° REMARQUE. — Soient $\phi \in \mathcal{C}_K^1(U)$ et μ une mesure de probabilité sur $\mathcal{B}(K)$ ϕ -invariante. Grâce au théorème II.3 de la première partie, on peut trouver $\mathbf{B} \in \mathcal{B}(K)$ tel que :

$$* \mathbf{B} \subset \bigcap_{i \geq 0} \phi^{-i}(\Lambda_K(\phi)), \quad \mu(\mathbf{B}) = 1, \quad \mathbf{B} \subset \phi^{-1}(\mathbf{B})$$

* $(x \in \mathbf{B} \rightarrow \dim_L(x, \phi) \in \mathbb{R}^+)$ est mesurable ϕ -invariante.

* Si de plus μ est ergodique pour ϕ , alors

$$\dim_L(x, \phi) = \dim_L(\mu, \phi) \quad \mu\text{-p. p.}$$

III. ÉNONCÉ DES THÉORÈMES PRINCIPAUX

III.1° DÉFINITION D'UNE NOUVELLE MÉTRIQUE SUR K . — Pour toute application $\phi : K \rightarrow K$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $n \geq 1$, on définit une nouvelle métrique sur K par :

$$d_n^{\phi, \alpha}(x, y) = \max_{0 \leq i \leq n-1} \{ d[\phi^i(x), \phi^i(y)] e^{i\alpha} \}$$

(où $d(x, y) = \|x - y\|$ est la métrique induite par celle de E sur K).

Une boule ouverte de centre x et de rayon ε pour cette métrique est de

$$\text{la forme} \quad \mathbf{B}_n^{\phi, \alpha}(x, \varepsilon) = \bigcap_{i=0}^{n-1} \phi^{-i} \mathbf{B}[\phi^i(x), e^{-i\alpha}]$$

(où $\mathbf{B}(x, \varepsilon)$ est une boule ouverte de K pour la métrique d).

III.2° THÉORÈME DE L'ENTROPIE LOCALE [BK]. — Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, \phi)$ un

système dynamique mesuré, $((X, d)$ est un espace métrique compact, $\phi : X \rightarrow X$ est une application mesurable préservant une mesure de probabilité μ sur les boréliens de K, \mathcal{B}).

On appelle :

$$\bar{h}_\mu^0(x, \phi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} \text{Log } \mu[B_n^{\phi, 0}(x, \varepsilon)]$$

$$\underline{h}_\mu^0(x, \phi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} \text{Log } \mu[B_n^{\phi, 0}(x, \varepsilon)].$$

Brin et Katok [BK] ont alors montré le résultat important suivant :

$$\bar{h}_\mu^0(x, \phi) = \underline{h}_\mu^0(x, \phi) \quad \mu\text{-p. p.}$$

et $\int_K \bar{h}_\mu^0(x, \phi) d\mu(x) = h_\mu(\phi)$ (= entropie métrique de ϕ).

III. 3° EXTENSION DE LA DÉFINITION DE BRIN-KATOK. — Pour toute application $\phi : K \rightarrow K$ borélienne préservant une mesure de probabilité μ sur $\mathcal{B}(K)$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$ on appelle :

$$h_\mu^\alpha(x, \phi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} \text{Log } \mu[B_n^{\phi, \alpha}(x, \varepsilon)].$$

III. 4° PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES :

- i) $h_\mu^\alpha(\phi(x), \phi) \leq h_\mu^\alpha(x, \phi)$
- ii) $\forall p \geq 1 \quad \frac{1}{p} h_\mu^{p\alpha}(x, \phi^p) \leq h_\mu^\alpha(x, \phi)$
- iii) Si ϕ est de plus lipschitzienne alors $\frac{1}{p} h_\mu^{p\alpha}(x, \phi^p) = h_\mu^\alpha(x, \phi)$.

III. 5° LEMME. — Soient $\phi \in \mathcal{C}_K^1(U)$, $x \in \Lambda_K(\phi)$ un point régulier, un réel $\alpha < -\kappa(x)$. Alors $\Delta^\alpha(x, \phi) \leq \sum_{i \geq 1} d_i(x) [\lambda_i(x) + \alpha]^+$.

Ce lemme est de nature géométrique car il relie le taux de croissance exponentielle du nombre de recouvrement d'ordre α de $D_x \phi^n(B_\varepsilon)$ en fonction des exposants de Lyapounov. En dimension finie, on peut montrer l'égalité.

III. 6° THÉORÈME LOCAL. — Soit $\phi \in \mathcal{C}_K^1(U)$ préservant une mesure de probabilité μ sur $\mathcal{B}(K)$ et ayant un indice de compacité uniforme strictement négatif, alors

- * $\forall 0 \leq \alpha < \beta < -\kappa_K(\phi) \quad h_\mu^\alpha(x, \phi) \leq \Delta^\beta(x, \phi) \quad \mu\text{-p. p.}$
- * $\forall \alpha > 0 \quad \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\text{Log } \mu[B(x, \varepsilon)]}{\text{Log } \varepsilon} \leq \frac{1}{\alpha} h_\mu^\alpha(x, \phi) \quad \mu\text{-p. p.}$

III. 7° COROLLAIRES. — Sous les hypothèses du théorème précédent :

$$* \text{ Si } \varkappa_{\mathbf{K}}(\phi) < 0 \text{ alors } h_{\mu}^0(x, \phi) \leq \sum_{i \geq 0} d_i(x) \lambda_i^+(x)$$

$$* \text{ Si } \varkappa(x) = \varkappa_{\mathbf{K}}(\phi) \text{ } \mu\text{-p. p.}$$

$$\text{alors } \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\text{Log } \mu[\mathbf{B}(x, \varepsilon)]}{\text{Log } \varepsilon} \leq \dim_{\mathbf{L}}(x, \phi) \text{ } \mu\text{-p. p.}$$

Si $\varkappa(x) = \varkappa_{\mathbf{K}}(\phi)$ μ -p. p. et μ est ergodique pour ϕ alors $\dim_{\mathbf{C}}(\mu) \leq \dim_{\mathbf{L}}(\mu, \phi)$.

III. 8° THÉORÈME UNIFORME. — Soit $\phi \in \mathcal{C}_{\mathbf{K}}^1(\mathbf{U})$. On note pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$

$$h_{\text{top}}^{\alpha}(\phi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log } r(\mathbf{K}, \varepsilon, d_n^{\phi, \alpha}).$$

On peut alors montrer

$$* \forall 0 \leq \alpha < \beta \quad h_{\text{top}}^{\alpha}(\phi) \leq \Delta_{\mathbf{K}}^{\beta}(\phi)$$

$$* \text{ Si } \phi(\mathbf{K}) = \mathbf{K} \text{ alors } \dim_{\mathbf{C}}(\mathbf{K}) \leq \inf_{\alpha > 0} \frac{1}{\alpha} \Delta_{\mathbf{K}}^{\alpha}(\phi).$$

IV. DÉMONSTRATION DES DIFFÉRENTES ASSERTIONS

IV. 1° DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION II.3° c. — La démonstration de la relation entre $\dim_{\mathbf{C}}(\mu)$ et $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\text{Log } \mu[\mathbf{B}(x, \varepsilon)]}{\text{Log } \varepsilon}$ pourrait être laissée en exercice car elle présente peu de difficultés. Mais la méthode utilisée est générale : on l'applique en particulier dans la première étape de la démonstration du théorème III. 6°.

(\Rightarrow) On pose pour tout $n \geq 0$ $\varepsilon_n = e^{-n}$. Si $\tilde{d} > d$ et $\delta \in]0, 1[$ on peut trouver $A \in \mathcal{B}(\mathbf{K})$ tel que $\mu(A) > \delta$ et $\dim_{\mathbf{C}}(A) < \tilde{d}$. Pour tout $d^* > \tilde{d}$,

$$\sum_{n \geq 0} \mu \{ x \in A : \mu[\mathbf{B}(x, \varepsilon)] \leq \varepsilon_n^{d^*} \} \leq \sum_{n \geq 0} r\left(A, \frac{\varepsilon_n}{2}\right) \varepsilon_n^{d^*}.$$

Comme $r\left(A, \frac{1}{2} \varepsilon_n\right) \leq 2^d \varepsilon_n^{-d}$ pour n suffisamment grand, la série converge et par Borel-Cantelli on en déduit que $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\text{Log } \mu[\mathbf{B}(x, \varepsilon)]}{\text{Log } \varepsilon} \leq d^*$ pour μ -presque tout x sur A .

(\Leftarrow) $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$ étant choisie comme précédemment. Pour tout $\tilde{d} > d$ on appelle $A_n^{\tilde{d}} = \{ x \in \mathbf{K} : \forall m \geq n \mu[\mathbf{B}(x, \varepsilon_m)] \geq \varepsilon_m^{\tilde{d}} \}$. Alors $\mu\left[\bigcup_{n \geq 0} \uparrow A_n^{\tilde{d}}\right] = 1$. Pour tout $m \geq n$ $r(A_n, 2\varepsilon_m) \varepsilon_m^{\tilde{d}} \leq 1$. Donc, pour tout $n \geq 0$, $\dim_{\mathbf{C}}(A_n) \leq \tilde{d}$.

IV. 2° DÉMONSTRATION DU LEMME III.5°. — Si $-\alpha > \lambda_1(x)$, pour n

suffisamment grand $\|D_x \phi^n\| < e^{-n\alpha}$ et donc $R(D_x \phi^n, e^{-n\alpha}) = 1$. Sinon on peut trouver $k \geq 1$ tel que $\lambda_{k+1}(x) < \alpha \leq \lambda_k(x)$. En choisissant successivement des vecteurs linéairement indépendants dans $F_i(x) \setminus F_{i+1}(x)$ pour

$i = 1 \dots k$, on peut trouver $d = \sum_{i=1}^k d_i(x)$ vecteurs $(e_i)_{i \in I}$ tels que

$$\sum_{i \in I} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log} \|D_x \phi^n \cdot e_i\| = \sum_{i=1}^k d_i(x) \lambda_i(x) \text{ et } E = \bigoplus_{i \in I} E_i + F \text{ avec } F = F_{k+1}(x)$$

et $E_i = \mathbb{R} \cdot e_i$. Appelons π_i, π les projecteurs sur E_i, F associés à cette décomposition de E ; et supposons $\|e_i\| = 1$.

$$B_E \subset \|\pi\| \cdot B_F + \sum_{i \in I} \|\pi_i\| \cdot B_{E_i} \quad \text{où} \quad B_{E_i} = [-1, 1] \cdot e_i$$

$$\forall n \geq 1 \quad r(D_x \phi^n \cdot B_E, e^{-n\alpha})$$

$$\leq r\left(D_x \phi^n \cdot B_F, \frac{e^{-n\alpha}}{(d+1)\|\pi\|}\right) \prod_{i \in I} r\left(D_x \phi^n \cdot B_{E_i}, \frac{e^{-n\alpha}}{(d+1)\|\pi_i\|}\right).$$

Pour n suffisamment grand, $\|D_x \phi^n \cdot F\| < e^{-n\alpha}/(d+1)\|\pi\|$, et donc $r(D_x \phi^n B_F, e^{-n\alpha}/(d+1)\|\pi\|) = 1$.

$$\text{Pour tout } n \geq 1 \text{ et } i \in I, r(D_x \phi^n \cdot B_{E_i}, \eta) \leq \frac{\|D_x \phi^n \cdot e_i\|}{\eta} + 3,$$

(où $D_x \phi^n \cdot B_{E_i} = [-\|D_x \phi^n \cdot e_i\|, +\|D_x \phi^n \cdot e_i\|] \cdot f_i$ avec $\|f_i\| = 1$).

En appelant $K = \prod_{i \in I} \max[(d+1)\|\pi_i\|, 3]$, pour n suffisamment grand, on obtient $R(D_x \phi^n, e^{-n\alpha}) \leq K \cdot \prod_{i \in I} \{\|D_x \phi^n \cdot e_i\| e^{n\alpha} + 1\}$, ce qui termine la démonstration.

IV. 3° DÉMONSTRATION DU THÉORÈME III.6°, DEUXIÈME PARTIE. — Quitte à remplacer K par le support de μ (qui est aussi compact) on peut supposer que $\mu[B(x, \varepsilon)] > 0$ pour tout $x \in K$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $\alpha > 0$.

On voit facilement que

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\text{Log } \mu[B(x, \varepsilon)]}{\text{Log } \varepsilon} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n\alpha} \text{Log } \mu[B(x, e^{-n\alpha})].$$

Il reste alors à montrer l'inégalité, pour μ presque tout x ,

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n\alpha} \text{Log } \mu[B(x, e^{-n\alpha})] \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n\alpha} \text{Log } \mu[B(\phi^n(x), e^{-n\alpha})] = l(x).$$

La technique utilisée est celle de Mañé (proposition A.5). On définit pour cela, pour tout $\varepsilon > 0$, une application A_ε sur \mathbf{K} par

$$A_\varepsilon(x) = \sup_{n \geq 0} \exp(-nl(x) - n\varepsilon)/\mu[B(\phi^n(x), e^{-m\varepsilon})].$$

Comme l est une application sous invariante ($l \circ \phi \leq l$ partout), en raisonnant sur chaque sous-espace $\mathbf{K}_m = \{x \in \mathbf{K} : l(x) \leq m\}$, on peut supposer que l est bornée. On remarque alors, pour tout $x \in \mathbf{K}$,

$$(1) \quad A_\varepsilon \circ \phi(x) \leq A_\varepsilon(x) \exp(l(x) + \varepsilon) \leq A_\varepsilon(x) \exp(m + \varepsilon).$$

Soient $(\tilde{\mathbf{K}}, \tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mu}, \tilde{\phi})$ l'extension naturelle de $(\mathbf{K}, \mathcal{B}, \mu, \phi)$, $\pi : \tilde{\mathbf{K}} \rightarrow \mathbf{K}$ la surjection mesurable vérifiant $\mu \circ \pi^{-1} = \mu$ et $\phi \circ \pi = \pi \circ \tilde{\phi}$ (théorème A.7). En posant $\tilde{A}_\varepsilon = A_\varepsilon \circ \pi$, (1) entraîne $\tilde{A}_\varepsilon \leq \tilde{A}_\varepsilon \circ \tilde{\phi}^{-1} \exp(m + \varepsilon)$ sur $\tilde{\mathbf{K}}$, et donc

(proposition A.5) $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \text{Log } \tilde{A}_\varepsilon \circ \tilde{\phi}^{-m} = 0$ $\tilde{\mu}$ -p. p. Ainsi, $\tilde{A}_\varepsilon \circ \tilde{\phi}^{-m}(x) \leq e^{m\varepsilon}$ pour m suffisamment grand ($m \geq m_0$)

$$\mu[B(\pi(x), e^{-m\varepsilon})] \geq \exp[-ml \circ \pi \circ \tilde{\phi}^{-m}(x) - 2m\varepsilon] \quad (m \geq m_0), \quad l \circ \pi = l \circ \pi \circ \tilde{\phi}^{-m}$$

$$\mu[B(x, e^{-m\varepsilon})] \geq \exp[-ml(x) - 2m\varepsilon] \quad (m \geq m_0) \quad (\mu\text{-p. p.}).$$

On termine la démonstration en remarquant que $l(x) \leq \frac{1}{\alpha} h_\mu^\alpha(x, \phi)$ pour tout $x \in \mathbf{K}$.

IV.4° REMARQUE. — La suite de l'article est consacrée à la démonstration du théorème III.6° (première partie). Si la mesure μ était ergodique (toute partie ϕ -invariante est de mesure 0 ou 1) la démonstration serait plus simple, car cela reviendrait à supposer tous constants ($h_\mu^\alpha(x, \phi)$, $\Delta^\beta(x, \phi)$, ...) et à prouver le théorème uniforme III.8°. Dans le cas général, on raisonne sur chaque élément d'une partition, dont l'entropie peut être aussi petite que l'on veut, pour de nouveau supposer tout constant.

Mathématiquement, cela se traduit par la proposition suivante IV.6°.

IV.5° DÉFINITION : (approximation locale supérieure). — Pour toute application $f : \mathbf{K} \rightarrow \mathbb{R}$ majorée uniformément, pour toute partition \mathcal{P}

$$\text{de } \mathbf{K} \text{ on note } A(f, \mathcal{P}) = \sum_{P \in \mathcal{P}} (\sup_P f) \mathbb{1}_P.$$

On obtient alors facilement :

- * $A(f + g, \mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \leq A(f, \mathcal{P}) + A(g, \mathcal{Q})$
- * $A(f \circ \phi, \phi^{-1}\mathcal{P}) \leq A(f, \mathcal{P}) \circ \phi$
- * Si $(f_p)_{p \geq 0}$ est une suite sous additive d'applications majorées alors.

$$\left(A \left(f_p, \bigvee_{i=0}^{p-1} \phi^{-i}\mathcal{P} \right) \right)_{p \geq 0} \text{ est aussi une suite sous additive.}$$

IV. 6° PROPOSITION. — Soient $(X, \mathcal{B}, \mu, \phi)$ un système dynamique mesuré (notations du théorème III. 2°), et $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite sous-additive d'applications de X dans \mathbb{R}_+ mesurables uniformément majorées. Il existe alors une suite de partitions finies $(\mathcal{P}_k)_{k \geq 0}$ telle que, pour μ -presque partout

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} f_n = \inf_{k \geq 0} \left\{ E \left[I \left(\mathcal{P}_k \left| \bigvee_{i \geq 1} \phi^{-i} \mathcal{P}_k \right. \right) \middle| \mathcal{I} \right] + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} A \left(f_n, \bigvee_{i=0}^{n-1} \phi^{-i} \mathcal{P}_k \right) \right\}$$

(où $\mathcal{I} = \{ A \in \mathcal{B} : \phi^{-1}(A) = A \}$ et $I(\mathcal{P} | \mathcal{A})$ désigne l'information de \mathcal{P} sachant une sous-tribu \mathcal{A} de \mathcal{B}).

Démonstration. — D'après le théorème ergodique de Kingman (A. 2), pour toute partition \mathcal{P} de X , la suite $\left(A \left(f_n, \bigvee_{i=0}^{n-1} \phi^{-i} \mathcal{P} \right) \right)_{n \geq 0}$ converge vers une application $g(\mathcal{P})$ \mathcal{I} -mesurable μ -presque partout.

$$g = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} f_n \quad \mu\text{-p. p.}$$

$$g(\mathcal{P}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} A \left(f_n, \bigvee_{i=0}^{n-1} \phi^{-i} \mathcal{P} \right) \quad \mu\text{-p. p.}$$

Soit $(\mathcal{I}_p)_{p \geq 0}$ une suite croissante de partitions finies \mathcal{I} -mesurables dont la réunion $\bigcup_{p \geq 0} \mathcal{I}_p$ engendre \mathcal{I} aux ensembles de mesure nulle près. On note $\hat{\mathcal{I}}_p$ la tribu engendrée par \mathcal{I}_p ,

$$\mathcal{I}_p^* = \{ A \in \mathcal{I}_p : \mu(A) > 0 \} = \{ A_{p,1}, \dots, A_{p,N(p)} \},$$

et on choisit $E[g | \hat{\mathcal{I}}_p] = \sum_{A \in \mathcal{I}_p^*} \frac{\int_A g d\mu}{\mu(A)} \mathbb{1}_A$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, on définit :

$$B_p^\varepsilon = \{ x \in X : \forall q \geq p \quad g - \varepsilon \leq E[g | \hat{\mathcal{I}}_q] \leq g + \varepsilon \}$$

$$B_{p,i,n}^\varepsilon = \left\{ x \in A_{p,i} \cap B_p^\varepsilon : \forall m \geq n \quad \frac{1}{m} f_m \leq g + \varepsilon \right\}$$

$$\mathcal{P}_{p,n}^\varepsilon = \{ B_{p,1,n}^\varepsilon, \dots, B_{p,N(p),n}^\varepsilon, C_{p,n}^\varepsilon \}$$

où $C_{p,n}^\varepsilon = V \setminus D_{p,n}^\varepsilon$ et $D_{p,n}^\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{N(p)} B_{p,i,n}^\varepsilon$, pour tout m :

$$\tilde{f}_m = \sup_K f_m \quad \tilde{g} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \tilde{f}_m$$

pour toute partition $\mathcal{P} : l(\mathcal{P}) = g(\mathcal{P}) + E \left[I \left(\mathcal{P} \left| \bigvee_{i \geq 1} \phi^{-i} \mathcal{P} \right. \right) \middle| \mathcal{I} \right]$.
 Sur $B_{p,i,n}$ et pour tout $m \geq n$

$$\frac{1}{m} f_m \leq E[g | \hat{\mathcal{I}}_p] + 2\varepsilon = \frac{\int_{A_{p,i}} g d\mu}{\mu(A_{p,i})} + 2\varepsilon$$

$$\frac{1}{m} A(f_m, \mathcal{P}_{p,n}^\varepsilon) \leq E[g | \hat{\mathcal{I}}_p] + 2\varepsilon \leq g + 3\varepsilon$$

Donc $\frac{1}{m} A(f_m, \mathcal{P}_{p,n}^\varepsilon) \leq (g + 3\varepsilon) \mathbb{1}_{D_{p,n}^\varepsilon} + \frac{1}{m} \tilde{f}_m \mathbb{1}_{C_{p,n}^\varepsilon}$

et $\frac{1}{m} A \left(f_m, \bigvee_{i=0}^{m-1} \phi^{-i} \mathcal{P}_{p,n}^\varepsilon \right) \leq \frac{1}{m} A(f_m, \mathcal{P}_{p,n}^\varepsilon)$.

D'où $g(\mathcal{P}_{p,n}^\varepsilon) \leq (g + 3\varepsilon) \mathbb{1}_{D_{p,n}^\varepsilon} + \tilde{g} \mathbb{1}_{C_{p,n}^\varepsilon}$

$$E \left[\inf_{n \geq 1} l(\mathcal{P}_{p,n}^\varepsilon) \right] \leq E[(g + 3\varepsilon) \mathbb{1}_{D_{p,n}^\varepsilon}] + \tilde{g} \mu(C_{p,n}^\varepsilon) + \frac{1}{m} H \left[\bigvee_{i=0}^{m-1} \phi^{-i} \mathcal{P}_{p,n}^\varepsilon \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} H \left[\bigvee_{i=0}^{m-1} \phi^{-i} \mathcal{P}_{p,n}^\varepsilon \right] = H \left[\bigvee_{i=0}^{m-1} \phi^{-i} \mathcal{A}_p^\varepsilon \right]$$

où $\mathcal{A}_p^\varepsilon = \left\{ A_{p,1} \cap B_{p,1}^\varepsilon, \dots, A_{p,N(p)} \cap B_{p,N(p)}^\varepsilon, X \setminus \bigcup_{i=1}^{N(p)} (A_{p,i} \cap B_{p,i}^\varepsilon) \right\}$

$\mathcal{A}_p^\varepsilon$ est \mathcal{I} -invariante donc $E \left[\inf_{n \geq 1} l(\mathcal{P}_{p,n}^\varepsilon) \right] \leq E[(g + 3\varepsilon) \mathbb{1}_{B_E^\varepsilon}] + \tilde{g} \mu[\mathbf{K} \setminus B_E^\varepsilon]$

et $E \left[\inf_{r \geq 1, p \geq 1, n \geq 1} l(\mathcal{P}_{p,n}^{1/r}) \right] \leq E[g]$.

IV.7° LEMME. — Soient $\phi \in \mathcal{C}_K^1(U)$, $\eta > 0$, $0 < \varepsilon < d(\mathbf{K}, U^c)$, $x \in \mathbf{K}$.
 Alors : $r[\phi(B(x, \varepsilon)), 2(\eta + C_K(\varepsilon, \phi))\varepsilon] \leq R(D_x \phi, \varepsilon)$.

Démonstration. — Pour tout $y \in B(x, \varepsilon) \cap \mathbf{K}$

$$\| \phi(x) - \phi(y) - D_x \phi \cdot (x - y) \| \leq C_K(\varepsilon, \phi) \varepsilon$$

donc $\phi(B(x, \varepsilon) \cap \mathbf{K}) \subset \phi(x) + \varepsilon D_x \phi(B_E) + \varepsilon C_K(\varepsilon, \phi) B_E$.

Mais $D_x \phi(B_\varepsilon) \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \eta_i)$ avec $\eta_i < \eta$ et $n = R(D_x \phi, \eta)$.

En posant $y_i = \phi(x) + \varepsilon x_i$

$$\phi(B(x, \varepsilon)) \subset \bigcup_{i=1}^n B(y_i, (\eta_i + C_K(\varepsilon, \phi))\varepsilon).$$

En choisissant $z_i \in K \cap B(y_i, (\eta_i + C_K(\varepsilon, \phi))\varepsilon)$

$$\phi(B(x, \varepsilon)) \subset \bigcup_{i=1}^n B(z_i, 2(\eta_i + C_K(\varepsilon, \phi))\varepsilon).$$

IV. 8° DÉMONSTRATION DU THÉORÈME III.6°, PREMIÈRE PARTIE :

Première étape : pour toute partition \mathcal{P} fixée et pour tout $\varepsilon > 0$, on montre l'inégalité presque sûre :

$$(1) \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} \text{Log} \mu[B_n^{\phi, \alpha}(x, 2\varepsilon)] \\ \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \left\{ -\frac{1}{n} \text{Log} \mu \left[\bigvee_{i=0}^{n-1} \phi^{-i} \mathcal{P}(x) \right] + \frac{1}{n} \text{Log} r \left[\bigvee_{i=0}^{n-1} \phi^{-i} \mathcal{P}(x), \varepsilon, d_n^{\phi, \alpha} \right] \right\}.$$

Pour montrer (1), on introduit pour tout $\zeta > 0$ fixé, $\left(\mathcal{P}_n = \bigvee_{i=0}^{n-1} \phi^{-i} \mathcal{P} \right)$,

$$A_n^\zeta = \{ x \in K : \mu[B_n^{\phi, \alpha}(x, 2\varepsilon)] \leq e^{-n\zeta} \mu[\mathcal{P}_n(x)] / r[\mathcal{P}_n(x), \varepsilon, d_n^{\phi, \alpha}] \}.$$

D'après Borel-Cantelli, il suffit de montrer que $\Sigma \mu(A_n^\zeta) < +\infty$

$$\mu(A_n^\zeta) = \Sigma \{ \mu(A_n^\zeta \cap P) : P \in \mathcal{P}_n \text{ et } P \cap A_n^\zeta \neq \emptyset \}.$$

On recouvre alors $A_n^\zeta \cap P$ par des boules $B_n^{\phi, \alpha}(x, 2\varepsilon)$ centrées sur A_n^ζ , et on peut en choisir au plus $r[P, \varepsilon, d_n^{\phi, \alpha}]$; ce qui montre : $\mu(A_n^\zeta \cap P) \leq \mu(P)e^{-n\zeta}$.

Deuxième étape : soient \mathcal{P} une partition finie fixée, des réels α, β tels que $\rho_K(\phi) < e^{-\beta} < \frac{1}{4} e^{-\alpha}$, alors, en posant $f_1(x) = \text{Log} R(D_x \phi, e^{-\beta})$, on montre l'inégalité presque sûre :

$$(2) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log} r[\mathcal{P}_n(x), \varepsilon, d_n^{\phi, \alpha}] \leq E[A(f_1, \mathcal{P}) | \mathcal{I}].$$

Remarquons que $(x \in K \rightarrow R(D_x \phi, e^{-\beta}) \in \mathbb{R}_+)$ est une application s. c. s. et finie partout, donc uniformément bornée. Puisque $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C_K(\varepsilon, \phi) = 0$, il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que :

$$\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_1[\quad r[\phi(B(x, 2\varepsilon)), e^{-\alpha}\varepsilon] \leq f_1(x) \quad (\forall x \in K).$$

(En prenant ε_1 tel que $4(e^{-\beta} + C_K(\varepsilon_1, \phi)) < e^{-\alpha}$.)

On démontre ensuite pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_1[$,

$$r[\mathcal{P}_n(x), 2\varepsilon, d_n^{\phi, \alpha}] \leq r[\mathcal{P}(x), \varepsilon] \prod_{i=0}^{n-2} A(f_1, \mathcal{P}) \circ \phi^i.$$

Le principe consiste à recouvrir l'image par ϕ d'une boule $B(x, \varepsilon)$ par des boules $B(y, \varepsilon e^{-\alpha})$ et à recommencer ce procédé n fois

$$\mathcal{P}_n(x) = \cup \{ A(i_0) : 1 \leq i_0 \leq N_0(x) \} \quad (\text{réunion disjointe})$$

avec $\text{diam}(A(i_0)) < 2\varepsilon$ et $N_0(x) = r[\mathcal{P}(x), \varepsilon]$

$$A(i_0) \subset \mathcal{P}(x) \quad \phi(A(i_0)) = \cup \{ A(i_0, i_1) : 1 \leq i_1 \leq N_1(x) \}$$

avec $\text{diam}(A(i_0, i_1)) < 2\varepsilon \cdot e^{-\alpha}$ et $N_1(x) = A(f_1, \mathcal{P})(x)$.

On continue ainsi jusqu'à ce qu'on ait obtenu une famille

$$\{ A(i_0, i_1, \dots, i_k) : 0 \leq k \leq n-1, 1 \leq i_k \leq N_k(x) \}$$

de parties vérifiant pour tout $0 \leq k \leq n-1$, $\text{diam}[A(i_0, i_1, \dots, i_k)] < 2\varepsilon e^{-k\alpha}$
et

$$\cup \{ A(i_0, i_1, \dots, i_k) : 1 \leq i_0 \leq N_0(x), \dots, 1 \leq i_k \leq N_k(x) \} = \phi^k[\mathcal{P}_n(x)].$$

On choisit arbitrairement des points $x(i_0, \dots, i_{n-1})$ dans chaque $A(i_0, \dots, i_{n-1})$ non vide, puis des points $y(i_0, \dots, i_{n-1})$ dans $\mathcal{P}_n(x)$ tels que

$$[\phi^k y(i_0, i_1, \dots, i_{n-1})] \in A(i_0, \dots, i_k) \quad \text{pour tout } 0 \leq k \leq n-1.$$

Alors $\mathcal{P}_n(x) \subset \cup \{ B_n^{\phi, \alpha}(y(i_0, \dots, i_k), 2\varepsilon) : 1 \leq i_k \leq N_k(x) \}$ car, si $y \in \mathcal{P}_n(x)$, on peut trouver i_0, i_1, \dots, i_{n-1} tels que

$$y \in A(i_0), \phi(y) \in A(i_0, i_1), \dots, \phi^{n-1}(y) \in A(i_0, \dots, i_{n-1})$$

et donc y est dans la boule $B_n^{\phi, \alpha}(y(i_0, \dots, i_{n-1}), 2\varepsilon)$.

Troisième étape : On vient de montrer que, pour toute partition \mathcal{P} finie, et pour tous réels α, β vérifiant $\rho_K(\phi) < e^{-\beta} < \frac{1}{4} e^{-\alpha}$, et pour presque tout x :
(1) + (2) + théorème de Mc Millan A.11)

$$(3) \quad h_n^\alpha(x, \phi) \leq E \left[A(f_1, \mathcal{P}) + I \left(\mathcal{P} \left| \bigvee_{i \geq 1} \phi^{-i} \mathcal{P} \right. \right) \middle| \mathcal{I} \right].$$

Soient maintenant deux réels $\alpha < \beta < -\kappa_K(\phi)$ fixés. Alors pour p suffisamment grand, et pour toute partition finie \mathcal{P} :

$$\rho_K(\phi^p) < e^{-p\beta} < \frac{1}{4} e^{-p\alpha} \quad (\text{condition sur } p)$$

$$h_\mu^{p\alpha}(x, \phi^p) \leq \mathbb{E} \left[A(f_p, \mathcal{P}) + \mathbb{I} \left(\mathcal{P} \left| \bigvee_{i \geq 1} \phi^{-pi} \mathcal{P} \right. \right) \middle| \mathcal{I}(\phi^p) \right]$$

(où $\mathcal{I}(\phi^p) = \{ A \in \mathcal{B}(K) : \phi^{-p}(A) = A \} \supset \mathcal{I}(\phi) = \mathcal{I}$)

(et $f_p(x) = \text{Log } R[D_x \phi^p, e^{-p\beta}]$).

Comme $(x \in K \rightarrow h_\mu^\alpha(x, \phi))$ est une application \mathcal{I} -invariante et

$$h_\mu^\alpha(x, \phi) \leq \frac{1}{p} h_\mu^{p\alpha}(x, \phi^p) \quad (\mu\text{-p. p.}).$$

On obtient finalement, pour p suffisamment grand (ne dépendant que de α, β), et pour toute partition finie \mathcal{P} ,

$$(4) \quad h_\mu^\alpha(x, \phi) \leq \mathbb{E} \left[\frac{1}{p} A(f_p, \mathcal{P}) + \frac{1}{p} \mathbb{I} \left(\mathcal{P} \left| \bigvee_{i \geq 1} \phi^{-pi} \mathcal{P} \right. \right) \middle| \mathcal{I} \right] (x) \quad \mu\text{-p. p.}$$

Si au lieu de \mathcal{P} on prend $\bigvee_{i=0}^{p-1} \phi^{-i} \mathcal{P}$, (4) devient

$$h_\mu^\alpha(x, \phi) \leq \mathbb{E} \left[\frac{1}{p} A \left(f_p, \bigvee_{i=0}^{p-1} \phi^{-i} \mathcal{P} \right) + \mathbb{I} \left(\mathcal{P} \left| \bigvee_{i \geq 1} \phi^{-i} \mathcal{P} \right. \right) \middle| \mathcal{I} \right] (x) \quad \mu\text{-p. p.}$$

Car on voit facilement

$$\mathbb{I} \left(\bigvee_{i=0}^{p-1} \phi^{-i} \mathcal{P} \left| \bigvee_{i \geq p} \phi^{-i} \mathcal{P} \right. \right) = \sum_{k=0}^{p-1} \mathbb{I} \left(\mathcal{P} \left| \bigvee_{i \geq 1} \phi^{-i} \mathcal{P} \right. \right) \circ \phi^k \quad \mu\text{-p. p.}$$

Enfin, d'après le théorème ergodique sous additif de Kingman (A.2)

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} \mathbb{E} \left[A \left(f_p, \bigvee_{i=0}^{p-1} \phi^{-i} \mathcal{P} \right) \middle| \mathcal{I} \right] = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} A \left(f_p, \bigvee_{i=0}^{p-1} \phi^{-i} \mathcal{P} \right) \quad \mu\text{-p. p.}$$

La proposition précédente IV.6° termine alors la démonstration

$$h_\mu^\alpha(x, \phi) \leq \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} f_p = \Delta^\beta(x, \phi) \quad \mu\text{-p. p.}$$

IV.9° REMARQUE. — On peut démontrer la majoration entropique de Ruelle plus simplement sans utiliser la métrique $d_n^{\phi, \alpha}$. On suppose d'abord que μ est une mesure ergodique (grâce au théorème de décomposition de mesure quelconque en composantes ergodiques), et on majore le nombre minimum $N(n, \varepsilon)$ de boules de rayon ε pour la métrique $d_n^{\phi, 0}$ nécessaire pour recouvrir un ensemble de mesure $\frac{1}{2}$ (par exemple) de la même manière que précédemment (deuxième étape). Il reste alors à appliquer le théorème de Katok ([WA], 8.19) :
$$h_\mu(\phi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log } N(n, \varepsilon).$$

A. — APPENDICE DE THÉORIE ERGODIQUE

Dans cette partie, il est rappelé sans démonstration les propriétés de théorie ergodique qui sont utilisées dans les chapitres 3 et 4. On appelle système dynamique mesuré S. D. M. un triplet $(X, \mathcal{B}, \mu, \phi)$ où X est un ensemble, \mathcal{B} une tribu sur X , μ une mesure de probabilité sur (X, \mathcal{B}) ϕ -invariante, $\phi : X \rightarrow X$ une application \mathcal{B} -mesurable.

A. 1. THÉORÈME ERGODIQUE PONCTUEL (BIRKHOFF). — Si $(X, \mathcal{B}, \mu, \phi)$ est un S. D. M., alors pour tout f \mathcal{B} -mesurable vérifiant $f^+ \in \mathcal{L}^1(\mu)$, il existe \bar{f} \mathcal{I} -mesurable (où \mathcal{I} est la tribu des invariants) tel que :

- i) $\bar{f}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ \phi^k \quad \mu\text{-p. p.}$
- ii) $\bar{f}^+ \in \mathcal{L}^1(\mu)$
- iii) $\forall B \in \mathcal{I} \int_B \bar{f} d\mu = \int_B f d\mu.$

A. 2. THÉORÈME ERGODIQUE SOUS ADDITIF (KINGMAN). — Si $(X, \mathcal{B}, \mu, \phi)$ est un S. D. M. et si $(f_n)_{n \geq 0}$ est une suite de fonctions \mathcal{B} -mesurables vérifiant

- a) $f_n^+ \in \mathcal{L}^1(\mu),$
- b) $f_{n+m} \leq f_n \circ \phi^m + f_m \quad \mu\text{-p. p.}$

alors il existe F \mathcal{I} -mesurables tel que :

- i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} f_n = F(\mu\text{-p. p.})$
- ii) $F^+ \in \mathcal{L}^1(\mu)$
- iii) $\forall B \in \mathcal{I} \int_B F d\mu = \inf_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} \int_B f_n d\mu \right).$

A. 3. REMARQUE. — Si, dans le théorème A. 2, on suppose de plus ϕ inversible et si on appelle pour tout n $g_n = f_n \circ \phi^{-n}$ alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} g_n = F = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} f_n \quad (\mu\text{-p. p.}).$$

A. 4. REMARQUE. — Si $(X, \mathcal{B}, \mu, \phi)$ est un S. D. M. et si f est une application \mathcal{B} -mesurable qui vérifie $f \leq f \circ \phi$ (μ -p. p.), alors f vérifie en fait $f = f \circ \phi$ (μ -p. p.).

A. 5. PROPOSITION. — Soient $(X, \mathcal{B}, \mu, \phi)$ un S. D. M. et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une application \mathcal{B} -mesurable. Alors :

- i) $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} f \circ \phi^n \geq 0 \quad (\mu\text{-p. p.});$
- ii) si $(f \circ \phi - f)^+ \in \mathcal{L}^1(\mu)$ alors $f \circ \phi - f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} f \circ \phi^n = 0 \quad (\mu\text{-p. p.}).$

Démonstration de ii) : Pour tout $n \geq 0$ on pose

$$g_n = -n \cdot \mathbb{1}_{(f < -n)} + f \cdot \mathbb{1}_{(-n \leq f \leq n)} + n \mathbb{1}_{(f > n)}.$$

Comme $g_n \in \mathcal{L}^1(\mu)$ on a bien $\int (g_n \circ \phi - g_n)^- d\mu = \int (g_n \circ \phi - g_n)^+ d\mu$.

Pour conclure il suffit maintenant de remarquer que $(g_n \circ \phi - g_n)^+ \leq (f \circ \phi - f)^+$, et d'après Fatou

$$\int \liminf_{n \rightarrow +\infty} (g_n \circ \phi - g_n)^- d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int (g_n \circ \phi - g_n)^+ d\mu \leq \int (f \circ \phi - f)^+ d\mu.$$

A.6. COROLLAIRE. — Soient $(X, \mathcal{B}, \mu, \phi)$ un S. D. M., $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une application \mathcal{B} -mesurable, $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ une application \mathcal{S} -mesurable. Si $(f \circ \phi - f)^+ \leq F$ (μ -p. p.)

alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} f \circ \phi^n = 0$ (μ -p. p.).

A.7. THÉORÈME *extension naturelle*. — Soient $(X, \mathcal{B}, \mu, \phi)$ un S. D. M. tel que X soit un espace séparable séparé et ϕ soit surjective. Alors il existe un S. D. M. $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mu}, \tilde{\phi})$ inversible (\tilde{X} aussi séparable séparé) est une surjection mesurable $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ tels que :

- i) $\tilde{\mu} \circ \pi^{-1} = \mu$
- ii) $\pi \circ \tilde{\phi} = \phi \circ \pi$
- iii) propriété universelle P. U.

P. U. : pour tout autre S. D. M. $(Z, \mathcal{D}, \nu, \theta)$ inversible et application surjective mesurable $p : Z \rightarrow X$ vérifiant i) et ii) il existe une unique application surjective mesurable $q : Z \rightarrow \tilde{X}$ telle que :

- i) $\nu \circ q^{-1} = \tilde{\mu}$
- ii) $q \circ \theta = \tilde{\phi} \circ q$
- iii) $p = \pi \circ q$.

A.8. COROLLAIRE. — Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, \phi)$ un S. D. M. où X est un espace métrique compact et $\phi : X \rightarrow X$ est une application continue. Alors $Y = \bigcap_{n \geq 0} \phi^n X$ est une partie compacte de X de mesure 1 stable par ϕ , la restriction de ϕ à Y est surjective. On appellera extension naturelle de ce S. D. M., l'extension naturelle de $(Y, \mathcal{B}_Y, \mu|_Y, \phi|_Y)$.

A.9. REMARQUE. — Soient $(X, \mathcal{B}, \mu, \phi)$ un S. D. M. tel que X est un espace métrique complet séparable et ϕ est une application surjective, (\tilde{X}, π) une extension naturelle de X , Y un espace topologique, $f : \tilde{X} \rightarrow Y$ une application $\tilde{\mu}$ -continue. S'il existe $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{B}}$, $\tilde{\mu}(\tilde{A}) = 1$, tel que \tilde{f} soit constante sur chaque $\tilde{A} \cap \pi^{-1}(x)$, $x \in X$, alors l'unique application $f : X \rightarrow Y$ (\tilde{A} un ensemble μ -négligeable près) telle que $\tilde{f} = f \circ \pi$ est μ -continue.

On peut trouver les démonstrations des deux théorèmes A.1 et A.2 dans l'article de Y. Katznelson et B. Weiss [KW], du théorème d'extension naturelle dans le livre de Cornfeld-Fomin-Sinaiï [C. S.].

A.10. DÉFINITIONS. — Soient $(X, \mathcal{B}, \mu, \phi)$ un S. D. M., \mathcal{P} une partition mesurable finie de X , et \mathcal{A} une sous-tribu de \mathcal{B} . On appelle information de \mathcal{P} , et information de \mathcal{P} sachant \mathcal{A} , les applications :

$$I(\mathcal{P}) = \sum_{P \in \mathcal{P}} -\text{Log } \mu(P) \mathbb{1}_P, \quad I(\mathcal{P} | \mathcal{A}) = \sum_{P \in \mathcal{P}} -\text{Log } \mu[P | \mathcal{A}] \mathbb{1}_P.$$

On appelle entropie de \mathcal{P} , ou entropie de \mathcal{P} sachant \mathcal{A} , les réels :

$$H(\mathcal{P}) = \int I(\mathcal{P})d\mu, \quad H(\mathcal{P} | \mathcal{A}) = \int I(\mathcal{P} | \mathcal{A})d\mu.$$

On appelle entropie de (\mathcal{P}, ϕ) et entropie de ϕ les réels :

$$h_\mu(\mathcal{P}, \phi) = \int I\left(\mathcal{P} \left| \bigvee_{i \geq 1} \phi^{-i}\mathcal{P} \right.\right) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} \phi^{-i}\mathcal{P}\right)$$

$$h_\mu(\phi) = \sup \{ h_\mu(\mathcal{P}, \phi) : \mathcal{P} \text{ partition finie mesurable} \}.$$

A. 11. THÉORÈME (MC MILLAN). — Soient $(X, \mathcal{B}, \mu, \phi)$ un S. D. M. et \mathcal{P} une partition finie mesurable. Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} I\left[\bigvee_{i=0}^{n-1} \phi^{-i}\mathcal{P}\right] = E\left[I\left(\mathcal{P} \left| \bigvee_{i \geq 1} \phi^{-i}\mathcal{P} \right.\right) \middle| \mathcal{I}\right].$$

On trouvera dans le livre de théorie ergodique de P. Walters WA la démonstration de ce théorème, ainsi que beaucoup d'autres compléments sur l'entropie.

B. — APPENDICE

SUR LES VARIÉTÉS GRASSMANIENNES

Cette partie décrit plus en détails les propriétés intuitives et simples à montrer des variétés grassmanniennes. Le plan de cette partie est le suivant :

- B.1. Définition des variétés grassmanniennes $G(E)$ d'un espace de Banach E .
- B.2. Critères de convergence des s. e. v. de dimension finie.
- B.3. Lien entre $L(E)$ et $G(E)$.
- B.4. Construction d'un champ continu de supplémentaires topologiques.

B.1.1. DÉFINITIONS. — On note $G(E)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E (un espace de Banach) admettant un supplémentaire topologique, $G_n(E)$ (resp. $G^n(E)$) l'ensemble des s. e. v. de E de dimension n (resp. des s. e. v. fermés de E de codimension n). En particulier les éléments de $G(E)$ sont à leur tour des espaces de Banach. Pour tout couple (F_0, G_0) de s. e. v. de E vérifiant $F_0 \underset{s.t.}{\oplus} G_0 = E$, on note $U_{G_0} = \{ F \in G(E) \mid F \underset{s.t.}{\oplus} G_0 = E \}$, ϕ_{F_0, G_0} l'application de U_{G_0} dans $L(F_0, G_0)$ ($F \mapsto (\pi_{(G_0 \parallel F)} \mid F_0)$) (où $\pi_{(G_0 \parallel F)}$ est la projection sur G_0 parallèlement à F) et C_{F_0, G_0} , le triplet $(U_{G_0}, \phi_{F_0, G_0}, L(F_0, G_0))$.

B.1.2. PROPOSITION. — Pour tout $(F_0, G_0) \in G(E)^2$ vérifiant $F_0 \underset{s.t.}{\oplus} G_0 = E$, ϕ_{F_0, G_0} est une bijection de U_{G_0} sur $L(F_0, G_0)$. Et $\mathcal{A} = \{ c_{F_0, G_0} \mid F_0 \underset{s.t.}{\oplus} G_0 = E \}$ forme un atlas analytique sur $G(E)$.

Pour démontrer cette proposition on utilise la remarque suivante : si $u \in L(E)$ et $\|u\| < 1$ alors $Id - u$ se développe en série entière.

B.1.3. REMARQUE. — Soient $(F_0, G_0) \in G(E)^2$ vérifiant $F_0 \underset{s.t.}{\oplus} G_0 = E$. Alors tout F de U_{G_0} est isomorphe à $F_0((\pi_{(F_0 \parallel G_0)} \mid F) \in \text{Isom}(F, F_0)$ d'inverse $(\pi_{(F \parallel G_0)} \mid F_0) \in \text{Isom}(F_0, F)$. Ce qui montre par exemple que $G_n(E)$ et $G^n(E)$ sont à la fois ouverts et fermés pour tout n .

B.2.1. PROPOSITION. — Soient $(F, G) \in G(E)^2$ et $(F_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de $G(E)$ qui vérifient $F \underset{s.t.}{\oplus} G = E$ et $F_n \underset{s.t.}{\oplus} G = E$ pour tout $n \geq 0$. Alors $(F_n)_{n \geq 0}$ converge vers F si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\pi_{(G \parallel F)} \mid F_n\| = 0$.

Cette proposition est simple et donne une caractéristique plus pratique de la convergence des suites dans $G(E)$.

B.2.2. REMARQUE. — Soient E un e. v. n, F un s. e. v. de dimension finie, et G un s. e. v. fermé de E qui vérifient $F \oplus G = E$. Alors la somme est topologique et

$$\|\pi_{(F \parallel G)}\| = \frac{1}{d(S_F, G)}, \quad \|\pi_{(G \parallel F)}\| = \frac{1}{d(S_G, F)}.$$

On peut interpréter la norme d'un projecteur comme l'inverse d'une mesure angulaire entre son noyau et son image.

B.2.3. PROPOSITION. — Soient E un espace de Banach, F_n des s. e. v. de dimension finie d , et (v_1^n, \dots, v_d^n) une base de F_n . Si pour tout i , $(v_i^n)_{n \geq 0}$ converge vers w_i , et si (w_1, \dots, w_d) est un système libre, alors $(F_n)_{n \geq 0}$ converge dans $G(E)$ vers $F = \mathbb{R}w_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{R}w_d$.

Cette proposition est intuitive mais n'est pas si facile à démontrer à partir de la définition générale.

B. 3.1. PROPOSITION. — Soit E un espace de Banach. Alors les applications

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{L(E)} \times \mathbf{G(E)} \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (\mathbf{T}, \mathbf{F}) \mapsto \|\mathbf{T} | \mathbf{F}\| \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{L(E)} \times \mathbf{G(E)} \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (\mathbf{T}, \mathbf{F}) \mapsto \rho(\mathbf{T} | \mathbf{F}) \end{array} \right\}$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{L(E)} \times \mathbf{G(E)} \setminus \{ \mathbf{E} \} \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (\mathbf{T}, \mathbf{F}) \mapsto \inf \{ \|\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}\| \mid \mathbf{v} \in \mathbf{F} \text{ et } \|\mathbf{v}\| = 1 \} \end{array} \right\} \text{ sont continues.}$$

B. 3.2. PROPOSITION. — Soient E un espace de Banach et $\mathbf{P(E)} = \{ p \in \mathbf{L(E)} \mid p^2 = \text{Id} \}$.

Alors $\mathbf{P(E)}$ est une partie fermée de $\mathbf{L(E)}$ et l'application $\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{P(E)} \rightarrow \mathbf{G(E)} \\ p \mapsto \ker p \end{array} \right\}$ est continue.

Démonstration. — Si $p \in \mathbf{P(E)}$ on notera $q = \text{Id} - p \in \mathbf{P(E)}$. Soient $p_0 \in \mathbf{P(E)}$ et l'ouvert $\omega_0 = \{ p \in \mathbf{P(E)} \mid \|q \cdot p_0\| < 1 \text{ et } \|pq_0\| < 1 \}$, et montrons que, pour tout $p \in \omega_0$, $\ker p \oplus \text{s.t.} \text{Im } p_0 = E$ et que l'application ($p \in \omega \rightarrow (\pi_{\text{Im } p_0 | \ker p} | \ker p_0) \in \mathbf{G(E)}$) est continue. D'une part $\ker p \cap \text{Im } p_0 = \{ 0 \}$ pour tout $p \in \omega$, car si $pp_0(w) = 0$ pour un certain $w \in E$, $qp \cdot o(w) = p_0(w)$, et alors $\|qp_0\| \cdot \|p_0(w)\| \geq \|p_0(w)\|$ et $p_0(w) = 0$. D'autre part, si on pose $\pi = [\text{Id} - q \cdot p_0]^{-1} \cdot p$ alors $\text{Im } \pi \subset \text{Im } p_0$ et $\text{Im}(\text{Id} - \pi) \subset \ker p$, car si $w = \pi(v)$, alors $(\text{Id} - q \cdot p_0)(w) = p(v)$, $q_0(w) + pp_0(w) = p(v)$, $qq_0(w) = 0$, $q_0(w) = pq_0q_0(w)$, et comme $\|pq_0\| < 1$, nécessairement, $q_0(w) = 0$, $p(w) = p(v)$. Ce qui montre en même temps que

$$(\pi_{\text{Im } p_0 | \ker p} | \ker p_0) = [\text{Id} - qp_0]^{-1} \circ (p | \ker p_0).$$

B. 3.3. PROPOSITION. — Soient E_1 et E_2 deux espaces de Banach et $\pi : E_1 \rightarrow E_2$ une application linéaire continue surjective. Appelons $\Phi = \{ F \in \mathbf{G}^\infty(E_1) \mid \ker \pi \subset F \}$ (où $\mathbf{G}^\infty(E_1)$ est l'ensemble des sous-espaces fermés de E_1 de codimension finie), alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi \rightarrow \mathbf{G}^\infty(E_2) \\ F \rightarrow \pi(F) \end{array} \right\} \text{ est une application continue injective.}$$

Démonstration. — Soient $F \in \Phi$ et $G_0 \in \mathbf{G}(E_1)$ tels que $F \oplus_{\text{s.t.}} G_0 = E_1$, alors $\pi(F) \oplus \pi(G_0) = E_2$ (car si $\pi(x) = \pi(y)$ avec $x \in F$ et $y \in G$, $x - y \in \ker \pi \subset F$, $y \in F \cap G$, $y = 0$). Puisque F est fermé, que $[\pi(F)]^c = \pi[F^c]$, et que π est une application ouverte, $\pi(F)$ est aussi fermé. Ce qui montre $\pi(F) \oplus_{\text{s.t.}} \pi(G_0) = E_2$ et donc $\pi(U_{G_0}) \subset U_{\pi(G_0)}$. Grâce au lemme suivant, il existe une constante $M > 0$ telle que $B_{\pi(F_0)} \subset \pi(M \cdot B_{F_0})$. Pour tout w de $\pi(F_0)$ de norme 1, il existe v de F_0 de norme au plus M tel que $\pi_{(\pi(G_0) | \pi(F))} \cdot w = \pi \circ \pi_{(G_0 | F)} \cdot v$ et donc

$$\|\pi_{(\pi(G_0) | \pi(F))} | \pi(F_0)\| \leq M \cdot \|\pi_{(G_0 | F)} | F_0\|$$

ce qui termine la démonstration de la continuité de π .

B. 3.4. LEMME. — Soient E, F deux espaces de Banach, et $\pi : E \rightarrow F$ une application linéaire surjective continue. Alors il existe une constante $M > 0$ telle que $B_F \subset \pi(M \cdot B_E)$.

B. 4.1. DÉFINITION. — Soient E un e. v. n. de dimension finie d , et $\xi = (e_1, \dots, e_d)$ d vecteurs de norme 1 de E. On dit que ξ est une base de Auerbach si ξ vérifie l'une des deux conditions équivalentes :

- 1) $\forall i \in \mathbb{N}_d d(e_i, \text{vect}(e_j \mid j \neq i)) = 1$
- 2) $\forall i \in \mathbb{N}_d \|e_i^*\| = 1$

où $\text{Vect}(\dots)$ désigne le s. e. v. engendré par (\dots) et où (e_1^*, \dots, e_d^*) est la base duale de (e_1, \dots, e_d) .

B. 4.2. PROPOSITION. — Tout e. v. n. de dimension finie possède une base de Auerbach.

Démonstration. — Soient $\Delta : E^d \rightarrow \mathbb{R}$ une forme d -linéaire alternée non nulle sur E , et S la sphère unité de E . Comme S^d est une partie compacte de E^d , il existe (e_1, \dots, e_d) de norme 1 tel que $\Delta(e_1, \dots, e_d) = \sup \{ \Delta(x_1, \dots, x_d) \mid x_i \in S \}$. On remarque alors que

$$e_i^* = \Delta(e_1, \dots, e_{i-1}, \dots, e_{i+1}, \dots, e_d) / \Delta(e_1, \dots, e_d) \quad \text{et que} \quad \|e_i\|^* = 1.$$

B. 4.3. LEMME. — Soit E un e. v. n. Alors pour tout s. e. v. de F de dimension d de E , il existe un supplémentaire topologique G de F tel que $\|\pi_{(F||G)}\| \leq d$.

Démonstration. — Il existe une base de Auerbach d'après B. 4.2 (e_1, \dots, e_d) de F . On prolonge alors d'après Hahn-Banach les formes linéaires (e_1^*, \dots, e_d^*) de F^* sur E sans

changer la norme. Le sous-espace $G = \bigcap_{i=1}^d \ker e_i^*$ convient car $\pi_{(F||G)} = \sum_{i=1}^d e_i^*(\cdot) e_i$.

B. 4.4. PROPOSITION. — Soit E un espace de Banach et X un espace métrique compact.

1) Si $\left\{ \begin{array}{l} X \rightarrow G(E) \\ x \mapsto F_x \end{array} \right\}$ est continue, alors il existe $\left\{ \begin{array}{l} X \rightarrow G(E) \\ x \mapsto G_x \end{array} \right\}$ continue telle que $F_x \oplus_{s.t.} G_x = E \quad (\forall x \in X)$.

2) Si de plus $\dim F_x = d \quad (\forall x \in X)$, on peut imposer $\|\pi_{(F_x||G_x)}\| \leq d + 1 \quad (\forall x \in X)$.

Démonstration. — 1) Pour tout $x \in X$, il existe $H_x \in G(E)$ tel que $F_x \oplus_{s.t.} H_x = E$. On note $U_x = \{ F \in G(E) \mid F \oplus_{s.t.} H_x = E \}$ et $\Omega_x = \{ y \in X \mid F_y \in U_x \}$. Puisque X est compact, il

existe x_1, \dots, x_n tels que $X = \bigcup_{i=1}^n \Omega_{x_i}$. Soit $(\phi_i)_{1 \leq i \leq n}$ une partition de l'unité adaptée

au recouvrement $(\Omega_{x_1}, \dots, \Omega_{x_n})$. Pour tout $x \in X$ posons $L_x = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) \cdot \pi_{(H_{x_i}||F_x)}$ et $M_x = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) \cdot \pi_{(F_{x_i}||H_{x_i})}$. Alors $L_x + M_x = Id$, $M_x^2 = M_x$, $\text{Im } M_x = F_x$, l'application

$\left\{ \begin{array}{l} X \mapsto G(E) \\ x \mapsto M_x \end{array} \right\}$ est continue. En utilisant la proposition B.3.2 on en déduit que

$\left\{ \begin{array}{l} X \rightarrow G(E) \\ x \mapsto G_x \end{array} \right\}$ est continue où $G_x = \ker M_x$.

2) La démonstration est identique, mais on choisit H_x de sorte que $\|\pi_{(F_x||H_x)}\| \leq d$ et l'ouvert $\Omega_x = \{ y \in X \mid F_y \in U_x \text{ et } \|\pi_{(F_y||H_x)}\| < d + 1 \}$.

RÉFÉRENCES

- [BK] M. BRIN, A. KATOK, On local entropy. *Lecture Notes in Mathematics*, 1007, *Geometric Dynamic*, p. 30-38.
 [BO] N. BOURBAKI, *Variétés différentielles et analytiques*. Éléments de Mathématiques, CCLS diffusion, 1983.
 [CS] CORNFELD, FOMIN, SINAI, *Ergodic theory*. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin.

- [KW] Y. KATZNELSON, B. WEISS, A simple proof of some ergodic theorems. *Israël Journal of Mathematics*, t. **42**, 4, 1982.
- [HA] J. HALE, *Theory of functional differential equations*. Springer-Verlag, 1977.
- [LY] F. LEDRAPPIER, L. S. YOUNG, The metric theory of diffeomorphisms. A paraître dans *Ann. of Math.*, 1985.
- [MA] MAÑE, Lyapounov exponents and stable manifolds for compact transformations. *Lecture Notes in Mathematics*, 1007, *Geometric Dynamic*, p. 522-577.
- [OS] V. I. OSELEDEC, A multiplicative ergodic theorem. *Trans. Moscow Math. Soc.*, t. **19**, 1968, p. 197-231.
- [PA] K. R. PARTHASARATHY, *Introduction to probability and measure*.
- [PE] Y. B. PESIN, Characteristic Lyapounov exponents and smooth ergodic theory. *Russian Math. Surveys*, t. **32**, 4, 1977, p. 55-114.
- [RE] D. RUELLE, I. ECKMANN, Ergodic theory of chaos and strange attractors. *Reviews of Modern Physics*, t. **57**, 1985, p. 617-656.
- [RO] M. ROSEAU, *Equations différentielles*.
- [RU]₁ D. RUELLE, *Ergodic theory of differentiable systems*. Publication IHES, t. **50**, 1979.
- [RU]₂ D. RUELLE, Characteristic exponents and invariant manifolds in Hilbert space. *Annals of Mathematics*, t. **115**, 1982.
- [TA] F. TAKENS, Detecting strange attractors in turbulence. *Lecture Notes in Mathematics*, 898. *Dynamical Systems and Turbulence*, Warwick, 1980.
- [WA] P. WALTERS, *An introduction to Ergodic Theory*. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin.

(Manuscrit reçu le 14 juillet 1985)

(révisé le 24 avril 1986)