Chapitre 2

Théorie des ensembles

2.1 Ensembles

2.1.1 Ensembles et parties d'un ensemble

Définition 2.1. Si chaque élément d'un ensemble E est également élément de l'ensemble F on dit que E **est inclus** dans F, ou que E est **une partie** de F et on note $E \subset F$. On a donc $E \subset F$ si et seulement si $\forall x \in E, x \in F$.
En particulier, toute ensemble est contenu dans lui-même ($E \subset E$) et l'ensemble vide est inclus dans tous les ensembles ($\emptyset \subset E$).

Remarque : la notation $E \subset F$ signifie que E est inclus dans F « au sens large », c'est-à-dire que E est *éventuellement* égal à F. Pour distinguer inclusion *au sens strict* et *au sens large*, on introduit parfois les notations $E \subseteq F$ (E est inclus dans ou égal à F) et $E \subsetneq F$ (E est inclus dans F strictement). Les notations $E \subset F$ et $E \subseteq F$ signifient donc *exactement la même chose.*

On peut décrire un ensemble **en extension** en donnant tous ses éléments entre accolades (par exemple : $E = \{1, 3, 7, 5, 2\}$).
On peut aussi décrire un sous-ensemble E d'un ensemble F **en compréhension**, c'est-à-dire en donnant une propriété qui caractérise ses éléments : $E = \{x \in F / \, p(x)\}$ est l'ensemble de tous les éléments de F pour lesquels la propriété $p(x)$ est vraie (par exemple :
$\{x \in \mathbb{Z} / \, x^2 = 4\} = \{-2, 2\}$).
Enfin, on définit souvent un ensemble en donnant une manière de construire chacun de ses éléments ; par exemple $\{n^2, n \in \mathbb{N}\} = \{m \in \mathbb{N} / \, \exists n \in \mathbb{N}, m = n^2\}$.
Attention un ensemble peut avoir pour élément des ensembles... Ainsi $\{\emptyset\}$ est un ensemble contenant un élément, l'ensemble vide. Ce n'est donc pas l'ensemble vide : $\{\emptyset\} \neq \emptyset$.

Proposition 2. Si A, B et C sont trois ensembles, on a l'implication
$(A \subset B)$ et $(B \subset C) \Rightarrow A \subset C$.

Définition 2.2. L'ensemble des parties d'un ensemble E, noté $\mathcal{P}(E)$ est formé de tous les ensembles inclus dans E. En particulier, il contient toujours $\emptyset$ et E.

Exemple : $\mathcal{P}(\{0, 1\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$.

2.1.2 Opérations sur les ensembles

Définition 2.3. Soient E et F deux ensembles. La **réunion** de E et F notée $E \cup F$ est formée des éléments qui appartiennent à E ou à F. On a donc
$x \in E \cup F \Leftrightarrow (x \in E \text{ ou } x \in F)$

Définition 2.4. Soient E et F deux ensembles. L'**intersection** de E et F notée $E \cap F$ est formée des éléments qui appartiennent à E et à F. On a donc
$x \in E \cap F \Leftrightarrow (x \in E \text{ et } x \in F)$
Si $E \cap F = \emptyset$ on dit que E et F sont **disjoints**.

Proposition 3. Si E, F, G sont trois ensembles, on a les égalités suivantes :
- Commutativité : $E \cup F = F \cup E$ et $E \cap F = F \cap E$
- Associativité : $(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G)$ et $(E \cap F) \cap G = E \cap (F \cap G)$
- Distributivité 1 : $E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G)$
- Distributivité 2 : $E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$.
- $E \cup \emptyset = E$ et $E \cap \emptyset = \emptyset$
- $E \cap E = E \cup E = E$

Définition 2.5. Soit E un ensemble et F une partie de E. Le **complémentaire** de F dans E noté $\complement_E F$ (ou parfois F^c) est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à F. On a donc $\complement_E F = \{x \in E / x \notin F\}$.
En particulier, $\complement_E F \cup F = E$ et $\complement_E F \cap F = \emptyset$.

Définition 2.6. Soient F et G deux parties d'un ensemble E. L'ensemble $F \backslash G$ est l'ensemble formé des éléments de E qui appartiennent à F et pas à G. On a donc
$F \backslash G = F \cap (\complement_E G)$.
En particulier, $E \backslash F = \complement_E F$, $E \backslash \emptyset = E$

Proposition 4. Soient E un ensemble et A et B deux parties de E. On a alors
$\complement_E \left(\complement_E A\right)$, $\complement_E(A \cap B) = \complement_E A \cup \complement_E B$, et $\complement_E(A \cup B) = \complement_E A \cap \complement_E B$.

Remarque : L'union, l'intersection et le complémentaire sont la traduction en terme d'appartenance à un ensemble des opérations logiques “et”, “ou” et “non”.

Définition 2.7. Une partition d'un ensemble E est la donnée d'une famille de parties de E $(F_i)_{i \in I}$ non vides, deux-à-deux disjointes, et telles que $\cup_{i \in I} F_i = E$.

Exemple 2.1. $\{0\}, \{1, 3\}$ et $\{2\}$ forment une partition de $\{0, 1, 2, 3\}$.

Définition 2.8. Soient E et F deux ensembles. Le produit cartésien de E et F noté $E \times F$ est l'ensemble des couples (x, y) tels que x est éléments de E et y est élément de F.

Exemple 2.2. $\{0, 1\} \times \{0, 1\} = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$
$\{0, 1\} \times \{2, 3\} = \{(0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3)\}$

Remarque : l'ordre dans un couple est important : $(0, 1) \neq (1, 0)$.

2.2 Applications

Dans toute cette section, E, F et G désigneront des ensembles.

2.2.1 Définitions :

Définition 2.9. On appelle **fonction** d'un ensemble E dans un ensemble F la donnée des ensembles E, F et d'une correspondance entre les éléments de E et ceux de F telle qu'à tout élément x de E corresponde au plus un élément y de F.

Définition 2.10. Désignons par f une fonction de E dans F.
- y, s'il existe, est appelé l'**image** de x par f, et est noté $f(x)$.
- x est appelé un **antécédent** de y par f.
- E est l'**ensemble de départ** de f.
- F est l'**ensemble d'arrivée** de f.
- On appelle **domaine de définition** de f l'ensemble des éléments de E qui ont une image par f. On note cet ensemble D_f, $Dom(f)$ ou $Dom\ f$.

Définition 2.11. Une fonction f de E dans F dont le domaine de définition est E, s'appelle une **application** de E dans F. C'est-à dire :
On appelle application f de l'ensemble E dans l'ensemble F la donnée des ensembles E, F et d'une partie G de $E \times F$, appelée **graphe** de f, telle que, pour tout x dans E, il existe un et un seul élément y dans F tel que $(x, y) \in G$.

On note : $f : \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$

Remarques :

1. La correspondance qui définit une fonction mathématique **n'est pas nécessairement un algorithme de calcul** : par exemple, la fonction "racine carrée" de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

2. Inversement, un algorithme de calcul est un moyen d'obtenir un résultat à partir de données, mais il ne définit pas une fonction mathématique : encore faut-il préciser les ensembles de départ et d'arrivée.
   On dit qu'une « fonction » d'un langage de programmation **implémente** la fonction mathématique $f : E \longrightarrow F$ si, pour toute valeur $x \in D_f$, elle retourne $f(x)$: par exemple, la fonction `doubler` définie en Python par

   ```
   def doubler(x):
       return x + x
   ```

   est une implémentation de la fonction $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ définie par $f(x) = 2x$. Mais `doubler(x)` peut retourner un résultat même si `x` n'est pas dans l'ensemble de départ de f : par exemple, `doubler(1.4)` retourne `1.8`.

3. On appelle identité de E, et on note Id_E, la fonction définie par :

$$Id_E : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{array}$$

4. Une fonction dont l'ensemble de départ E est un produit cartésien de n ensembles

$$E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$$

est appelée une **fonction de n variables** (les implémentations sont alors des « fonctions » à n paramètres)

Définition 2.12. Soient une fonction f d'un ensemble E dans un ensemble F, et A une partie de E. On appelle **restriction** de f à A la fonction de A dans F, notée $f_{|A}$, qui à tout élément x de A fait correspondre, s'il existe, $f(x)$.

Remarque : Soit une fonction f d'un ensemble E dans un ensemble F. La restriction de f à D_f est une application de D_f dans F.

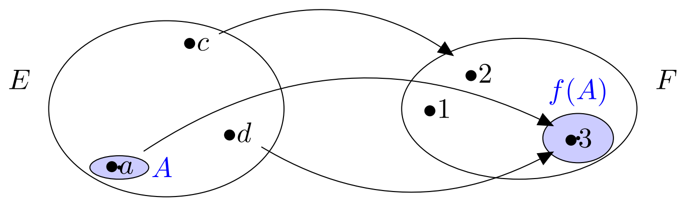
Par exemple : la restriction à $[0, +\infty[$ de la fonction "racine carrée" de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est une application de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

2.2.2 Image directe, image réciproque

Définition 2.13. Soit f une application de l'ensemble E dans l'ensemble F. Pour toute partie A de E, on appelle **image directe** de A et on note $f(A)$ le sous-ensemble de F formé des images des éléments de A.
c'est-à-dire :

$$f(A) := \{f(a)\,;\, a \in A\}$$

Exemple :



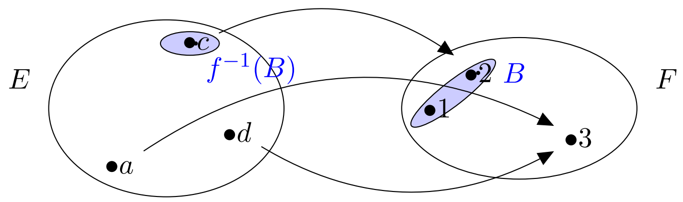
Remarques :
- $f(A) = \{y \in F\,;\, \exists a \in A \text{ tel que } y = f(a)\}$.
- $y \in f(A) \iff (\, y \in F \text{ et } \exists a \in A \text{ tel que } y = f(a)\,)$

Cas particulier : $A = E$
$f(E)$ est l'ensemble des éléments de F qui ont un antécédent par f. On l'appelle **image** de f, ou **ensemble des valeurs** de f. $f(E)$ se note aussi $Im(f)$ ou $Im\ f$.

Définition 2.14. Soit f une application de l'ensemble E dans l'ensemble F. Pour toute partie B de F, on appelle **image réciproque** de B et on note $f^{-1}(B)$ le sous-ensemble de E défini par

$$f^{-1}(B) := \{x \in E\,;\, f(x) \in B\}\,.$$

Exemple :



2.2.3 Composition des applications

Définition 2.15. Soient deux applications $f: E \to F$, et $g: F \to G$. On appelle **application composée** de g avec f, et on note $g \circ f$, l'application de E dans G définie par :

$$\begin{array}{rccc} g \circ f: & E & \to & G \\ & x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Propriétés de la composition :

- En général $g \circ f \neq f \circ g$
- $\forall x \in E,\ h((g \circ f)(x)) = (h \circ g)(f(x))$
  Cette égalité permet de définir $h \circ g \circ f$:
  $\forall x \in E,\ (h \circ g \circ f)(x) = h((g \circ f)(x))$

Remarque : Dans la pratique on considère souvent deux applications $f : D_f \to Imf$ et $g : D_g \to G$. En général on ne peut pas composer g avec f. Il faut parfois restreindre f à une partie $A \subset D_f$ telle que $f(A) \subset D_g$. (voir les exercices)

2.2.4 Applications injectives, surjectives, bijectives

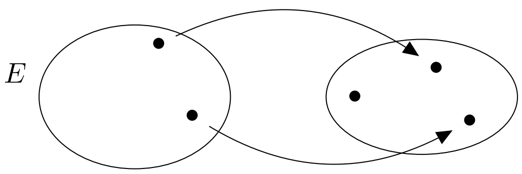
Définition 2.16. Une application $f: E \to F$ est **injective** (on dit que c'est une injection) si tout élément y de F a au plus un antécédent dans E.

Remarque : Une application $f: E \to F$ est injective si et seulement si l'une des propositions suivantes est vraie :

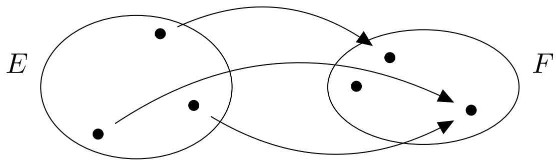
- Pour tout $y \in F$ l'équation $f(x) = y$ admet au plus une solution x dans F.
- $\forall x \in E\,,\ \forall x' \in E\,,\ (f(x) = f(x')) \Longrightarrow (x = x')$
- ou encore par contraposée : $\forall x \in E\,,\ \forall x' \in E\,,\ (x \neq x') \Longrightarrow (f(x) \neq f(x'))$

Exemples :

Une application injective :



Une application non injective :



1. L'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ n'est pas injective (des nombres opposés, 1 et -1 par exemple, ont même image par f).

2. L'application $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \sqrt{x}$ est injective (en effet, si $y = g(x)$, nécessairement $x = y^2$).

3. Quand $E \subset F$, l'application définie par : $\begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & x \end{array}$
   est appelée injection canonique de E dans F.

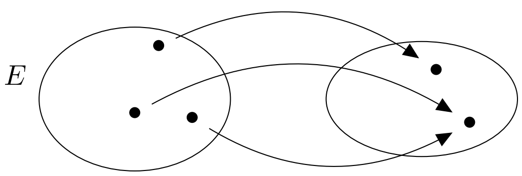
Remarque : La notion d'injection est la formalisation d'un concept qui apparaît constamment en informatique : la représentation symbolique des objets que l'on se propose d'étudier. Par exemple, un individu sera représenté par un numéro d'identité, un compte en banque par un numéro de compte, un fichier sur disque par un chemin d'accés : dans tous ces cas, la représentation est une injection d'un ensemble d'objets réels dans l'ensemble des chaines de caractères.

Définition 2.17. Une application $f : E \to F$ est **surjective** (on dit que c'est une surjection) si tout élément y de F a au moins un antécédent dans E.

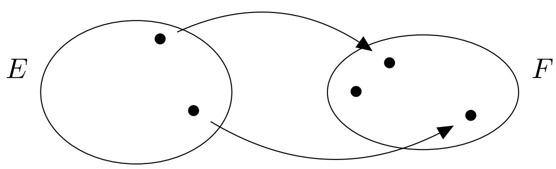
Remarque : Une application $f : E \to F$ est surjective si et seulement si l'une des propositions suivantes est vraie :
- $f(E) = F$
- Pour tout $y \in F$ l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution x dans E
- $\forall y \in F\,,\ \exists x \in E\,, y = f(x)$

Exemples :

Une application surjective :



Une application non surjective :



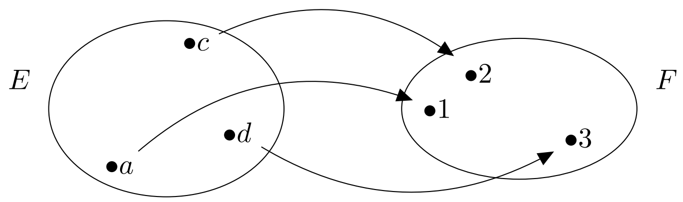
1. L'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + 1$ est surjective (tout réel y admet $y - 1$ comme antécédent).

2. L'application $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par $g(x) = x + 1$ n'est pas surjective (0 n'a pas d'antécédent par g).

Définition 2.18. Une application $f : E \to F$ est **bijective** (on dit que c'est une bijection) si elle est à la fois injective et surjective.

Remarque : Une application $f : E \to F$ est bijective si et seulement si l'une des propositions suivantes est vraie :
- Tout élément y de F a un et un seul antécédent dans E.
- Pour tout $y \in F$ l'équation $f(x) = y$ admet une solution unique x dans E.
- $\forall y \in F\,,\ \exists!\, x \in E\,, y = f(x)$

Exemples :

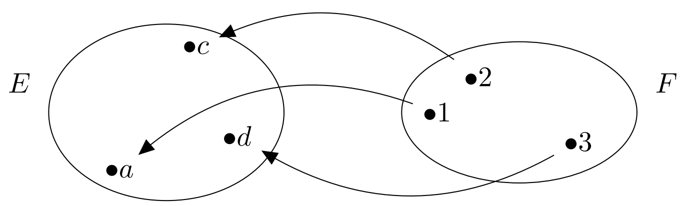


1. L'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x + 5$ est bijective (tout réel y admet $\frac{1}{2}(y - 5)$ comme unique antécédent).
2. La fonction qui à un point d'un plan associe ses coordonnées dans un repère est une bijection de l'ensemble des points du plan sur $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^3$ pour les points de l'espace).

Définition 2.19. Si l'application $f : E \to F$ est bijective on peut définir une application de F dans E qui à $y \in F$ associe son unique antécédent $x \in E$. On appelle cette application **l'application réciproque** de f et on la note f^{-1}.

Exemples :

l'application réciproque de la bijection précédente :



1. L'application réciproque de la bijection $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x + 5$ est l'application $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}(y - 5)$.

Proposition 5. Soit $f : E \to F$ bijective :

- $y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$
- $f \circ f^{-1} = Id_F$ et $f^{-1} \circ f = Id_E$
- f^{-1} est bijective et on a : $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

2.2.5 Composition des applications injectives, surjectives, bijectives

Proposition 6. Soient deux applications $f : E \to F$, et $g : F \to G$.

- Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
- Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
- Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective, et on a $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

2.3 Ensembles finis

Définition 2.20. Un ensemble E est fini s'il est vide ou bien s'il existe un entier positif n et une bijection de E sur l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$.

Proposition 7. Pour tous entiers positifs n et k, s'il existe une injection de $\{1, 2, ..., n\}$ dans $\{1, 2, ..., k\}$, alors on a $n \leq k$.

- Preuve possible par récurrence sur n.

Corollaire 8. Pour tous entiers positifs n et k, s'il existe une surjection de $\{1, 2, ..., n\}$ dans $\{1, 2, ..., k\}$, alors on a $k \leq n$.

Corollaire et définition 2.21. Si E est un ensemble fini non vide il existe un unique entier positif n pour lequel il existe une bijection de E sur $\{1, 2, ..., n\}$. Cet entier s'appelle le cardinal de E. Le cardinal de l'ensemble vide est 0. Le cardinal d'un ensemble fini E se note $\operatorname{Card} E$ ou $|E|$ et c'est le nombre d'éléments de l'ensemble.

Notions sur les cardinaux des ensembles infinis : Un ensemble qui n'est pas fini est dit infini. L'ensemble $\mathbb{N}$ est infini. On dit que deux ensembles ont le même cardinal s'il existe une bijection entre ces ensembles. On a $\operatorname{Card} 2\mathbb{N} = \operatorname{Card} \mathbb{N} = \operatorname{Card} \mathbb{Z}^2$, $\operatorname{Card} \mathbb{N} \neq \operatorname{Card} \mathbb{R}$.

Un ensemble E est dénombrable s'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ sur E. L'ensemble des rationnels est dénombrable, $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Proposition 9. Toute partie A d'un ensemble fini E est finie et $\operatorname{Card} A \leq \operatorname{Card} E$

Proposition 10. Soient E et F des ensembles finis non vides. Il existe une bijection de E sur F si et seulement si $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} F$.

Proposition 11. Soient E et F deux ensembles finis non vides de cardinaux respectifs n et p et $f : E \to F$ une application.
- Si f est injective alors $n \leq p$.
- Si f est surjective alors $n \geq p$.

Proposition 12. Soient E et F deux ensembles finis non vides de même nombre d'éléments, et $f : E \to F$ une application. Alors :

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective}$$

Remarque : Une preuve possible est de montrer au préalable par récurrence sur n que f est injective si et seulement si $\operatorname{Card} f(E) = \operatorname{Card} E$.

2.3.1 Dénombrement

Proposition 13. Soient E et F deux ensembles finis.

1. Si E et F sont disjoints : $\text{Card}(E \cup F) \; = \; \text{Card}E \; + \; \text{Card}F$
2. Si E et F sont quelconques : $\text{Card}(E \cup F) \; = \; \text{Card}E \; + \; \text{Card}F \; - \; \text{Card}(E \cap F)$
3. $\text{Card}(E \times F) \; = \; \text{Card}E \; \times \; \text{Card}F$

Proposition 14. Soient F et E deux ensembles finis non vides de cardinaux respectifs p et n.

1. Le nombre d'applications de F dans E est $(\text{Card}\, E)^{\text{Card}\, F} = n^p$.
2. Si $1 \leq p \leq n$, Le nombre d'injections de F dans E est
   $A_n^p = n(n-1)\dots(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.
3. Si $n = p$, Le nombre de bijections de F sur E est $n!$.

Remarque : Une application injective de $\{1, \dots p\}$ dans E s'appelle un arrangement de p éléments de E. C'est une p-liste d'éléments de E distincts deux à deux.

Proposition 15. Si E est un ensemble fini de cardinal n, le nombre de parties de E est égal à 2^n.

Proposition 16. Si E est un ensemble fini de cardinal n, le nombre de parties de E à p éléments ($0 \leq p \leq n$) est $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Remarque : Une partie de cardinal p d'un ensemble E est appelée combinaison de p éléments de E. Les nombres $\dbinom{n}{p}$ (ou C_n^p) sont appelés cœfficients binomiaux.

2.3.2 Cœfficients binomiaux

Proposition 17. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq p \leq n$:

1. $\dbinom{n}{0} = \dbinom{n}{n} = 1$, $\dbinom{n}{1} = n$.
2. $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n}{n-p}$
3. $\sum_{p=0}^{n} \dbinom{n}{p} = 2^n$
4. Si $0 < p < n$: $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n-1}{p-1} + \dbinom{n-1}{p}$

Triangle de Pascal : En convenant que $\dbinom{0}{0} = 1$, cette liste de propriétés s'écrit sous forme d'un tableau triangulaire descendant :

$n\backslash p$	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6	4	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

(on a indiqué sur la ligne n ($n = 0, 1, ...$) la liste dans l'ordre des nombres $\binom{n}{p}$ pour $p = 0, ..., n$).

Proposition 18. (Formule du binôme) Soient x et y deux réels (ou deux complexes) et n un entier naturel :

$$(x+y)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^p y^{n-p} \,.$$