Université Bordeaux 1
Licence de Sciences et Technologies
2011-2012

Fondamentaux pour
les Mathématiques et l'Informatique
M1MI1002

Corrigé du devoir surveillé du 10 octobre 2011

Exercice 1.

1. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow q$ équivaut à $\neg((\neg p) \vee q) \vee q)$, soit encore à $(p \wedge (\neg q)) \vee q$, ce qui se simplifie en $p \vee q$.
2. Table de vérité (on rappelle la valeur de $p \Rightarrow q$) :

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	1

   Remarque : $(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$ équivaut à p.
3. La proposition $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ est une tautologie, comme on peut s'en convaincre aisément (par exemple en écrivant sa table de vérité). La proposition $((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow p))$ est donc *a fortiori* une tautologie.

Exercice 2.

1. Tout entier est divisible par 1 : $\forall x \in \mathbb{N}, d(x, 1)$
2. Tout entier est divisible par lui-même : $\forall x \in \mathbb{N}, d(x, x)$
3. 2011 est un nombre premier (il n'a pas d'autres diviseurs que 1 et lui-même) :

$$\forall x \in \mathbb{N}, d(2011, x) \Rightarrow (x = 1 \vee x = 2011)$$

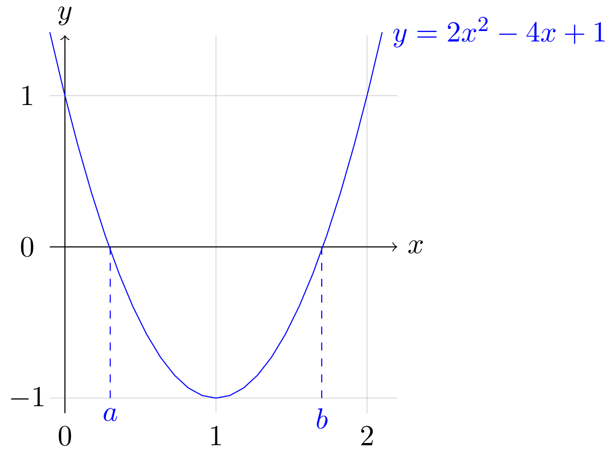
Exercice 3.

1. "Au moins un habitant de la rue du Havre qui a les yeux bleus ne gagnera pas au loto, ou ne prendra pas sa retraite avant 50 ans."
2. Si un truand dit : "Tous les truands sont des menteurs", il est impossible qu'il dise la vérité (dans ce cas, il serait lui-même un menteur, donc il aurait dit un mensonge). Donc la phrase est fausse. (On peut en déduire qu'au moins un truand n'est pas un menteur.)

Exercice 4. Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. On pose $X = A \cup (B \setminus C)$ et $Y = (A \cup B) \setminus C$.

1. On a toujours $Y \subset X$: en effet $Y = (A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \subset A \cup (B \setminus C)$.
2. En revanche, X n'est pas nécessairement inclus dans Y. Exemple : si $A = C = \{1\}$ et $B = \emptyset$, alors $X = \{1\}$ et $Y = \emptyset$.

Exercice 5. Représentation graphique de f :



1. $f([0,2]) = [-1,1]$.
2. $f^{-1}([0,1]) = [0,a] \cup [b,2]$ où a et b sont respectivement la plus petite et la plus grande racine de $2x^2 - 4x + 1$: $a = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $b = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.