M1 ENSM 2012-2013

Corrigé de l'examen d'algèbre du 19 décembre 2012

Exercice 1

1. Si $P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ avec $d \geq 1$ et $a_d \neq 0$, alors
$$\Delta P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k \left((X+1)^k - X^k\right) = \sum_{k=0}^{d} a_k \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k}{l} X^l = a_d d X^{d-1} + \text{ termes de degré inférieur}$$
d'où la conclusion.

2. C'est immédiat.

3. Si $P(X)$ est un polynôme constant (éventuellement nul), alors il est clair que que $\Delta P = 0$. Inversement, la question précédente montre que si $P(X)$ est de degré au moins 1, $\Delta P(X)$ est non nul. Donc $\operatorname{Ker} \Delta = \mathbb{Q}_0[X]$, l'espace des polynômes constants. En particulier, $\dim_{\mathbb{Q}} \operatorname{Ker} \Delta = 1$.

4. Pour tout entier naturel n, on a
$$\operatorname{Ker} \Delta_n = \operatorname{Ker} \Delta \cap \mathbb{Q}_n[X] = \mathbb{Q}_0[X] = \operatorname{Ker} \Delta.$$
Le théorème du rang permet de conclure que, pour $n \geq 1$
$$\dim \operatorname{Im} \Delta_n = \dim \mathbb{Q}_n[X] - \dim \operatorname{Ker} \Delta_n = (n+1) - 1 = n.$$
Comme par ailleurs $\operatorname{Im} \Delta_n \subset \mathbb{Q}_{n-1}[X]$ pour $n \geq 1$ d'après la première question, et puisque $\dim \mathbb{Q}_{n-1}[X] = n$, on conclut que
$$\operatorname{Im} \Delta_n = \begin{cases} \mathbb{Q}_{n-1}[X] \text{ si } n \geq 1 \\ \{0\} \text{ si } n = 0. \end{cases}$$
Finalement, $\operatorname{Im} \Delta = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{Im} \Delta_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}_n[X] = \mathbb{Q}[X]$.

5. (a) Un calcul immédiat montre que
$$\Delta^k(N_l) = \begin{cases} N_{l-k} \text{ si } k \leq l \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$
   (b) Les polynômes $N_0, N_1, \ldots, N_n$ sont de degrés deux à deux distincts et forment donc une famille libre de $\mathbb{Q}_n[X]$. Comme leur nombre est égal à la dimension de $\mathbb{Q}_n[X]$, ils en constituent une base. Comme $\Delta N_k = N_{k-1}$ pour $k \geq 1$ et $\Delta N_0 = 0$, la matrice de Δ_n dans cette base s'écrit
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Il résulte des calculs précédents que

$$\Delta^k(N_l)(0) = \begin{cases} 1 \text{ si } k = l \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} \quad .$$

Autrement dit, lorsque k parcourt l'ensemble $\{0, \ldots, n\}$, les formes linéaires

$$\delta_k : \mathbb{Q}_n[X] \to \mathbb{Q} \ , \ P(X) \mapsto \Delta^k P(0)$$

constituent la base duale de $\mathcal{B}_n$. En particulier, on a, pour tout polynôme $P(X) \in \mathbb{Q}_n(X)$:

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \delta_k(P) N_k(X) = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k P(0) N_k(X).$$

Exercice 2

1. (a) Il est clair que :
$$A^2 = 0 \Leftrightarrow f_A^2 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im} f_A \subset \operatorname{Ker} f_A.$$

(b) En utilisant le théorème du rang et l'inclusion $\operatorname{Im} f_A \subset \operatorname{Ker} f_A$ que l'on vient d'établir, il vient
$$3 = \dim \operatorname{Im} f_A + \dim \operatorname{Ker} f_A \geq 2 \dim \operatorname{Im} f_A,$$
puisque $\dim \operatorname{Im} f_A \leq \dim \operatorname{Ker} f_A$. On en déduit que $\dim \operatorname{Im} f_A$ vaut 0 ou 1, mais la première possibilité est exclue puisque l'on a supposé que A, et donc f_A, était non nulle. Par suite, $\dim \operatorname{Im} f_A = 1$ et $\dim \operatorname{Ker} f_A = 3 - \dim \operatorname{Im} f_A = 2$.

(c) Soit $x \notin \operatorname{Ker} f_A$. Alors $f(x)$ appartient à $\operatorname{Ker} f_A$ (puisque $f_A^2 = 0$), et il est non nul. On peut donc trouver un vecteur y de $\operatorname{Ker} f_A$ tel que $\{f_A(x), y\}$ soit une base de $\operatorname{Ker} f_A$ (puisque $\dim \operatorname{Ker} f_A = 2$). Comme x n'appartient pas à $\operatorname{Vect}\{f_A(x), y\} = \operatorname{Ker} f_A$, la famille $\{f_A(x), y, x\}$ est une famille libre, donc une base de K^3.

(d) Clairement, la matrice de f_A dans la base $\{f_A(x), y, x\}$ construite à la question précédente est égale à
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. (a) Le même argument que précédemment montre que $\operatorname{Im} f_A \subset \operatorname{Ker} f_A$ et que (théorème du rang) :
$$n = \dim \operatorname{Im} f_A + \dim \operatorname{Ker} f_A \geq 2 \dim \operatorname{Im} f_A,$$
d'où $\dim \operatorname{Im} f_A \leq \dfrac{n}{2}$ et $\dim \operatorname{Ker} f_A = n - \dim \operatorname{Im} f_A \geq \dfrac{n}{2}$.

(b) Soit $\{f_1, \ldots, f_r\}$ une base $\operatorname{Im} f_A$. Pour tout $i \in \{1, \ldots r\}$, on choisit un antécédent e_i de f_i par f_A(c'est-à-dire $f_A(e_i) = f_i$). Clairement, la famille $\{e_1, \ldots, e_r\}$ est libre (si elle était liée, alors, en appliquant f_A, la famille $\{f_1, \ldots, f_r\}$ le serait également). On peut compléter la famille $\{f_1, \ldots, f_r\} = \{f_A(e_1), \ldots, f_A(e_r)\}$ en une base $\mathcal{B}_1$ de $\operatorname{Ker} f_A$ (rappelons que $\{f_1, \ldots, f_r\} = \{f_A(e_1), \ldots, f_A(e_r)\} \subset \operatorname{Ker} f_A$). On vérifie facilement que la famille $\mathcal{B}_1 \cup \{e_1, \ldots, e_r\}$ est une base de K^n en remarquant, par exemple, que

(i) $\mathrm{Vect}\{e_1, \ldots, e_r\} \cap \mathrm{Ker}\, f_A = \{0\}$,
(ii) $\dim \mathrm{Vect}\{e_1, \ldots, e_r\} + \dim \mathrm{Ker}\, f_A = r + \dim \mathrm{Ker}\, f_A = n$ (théorème du rang)

(pour (i), si $x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_i$ appartient à $\mathrm{Vect}\{e_1, \ldots, e_r\} \cap \mathrm{Ker}\, f_A$ alors, en appliquant f_A, on obtient $0 = f_A(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i f_A(e_i) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i f_i$, d'où $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r$, puisque la famille $\{f_1, \ldots, f_r\}$ est libre, et donc $x = 0$).
Clairement, la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}_1 \cup \{e_1, \ldots, e_r\}$est égale à

$$\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. (a) Si $\alpha x + \beta f_A(x) = 0$, alors, en appliquant f_A, on obtient :

$$0 = \alpha f_A(x) + \beta f_A^2(x) = \alpha f_A(x) - \beta x.$$

Le déterminant du système

$$\begin{cases} \alpha x + \beta f_A(x) = 0 \\ -\beta x + \alpha f_A(x) = 0 \end{cases}$$

est égal $\alpha^2 + \beta^2$. Il est donc non nul, sauf si $\alpha = \beta = 0$. À l'inverse, si cette condition n'est pas remplie, la seule solution du système précédent est $x = f_A(x) = 0$, ce qui est absurde puisque l'on a supposé que x était non nul. On a donc bien montré que la famille $\{x, f_A(x)\}$ était libre.

(b) Si $n = 2$, et si x est u vecteur non nul, la famille $\{x, f_A(x)\}$ est donc une base de $\mathbb{R}^2$, dans laquelle l'application f_A a pour matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

puisque $f_A^2(x) = -x$.

(c) Soit $x \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ et y un vecteur de $\mathbb{R}^4 \setminus \mathrm{Vect}\{x, f_A(x)\}$. Supposons que

$$\alpha x + \beta f_A(x) + \gamma y + \delta f_A(y) = 0. \tag{1}$$

Alors, en appliquant f_A à cette équation, on obtient :

$$-\beta x + \alpha f_A(x) - \delta y + \gamma f_A(y) = 0 \tag{2}$$

et en considérant la combinaison $\gamma \times (1) - \delta \times (2)$, on obtient :

$$(\gamma^2 + \delta^2) y = \gamma(\alpha - \beta)x - \delta(\alpha + \beta) f_A(X) \in \mathrm{Vect}\{x, f_A(x)\},$$

ce qui n'est possible, vu l'hypothèse sur y, que si $\gamma^2 + \delta^2 = 0$, c'est-à-dire si $\gamma = \delta = 0$. Si tel est le cas, l'équation (1) fournit une relation de dépendance linéaire entre x et $f_A(x)$, sauf si $\alpha = \beta = 0$. Comme on a supposé x non nul, et que la question (3a) garantit qu'alors la famille $\{x, f_A(x)\}$ est libre, on conclut que, nécessairement $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$, ce qu signifie que $\{x, f_A(x), y, f_A(y)\}$ est une famille libre, donc une base, de $\mathbb{R}^4$. Clairement, la matrice de f_A dans cette base est égale à

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) En itérant le procédé précédent, on suppose construite une famille $\{x_1, \cdots, x_l\}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ telle que la famille $\{x_1, f_A(x_1), \cdots, x_\ell, f_A(x_\ell)\}$, de cardinal 2ℓ, soit libre, et que ℓ soit maximal pour cette propriété. Si $2\ell < n$, on peut trouver $y \notin \mathrm{Vect}\{x_1, f_A(x_1), \cdots, x_\ell, f_A(x_\ell)\}$. À cause de la maximalité de l, on peut affirmer que la famille $\{x_1, f_A(x_1), \cdots, x_\ell, f_A(x_\ell), y, f_A(y)\}$ est liée. Il existe donc λ et μ non tous les deux nuls tels que

$$\lambda y + \mu f_A(y) \in \mathrm{Vect}\{x_1, f_A(x_1), \cdots, x_\ell, f_A(x_\ell)\}. \tag{3}$$

En appliquant f_A on en déduit que

$$-\mu y + \lambda f_A(y) \in \mathrm{Vect}\{x_1, f_A(x_1), \cdots, x_\ell, f_A(x_\ell)\} \tag{4}$$

et en considérant la combinaison $\lambda \times (3) - \mu \times (4)$, on conclut que

$$(\lambda^2 + \mu^2)y \in \mathrm{Vect}\{x_1, f_A(x_1), \cdots, x_\ell, f_A(x_\ell)\}. \tag{5}$$

Or λ et μ ne sont pas tous les deux nuls, donc on peut diviser (5) par le réel (non nul) $\lambda^2 + \mu^2$, et conclure que y appartient à $\mathrm{Vect}\{x_1, f_A(x_1), \cdots, x_\ell, f_A(x_\ell)\}$, une contradiction. Par conséquent, $n = 2\ell$ et la famille $\mathrm{Vect}\{x_1, f_A(x_1), \cdots, x_\ell, f_A(x_\ell)\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle f_A a pour matrice

$$\begin{pmatrix} S & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & S & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & S \end{pmatrix}$$

où $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

1. Le théorème du rang, appliqué à l'endomorphisme u^k, entraîne que $n_k + i_k = n$.

2. Si $x \in \ker u^k$ alors $u^k(x) = 0$, donc $u^{k+1}(x) = u(u^k(x)) = 0$, d'où l'inclusion $N_k \subset N_{k+1}$. De même, si $y = u^{k+1}(x)$ est un élément de $\mathrm{Im}\, u^{k+1}$, alors $y = u^k(u(x)) \in \mathrm{Im}\, u^k$, d'où l'inclusion $I_{k+1} \subset I_k$.

3. (a) Comme I_{k+1} est un sous-espace de I_k, il admet un supplémentaire (pas unique !) dans I_k. Si D_k est l'un d'entre-eux, on a évidemment

$$\dim D_k = \dim I_k - \dim I_{k+1} = i_k - i_{k+1} = \delta_k.$$

(b) En appliquant u à l'égalité $I_k = I_{k+1} \oplus D_k$, on obtient :

$$I_{k+1} = u(I_k) = u(I_{k+1} \oplus D_k) = u(I_{k+1} + D_k) = u(I_{k+1}) + u(D_k) = I_{k+2} + u(D_k). \tag{6}$$

(c) En appliquant à (6) la formule pour la dimension de la somme de deux sous-espaces, il vient

$$\dim I_{k+1} \leq \dim I_{k+2} + \dim u(D_k).$$

Par ailleurs, le théorème du rang montre que $\dim u(D_k) \leq \dim D_k$, d'où l'on conclut que

$$\delta_{k+1} = i_{k+1} - i_{k+2} \leq \dim D_k = \delta_k,$$

ce qu'il fallait démontrer.

4. La suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ étant croissante (pour l'inclusion), il en va de même pour la suite des dimensions $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Si celle-ci était *strictement* croissante, on aurait :

$$\forall k \in \mathbb{N}, n_k \geq k \tag{7}$$

(cela résulte d'une récurrence immédiate, que l'on initialise en remarquant que $n_0 = \dim \operatorname{Ker} \operatorname{Id} = 0$). Par conséquent, $\mathcal{E}$ est non vide et admet donc un plus petit élément k_0. En outre (7) montre que $k_0 \leq n$ (sinon, on aurait $\dim N_{n+1} = n_{n+1} \geq n+1 > n = \dim E$).

5. L'égalité $N_{k_0+1} = N_{k_0}$ est une conséquence immédiate de l'inclusion $N_{k_0} \subset N_{k_0+1}$ et de l'égalité des dimensions $n_{k_0} = n_{k_0+1}$ que l'on vient d'établir. L'égalité $I_{k_0+1} = I_{k_0}$ en découle grâce à nouveau à l'inclusion $I_{k_0+1} \subset I_{k_0}$ et à l'égalité de dimension $i_{k_0+1} = n - n_{k_0} = n - n_{k_0+1} = i_{k_0+1}$.

6. Pour établir, pour tout $k \in \mathbb{N}$, les égalités

$$N_{k_0+k} = N_{k_0} \text{ et } I_{k_0+k} = I_{k_0},$$

on procède par récurrence sur k. L'initialisation ($k = 0$) est évidente, et pour l'hérédité on constate que, si l'on suppose que $N_{k_0+k} = N_{k_0}$ et $I_{k_0+k} = I_{k_0}$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x \in N_{k_0+k+1} &\Leftrightarrow u^{k_0+k+1}(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow u^{k_0+1}(u^k(x)) = 0 \\ &\Leftrightarrow u^k(x) \in N_{k_0+1} \\ &\Leftrightarrow u^k(x) \in N_{k_0} \text{ puisque } N_{k_0+1} = N_{k_0} \\ &\Leftrightarrow x \in N_{k_0+k} \\ &\Leftrightarrow x \in N_{k_0} \text{ d'après l'hypothèse de récurrence,} \end{aligned}$$

ce qui montre que $N_{k_0+k+1} = N_{k_0}$, d'où l'on déduit également que $I_{k_0+k+1} = I_{k_0}$ à cause de l'inclusion $I_{k_0+k+1} \subset I_{k_0}$ et de l'égalité de dimensions $i_{k_0+k+1} = n - n_{k_0+k+1} = n - n_{k_0} = i_{k_0}$.

7. On sait déjà que $\dim E = n = n_{k_0} + i_{k_0} = \dim N_{k_0} + \dim I_{k_0}$, donc pour montrer que $E = N_{k_0} \oplus I_{k_0}$, il suffit d'établir que $N_{k_0} \cap I_{k_0} = \{0\}$. Soit donc $y \in N_{k_0} \cap I_{k_0}$; il existe alors $x \in E$ tel que $y = u^{k_0}(x)$ et la condition $y \in N_{k_0}$ entraîne que $u^{2k_0}(x) = u^{k_0}(y) = 0$, donc que $x \in N_{2k_0}$. Or $N_{2k_0} = N_{k_0}$ grâce à la question précédente, donc $y = u^{k_0}(x) = 0$, ce qu'il fallait démontrer.