Université Bordeaux 1
Licence de Sciences et Technologies
2012-2013

Fondamentaux pour
les Mathématiques et l'Informatique
M1MI1002

Deuxième devoir surveillé

19 Novembre 2012, Durée 1h00
Documents non autorisés.

Les 3 exercices sont indépendants.

Exercice 1.

Pour tout entier $n \geqslant 1$ on appelle factorielle de n le produit $n! = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n$. Soit

$$S_n = 1 \cdot (1!) + 2 \cdot (2!) + \cdots + n \cdot (n!), \qquad n \geqslant 1.$$

1. Ecrire S_n en utilisant le signe $\sum$.

   $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} k.(k!)$

2. Calculer $n!$ puis S_n pour $n \leqslant 5$ et remplir le tableau suivant

n	$n!$	S_n
1	1	1
2	2	5
3	6	23
4	24	119
5	120	719

3. Conjecturer une relation simple entre S_n et $(n+1)!$. La démontrer par récurrence.

   $P_n : S_n = (n+1)! - 1$

   Initialisation : P_1 est vraie car $S_1 = 1 = 2! - 1$

   Hérédité : Supposons la propriété établie au rang n. On a alors :

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + (n+1).(n+1)! \quad \text{par définition} \\ &= (n+1)! - 1 + (n+1).(n+1)! \quad \text{grâce à l'hypothèse de récurrence} \\ &= (n+1)!(n+2) - 1 \\ &= (n+2)! - 1 \end{aligned}$$

On a donc $P_n \Rightarrow P_{n+1}$

Conclusion : d'après le théorème de récurrence, P_n est vraie pour tout $n \geq 1$

Exercice 2.
Soit $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = (x^2, \frac{1}{x^2})$.

1. Calculer $f(-1)$. La fonction f est-elle injective ?

   $f(-1) = (1, 1)$
   On a $f(-1) = f(1) = (1, 1)$. Deux éléments distincts de $\mathbb{R}^*$ ont la même image donc f n'est pas injective.

2. Soit $(y, z) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ tels que $yz = 1$. Quels sont les antécédents de (y, z) par f ?

   Les antécédents $x \in \mathbb{R}^*$ de (y, z) vérifient $x^2 = y$ et $\frac{1}{x^2} = z$. Comme on a $(y, z) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ et $yz = 1$, ces deux contraintes sont équivalentes. Il y a donc deux antécédents de (y, z) : $x = \sqrt{y}$ et $x = -\sqrt{y}$.

   En déduire que l'image de $\mathbb{R}^*$ par f est $\{(y, z) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \mid yz = 1\}$.

   On veut montrer que $f(\mathbb{R}^*) = \{(y, z) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \mid yz = 1\}$ qu'on peut aussi écrire $\{(y, \frac{1}{y}), y \in \mathbb{R}_+^*\}$.
   Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a $f(x) = (x^2, \frac{1}{x^2})$. Donc $f(\mathbb{R}^*) \subset \{(y, \frac{1}{y}), y \in \mathbb{R}_+^*\}$.
   Par ailleurs, $\forall y \in \mathbb{R}_+^*$, $(y, \frac{1}{y})$ est l'image de $\sqrt{y}$ par f donc $\{(y, \frac{1}{y}), y \in \mathbb{R}_+^*\} \subset f(\mathbb{R}^*)$.

   La fonction f est-elle surjective ?

   La fonction f n'est pas surjective car tous les couples de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ n'ont pas d'antécédent par f (par exemple $(-1, -1)$).

Exercice 3.
Soient A et B deux ensembles. On note $\mathcal{P}(A)$ et $\mathcal{P}(B)$ les ensembles des parties de A et B respectivement. Soient

$$E = \{(X, Y) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \mid Card(X) = Card(Y)\}$$

et

$$E_k = \{(X, Y) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \mid Card(X) = Card(Y) = k\}.$$

1. Soient $A = \{a, b\}$ et $B = \{c, d, e\}$.

   a. Expliciter les ensembles $\mathcal{P}(A)$, $\mathcal{P}(B)$, E_0, E_1, E_2, et E_3.

   $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
   $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{c, d\}\{c, e\}, \{d, e\}, \{c, d, e\}\}$

$E_0 = \{(\emptyset, \emptyset)\}$
$E_1 = \{(\{a\}, \{c\}), (\{a\}, \{d\}), (\{a\}, \{e\}), (\{b\}, \{c\}), (\{b\}, \{d\}), (\{b\}, \{e\})\}$
$E_2 = \{(\{a, b\}, \{c, d\}), (\{a, b\}, \{c, e\}), (\{a, b\}, \{d, e\})\}$
$E_3 = \emptyset$

b. Quel est le cardinal de E pour ce choix de A et B ?

$Card(E) = Card(E_0) + Card(E_1) + Card(E_2) = 1 + 6 + 3 = 10$

2. On suppose maintenant que A et B sont finis, de cardinaux respectifs m et n tels que $m \leq n$.

a. Question de cours : quel est le nombre de parties de A à k éléments $(0 \leqslant k \leqslant m)$?

Le nombre de parties à k éléments d'un ensemble fini comportant m éléments est : $\binom{m}{k}$.

b. Soit k un entier tel que $0 \leqslant k \leqslant m$. Donner une expression du cardinal de E_k en termes de coefficients binomiaux.

E_k est composé des couples formés d'une partie à k éléments de A et d'une partie à k éléments de B donc $Card(E_k) = \binom{m}{k}.\binom{n}{k}$.

c. En déduire une expression du cardinal de E.

E est l'union des ensembles E_k qui sont disjoints donc :
$Card(E) = \sum_{k=0}^{k=m} Card(E_k) = \sum_{k=0}^{k=m} \binom{m}{k}.\binom{n}{k}$

FIN