UNIVERSITÉ DE BORDEAUX I 2008-2009
MASTER DE MATHÉMATIQUES *1ère année*
Option : Théorie algébrique des nombres.

DM 1
À remettre au plus tard le 18 février (le corrigé sera disponible le 19).

Exercice 1. On considère le corps $K = \mathbb{Q}(\theta)$, où $\theta = \sqrt[3]{2}$. On note $\mathcal{O}_K$ son anneau des entiers et d_K son discriminant.

1. Montrer que $[K : \mathbb{Q}] = 3$, et que $\theta \in \mathcal{O}_K$. Calculer $\mathrm{Disc}(1, \theta, \theta^2)$ (*utiliser la formule vue en TD pour le calcul du discriminant de* $X^3 + aX + b$) . Que peut-on dire de $[\mathcal{O}_K : \mathbb{Z}[\theta]]$?
2. Soit $\mathfrak{p} = \theta\mathcal{O}_K$.
   (a) En considérant la factorisation de l'idéal $\mathfrak{p}$ en produit d'idéaux maximaux.
   $$\mathfrak{p} = \prod_{i=1}^{t} \mathfrak{p}_i^{\alpha_i}\ ,\ \alpha_i \in \mathbb{N}$$
   et en la rapprochant de celle de l'idéal $2\mathcal{O}_K$, montrer que $t = 1$, et que $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1$ est premier de degré résiduel 1.
   (b) Montrer que $\theta\mathbb{Z}[\theta]$ est un idéal premier de $\mathbb{Z}[\theta]$, que $\theta\mathbb{Z}[\theta] = \mathfrak{p} \cap \mathbb{Z}[\theta]$ et que les corps $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$ et $\mathbb{Z}[\theta]/\theta\mathbb{Z}[\theta]$ sont isomorphes.
   (c) En déduire que $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\theta] + \mathfrak{p}$, puis que $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\theta] + 2\mathcal{O}_K$.
3. En considérant l'idéal $\mathfrak{q} = (\theta + 1)\mathcal{O}_K$ et en procédant comme à la question précédente, montrer que $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\theta] + 3\mathcal{O}_K$ (*on remarquera que* $3 = (\theta - 1)(\theta + 1)^3$ *et que* $\theta - 1$ *est inversible dans* $\mathcal{O}_K$).
4. Démontrer le lemme suivant :
   Soit G un groupe fini, et p un nombre premier. On suppose que $G = G^p$, autrement dit,
   $$\forall x \in G, \exists y \in G, x = y^p.$$
   Alors p ne divise pas $|G|$.
5. En utilisant les questions 2, 3 et 4, montrer que $[\mathcal{O}_K : \mathbb{Z}[\theta]]$ n'est divisible ni par 2, ni par 3, et utiliser alors la question 1 pour conclure que $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\theta]$.

Exercice 2. *Un théorème de Stickelberger.*
Soit K un corps de nombres, d'anneaux des entiers $\mathcal{O}_K$, et de discriminant $d_K = \mathrm{Disc}(\mathcal{O}_K)$. On se propose de montrer que $d_K \equiv 0$ ou $1 \mod 4$.

1. On note S_n le groupe des permutations de n lettres, et A_n le sous-groupe des permutations paires (de signature $+1$). En utilisant la formule, vue en TD,
   $$d_K = (\det((\sigma_i(e_j))_{1 \leq i,j \leq n}))^2$$
   où $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{O}_K$ et les σ_i sont les plongements de L dans $\mathbb{C}$, montrer que
   $$d_K = (P - N)^2$$
   où $P = \sum_{\phi \in A_n} \prod_{i=1}^{n} \sigma_i(e_{\phi(i)})$ et $N = \sum_{\phi \in S_n - A_n} \prod_{i=1}^{n} \sigma_i(e_{\phi(i)})$.
2. Montrer que $P + N$ et PN sont entiers sur $\mathbb{Z}$
3. Montrer que $P + N$ et PN sont stables par $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$, puis qu'ils sont dans $\mathbb{Z}$.
4. Conclure.