

UNIVERSITÉ DE PROVENCE

Année 2006

N° attribué par la bibliothèque:

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PROVENCE

Discipline: *Mathématiques Appliquées*

École doctorale Mathématiques et Informatique de Marseille - E.D. n° 184

présentée et soutenue publiquement par

Stéphane BRULL

le 28 septembre 2006

Titre :

Etude cinétique d'un gaz à plusieurs composantes.

Directrice de thèse :

Mme Anne NOURI

JURY:

M. Pierre CHARRIER, *Université de Bordeaux I*, Rapporteur

M. Yves ELSKENS, *Université de Provence*, Président

M. Mohammed LEMOU, *CNRS*, Rapporteur

Mme Anne NOURI, *Université de Provence*, Directrice de thèse

M. Lorenzo PARESCHI, *Université de Ferrare*, Examineur

REMERCIEMENTS

Mes premiers remerciements vont à Anne Nouri pour sa contribution dans l'élaboration de ce travail, pour tout le temps qu'elle m'a consacré et l'enthousiasme qu'elle m'a communiqué. Son perfectionnisme et sa rigueur m'ont été précieux lors de la rédactions de ce manuscrit.

Je remercie sincèrement Monsieur Pierre Charrier et Monsieur Mohammed Lemou pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de rapporter ce travail et pour toutes les remarques pertinentes qu'ils m'ont adressées.

Mes remerciements vont également à Yves Elskens qui a accepté de présider mon jury. Je tiens à le remercier à nouveau pour ses remarques et ses conseils avisés.

Un grand merci à Lorenzo Pareschi pour s'être déplacé à Marseille depuis Ferrare.

Je ne peux pas m'empêcher de faire une mention spéciale pour Leif Arkeryd qui m'a invité trois mois à Goteborg en Suède. Qu'il trouve ici toute ma reconnaissance et mon amitié. Merci encore pour son soutien.

Je tiens également à remercier Lorenzo Pareschi et Elisa Ferrari pour la collaboration que nous avons effectué et pour leur accueil chaleureux à Ferrare.

Un grand merci à Kazuo Aoki pour toutes les discussions fructueuses que nous avons eues.

De nombreuses personnes au CMI m'ont aidé durant ces années de thèse, en particulier Frank Boyer, Olivier Gues, Bernard Coupet, Florence Hubert qui m'a initié aux EDP. Qu'ils trouvent ici toute ma gratitude. Je remercie chaleureusement Florence Hubert, Claudia Negulescu et Clément Rau qui m'ont aidé à la préparation de cette soutenance. Je souhaiterais également exprimer toute ma reconnaissance et mon amitié à Gérard Fardoux pour son soutien sans faille qu'il m'a toujours témoigné depuis que je suis au CMI.

Un grand merci à mes camarades thésards. Merci à Philippe (pour ses compétences en informatiques), Bruno, Clément, Clément, Valérie, Frank, Florence sans oublier mes amis plus anciens François, Luc ainsi que mes

amis de la côte d'Azur Karine, Stéphanie, Xavier, Ronan, Eric et Johan.

Enfin, c'est à Sophie sans qui ce travail de thèse n'aurait jamais vu le jour que le plus grand mérite revient, pour la patience qu'elle m'a témoignée au quotidien. Qu'elle reçoive ici toute ma reconnaissance pour son soutien, son amour et tous les sacrifices auxquels elle a consenti.

Je termine par notre petit Ludovic pour tout le bonheur qu'il nous apporte chaque jour.

Table des matières

1	Introduction générale.	9
1.1	Equation de Boltzmann.	9
1.1.1	Définitions.	9
1.1.2	Libre parcours moyen, nombre de Knudsen.	11
1.2	Le noyau de collision.	11
1.3	Conditions aux bords.	12
1.3.1	Conditions rentrantes.	12
1.3.2	Conditions aux bords de type réflexion spéculaire.	13
1.3.3	Conditions aux bords de type réflexion diffuse.	13
1.3.4	Conditions aux bords de type Maxwell: $\alpha \in [0,1]$	13
1.4	Etude d'un système d'équations cinétiques.	14
1.5	Effet fantôme pour un système cinétique.	15
1.6	Modèles hydrodynamiques inélastiques.	18
1.7	Simulations hybrides de type Monte-Carlo.	20
2	Etude d'un système d'équations cinétiques.	27
2.1	Introduction	27
2.2	Approximations avec des masses totales fixées.	31
2.3	Fin de la preuve du théorème principal.	50
2.4	Quelques extensions	59
3	Effet fantôme pour un système d'équations cinétiques.	65
3.1	Introduction.	65
3.2	Présentation du modèle.	65
3.3	Développement asymptotique.	69
3.3.1	Quantités macroscopiques	69
3.3.2	Développement de Hilbert.	69
3.3.3	Etude des termes d'ordre -1	70

3.3.4	Etude des termes d'ordre 0.	73
3.3.5	Equations fluides à l'ordre 0.	74
3.3.6	Décomposition de f_{H1}	74
3.3.7	Décomposition de f_{H1}^A et de f_{H1}^B	78
3.3.8	Equations fluides à l'ordre 1.	81
3.4	Satisfaction des conditions de bord.	84
3.4.1	Fermeture du système à l'ordre 0.	84
3.4.2	Couche de Knudsen à l'ordre 1.	90
3.5	Etude des termes d'ordre 2.	95
3.5.1	Décomposition de f_{H2}	95
3.5.2	Décomposition de f_{H2}^A et de f_{H2}^B	95
3.5.3	Equations fluides à l'ordre 2.	101
3.5.4	Résolution du système fluide d'ordre 2.	105
3.5.5	Couche de Knudsen à l'ordre 2.	106
3.6	Etude du terme reste.	110
3.6.1	Le terme reste.	110
3.6.2	Un problème linéarisé.	114
3.6.3	Décomposition du terme reste.	115
3.6.4	Forme exponentielle.	121
3.7	Contrôle du terme reste.	124
3.7.1	Estimations L^2 sur le terme reste.	124
3.7.2	Estimations L^∞ à poids sur le terme reste.	142
3.7.3	Convergence du procédé itératif.	154
4	Modèles hydrodynamiques inélastiques.	165
4.1	Introduction	165
4.2	L'équation de Boltzmann linéaire inélastique.	166
4.3	Limite hydrodynamique et équation d'Euler.	168
4.4	Conclusion	171
5	Simulations hybrides de type Monte-Carlo.	175
5.1	Introduction	175
5.2	Le problème du polluant.	177
5.3	Méthodes hybrides	179
5.3.1	Présentation.	179
5.3.2	Les Schémas TRMC. (Time Relaxed Monte Carlo.)	179
5.3.3	L'algorithme de tri dans un domaine bidimensionnel.	182
5.3.4	Implémentation du schéma TRMC.	183
5.4	Résultats numériques.	185

TABLE DES MATIÈRES

7

6 Perspectives.

197

Chapitre 1

Introduction générale.

Dans ce qui suit, on introduit le cadre puis les différents problèmes étudiés. Après avoir donné quelques rappels sur l'équation de Boltzmann dans un domaine borné et les différentes conditions de bord du domaine, on présente en 1.3.7, les quatre problèmes étudiés dans la thèse. Ils consistent en l'étude cinétique de gaz à plusieurs composantes. En premier lieu, on établit un résultat d'existence pour un système couplé de deux équations cinétiques pour un gaz à deux composantes, dans un cadre stationnaire, pour des potentiels durs. Dans le chapitre suivant, on se restreint à une situation de sphères dures autour d'une Maxwellienne absolue et on donne un résultat d'existence pour le même système à l'aide de développements asymptotiques et de restes contrôlés. On met en évidence un phénomène d'effet fantôme et un système hydrodynamique limite lorsque le nombre de Knudsen tend vers 0. Dans les deux derniers chapitres, on étudie l'évolution de la diffusion d'impuretés dans un gaz à l'aide d'une équation de Boltzmann linéaire inélastique. On dérive un système fluide et on effectue des simulations numériques par des méthodes de type Monte-Carlo.

1.1 Equation de Boltzmann.

1.1.1 Définitions.

Dans les années 1870, l'équation de Boltzmann a été introduite pour décrire un gaz raréfié formé de particules sphériques de diamètre r , identiques sans moment cinétique et donnant lieu à des collisions binaires élastiques. L'ensemble des particules d'une même espèce est représenté par une fonction de distribution $f(t,x,v)$, qui est positive et dépend de 3 variables, la vitesse

v , la position x et le temps t . D'un point de vue physique, $f(t,x,v)dx dv$ représente le nombre de particules dans un volume (dx, dv) centré en (x, v) . Cette équation ([12], [9], [13], [8], [26]) s'écrit de la manière suivante:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x,v) + v \cdot \nabla_x f(t,x,v) = \lambda Q(f,f)(t,x,v),$$

où λ est un paramètre qui mesure le nombre moyen de collisions par unité de temps subies par une particule test.

Le membre de gauche correspond au transport libre des particules et le membre de droite aux collisions. L'opérateur de collision $Q(f,f)$ est un opérateur intégral, quadratique en f qui agit sur la variable v , et est défini par

$$Q(f,f) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} B(v - v_*, \omega) [f(t,x,v')f(t,x,v'_*) - f(t,x,v)f(t,x,v_*)] d\omega dv_*, \quad (1.1.1)$$

où

$$v' = v - \langle v - v_*, \omega \rangle \omega, \quad v'_* = v + \langle v - v_*, \omega \rangle \omega,$$

et ω parcourt la sphère unité \mathbb{S}^2 de \mathbb{R}^3 . Il peut être formellement séparé en deux parties entre un terme de gain et un terme de perte de la manière suivante:

$$Q(f,f) = Q^+(f,f) - Q^-(f,f),$$

avec

$$Q^+(f,f) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} B(v - v_*, \omega) f(t,x,v')f(t,x,v'_*) d\omega dv_*$$

et

$$Q^-(f,f) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} B(v - v_*, \omega) f(t,x,v)f(t,x,v_*) d\omega dv_*.$$

Les vitesses v et v_* représentent les vitesses des particules avant collision tandis que v' et v'_* désignent les vitesses après collision. Le caractère élastique des collisions se traduit, au niveau microscopique, par la conservation de la quantité de mouvement, de l'énergie cinétique du système constitué des deux particules qui entrent en collision. De façon plus précise, on a:

$$v' + v'_* = v + v_*, \quad |v'|^2 + |v'_*|^2 = |v|^2 + |v_*|^2.$$

B s'appelle le noyau de collision. Il sera décrit dans le paragraphe suivant.

1.1.2 Libre parcours moyen, nombre de Knudsen.

Etant donné un gaz situé dans un domaine Ω , on appelle libre parcours moyen l , la distance moyenne que parcourt une particule sans subir de collision avec d'autres particules de gaz. Afin de mesurer le degré de raréfaction d'un gaz, on définit le nombre de Knudsen ([9]), Kn par la formule suivante:

$$Kn = \frac{l}{L},$$

où L désigne la taille de l'objet étudié. L'équation de Boltzmann s'écrit alors ([9], [11], [13])

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = \frac{1}{\varepsilon} Q(f, f),$$

où ε est un nombre proportionnel au nombre de Knudsen. Lorsque ε tend vers 0, le milieu devient plus dense et on passe d'une description statistique à une description de mécanique des milieux continus.

1.2 Le noyau de collision.

On considère souvent la classe des noyaux de collision $B(z, \omega)$ qui ne dépendent que de $|z|$ et du cosinus de θ , angle de déviation entre v et v' .

Il existe principalement deux modèles d'interactions différents: le modèle des sphères dures et celui des potentiels intermoléculaires.

Dans le modèle des sphères dures, B s'écrit ([9], [26])

$$B(z, \omega) = |\langle z, \omega \rangle|.$$

Physiquement, les particules entrent en collision comme des boules de billard. Dans la situation des forces intermoléculaires, deux particules se repoussent avec une force proportionnelle à $\frac{1}{r^s}$ où $s \geq 2$, r désignant la distance entre les particules. Le noyau de collision peut alors se factoriser ([26]) de la façon suivante:

$$B(z, \omega) = |z|^\gamma b(\cos(\theta)), \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{s-5}{s-1}.$$

On a alors la classification suivante

Nomenclature usuelle 1. *Le cas $\gamma = -3$ correspond à un potentiel Coulombien.*

Le cas $-3 < \gamma < 0$ correspond à un potentiel mou.

Le cas $\gamma = 0$ correspond à un gaz de Maxwell.

Le cas $0 < \gamma < 1$ correspond à un potentiel dur.

La fonction b présente une singularité pour $\theta = 0$, car en 0,

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)b(\cos(\theta)) \sim c\theta^{\frac{\gamma-3}{2}}.$$

La fonction b étant non-intégrable en 0, afin de donner un sens à la quantité (1.1.1), en général on tronque b , en supposant que $b(\cos(\theta))$ est nul lorsque θ dépasse une certaine valeur positive θ_0 telle que $\theta_0 < \frac{\pi}{2}$. C'est ce que l'on appelle la troncature de Grad.

Remarque 1. *Pour les tests numériques, le modèle VHS (Variable Hard Sphere) est couramment utilisé. Il correspond au cas où b est une fonction constante ([13]).*

1.3 Conditions aux bords.

Lorsqu'on se place dans un domaine Ω borné, on définit des conditions de bord de la manière suivante. Pour tout point $x \in \partial\Omega$, on définit $n_{ext}(x)$ comme étant le vecteur normal extérieur à $\partial\Omega$ au point x . On contrôle uniquement les quantités suivantes:

$$\{f(t,x,v), \quad t \geq 0, \quad x \in \partial\Omega, \langle v, n_{ext}(x) \rangle < 0\}.$$

Cela signifie physiquement, que l'on agit uniquement sur ce qui rentre dans le domaine.

1.3.1 Conditions rentrantes.

Ce sont les conditions les plus simples au niveau de la modélisation. On connaît dans ce cas, la distribution des particules entrant dans le domaine. C'est la situation qui se produit lorsqu'on injecte du gaz dans un domaine.

$$f(t,x,v) = f_b(t,x,v), \quad t \geq 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad \langle v, n_{ext}(x) \rangle < 0,$$

où f_b est une fonction donnée au bord.

1.3.2 Conditions aux bords de type réflexion spéculaire.

Si on considère que le bord de notre domaine est parfaitement élastique de sorte qu'il ne puisse pas exercer de pression sur sa surface excepté selon sa normale, on peut prendre comme conditions aux bords,

$$f(t,x,v) = f(t,x,v - 2n_{ext}(x)\langle n_{ext}(x),v \rangle), \quad t \geq 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad \langle v, n_{ext}(x) \rangle < 0,$$

Cependant ce modèle pour les conditions de bord peut être amélioré dans la mesure où un gaz peut exercer des pressions obliques contre la paroi du domaine.

1.3.3 Conditions aux bords de type réflexion diffuse.

Ce sont des conditions de bord qui modélisent un gaz qui heurte une paroi sans se condenser.

$$f(t,x,v) = \sqrt{\frac{2\pi m}{RT_0}} \left(\frac{m}{2\pi RT_0} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2\pi RT_0}\right) \int_{\langle v', n_{ext}(x) \rangle > 0} \langle v', n_{ext}(x) \rangle f(t,x,v') dv',$$

$$(x \in \partial\Omega, \langle n_{ext}(x), v \rangle < 0), \quad (1.3.2)$$

où T_0 est la température du bord $\partial\Omega$, R est la constante des gaz parfaits et m est la masse d'une molécule de gaz.

1.3.4 Conditions aux bords de type Maxwell: $\alpha \in [0,1]$.

Les deux conditions de bord de type réflexion diffuse et de type réflexion spéculaire peuvent alors se généraliser à une combinaison convexe de ces dernières de la manière suivante:

$$f(t,x,v) = \alpha \sqrt{\frac{2\pi m}{RT_0}} \left(\frac{m}{2\pi RT_0} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2\pi RT_0}\right) \int_{\langle v', n_{ext}(x) \rangle > 0} \langle v', n_{ext}(x) \rangle f(t,x,v') dv'$$

$$+ (1 - \alpha) f(t,x,v - 2n_{ext}(x)\langle n_{ext}(x),v \rangle),$$

$$t \geq 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad \langle n_{ext}(x), v \rangle < 0.$$

où α s'appelle le coefficient d'accommodation.

1.4 Chapitre 2: Etude d'un système d'équations cinétiques pour un gaz à deux composantes situé entre deux parois.

Dans le chapitre 2, on se place dans le cadre de l'équation de Boltzmann stationnaire pour un gaz à deux composantes mécaniquement identiques dans le cas d'un potentiel dur et pour la géométrie d'un barreau représenté par $[-1,1]$. Elle est donnée par le système suivant:

$$\begin{aligned}\xi \frac{\partial}{\partial x} f_A(x,v) &= Q(f_A, f_A + f_B)(x,v), \\ \xi \frac{\partial}{\partial x} f_B(x,v) &= Q(f_B, f_A + f_B)(x,v), \\ x &\in [-1,1], \quad v \in \mathbb{R}^3,\end{aligned}\tag{1.4.3}$$

où ξ désigne la composante de v dans la direction x . On démontre un théorème d'existence dans L^1 lorsque la composante A , possède un profil de type données au bord rentrantes:

$$f_A(-1,v) = kM_-(v), \quad \xi > 0, \quad f_A(1,v) = kM_+(v), \quad \xi < 0,\tag{1.4.4}$$

où k désigne une constante positive déterminée lors de la résolution du problème et la composante B des conditions de bord de type Maxwell diffuses:

$$\begin{aligned}f_B(-1,v) &= \sqrt{\frac{2\pi}{T_-}} \left(\int_{\xi' < 0} |\xi'| f_B(-1,v') dv' \right) M_-(v), \quad \xi > 0, \\ f_B(1,v) &= \sqrt{\frac{2\pi}{T_+}} \left(\int_{\xi' > 0} \xi' f_B(1,v') dv' \right) M_+(v), \quad \xi < 0.\end{aligned}\tag{1.4.5}$$

M_+ et M_- sont les fonctions maxwelliennes normalisées suivantes

$$M_-(v) = \left(\frac{1}{2\pi T_-} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{|v|^2}{2T_-}\right) \quad \text{et} \quad M_+(v) = \left(\frac{1}{2\pi T_+} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{|v|^2}{2T_+}\right).$$

On appelle β -norme d'une fonction f , la quantité

$$\int (1 + |v|)^\beta f(x,v) dx dv.$$

Le théorème d'existence démontré fixe dans un premier temps les β -normes de f_A et f_B . La constante k des données rentrantes de (1.4.4) est une inconnue du problème. Il s'agit de généraliser les résultats obtenus par L.Arkerdyd et A.Nouri dans le cas d'une seule composante de gaz ([3], [6]). Ce travail a été effectué d'un point de vue numérique par Aoki, Sone et Doi dans ([23]) lorsque l'opérateur de collision est l'opérateur BGK. Le principal résultat de ce chapitre est le théorème suivant:

Théorème 1.4.1. *Soit β tel que $0 \leq \beta < 2$. Alors, il existe un $k > 0$ et il existe une solution faible (f_A, f_B) au problème stationnaire (1.4.3, 1.4.4, 1.4.5) telle que f_A et f_B ont une β -norme égale à 1.*

La démonstration est basée sur un théorème de point fixe puis sur un passage à la limite dans la suite des approximations.

La compacité sur la suite des approximations est obtenue de deux manières différentes selon que les petites vitesses sont tronquées ou non. Dans le cas des troncatures des petites vitesses, on montre que la suite des approximations est fortement compacte en utilisant un lemme de moyenne ([12]). Lorsque les troncatures des petites vitesses ont été éliminées par passage à la limite, on obtient que la suite des approximations est faiblement compacte, en contrôlant le terme de production d'entropie.

Dans la dernière partie, les extensions du théorème 2.1.1 suivantes sont données:

Corollaire 1.4.2. *Soient $\beta \in [0, 2[$, $m_A > 0$ et $m_B > 0$. Alors, il existe un $k > 0$ et il existe une solution faible (f_A, f_B) au problème stationnaire (1.4.3, 1.4.4, 1.4.5) telle que f_A et f_B ont pour β -normes m_A et m_B .*

Le corollaire est alors généralisé à la situation de N_A composantes et N_B composantes:

Corollaire 1.4.3. *Soient $\beta \in [0, 2[$ et $m_{A_1}, \dots, m_{A_{N_A}}, m_{B_1}, \dots, m_{B_{N_B}}$ des quantités positives. Alors, il existe des solutions faibles $f_{A_1}, \dots, f_{B_{N_B}}$ au problème stationnaire (1.4.3) de β -normes respectives $m_{A_1}, \dots, m_{B_{N_B}}$.*

Ce travail a été soumis pour publication.

1.5 Chapitre 3: Effet fantôme pour un système cinétique pour un gaz à deux composantes.

Dans le chapitre 3, on considère dans un cadre stationnaire un mélange de vapeur et de gaz non condensable situé entre deux phases de gaz condensé

représentées par deux plans verticaux. On suppose que le modèle est homogène en espace dans les directions y et z . On est alors ramené pour la variable d'espace au segment $[-1,1]$. Les fonctions de distribution f^A et f^B des deux gaz sont solutions de l'équation de Boltzmann stationnaire ([9], [13]):

$$\begin{aligned}\xi \frac{\partial}{\partial x} f^A(x,v) &= \frac{1}{\varepsilon} Q(f^A, f^A)(x,v) + \frac{1}{\varepsilon} Q(f^B, f^A)(x,v), \\ \xi \frac{\partial}{\partial x} f^B(x,v) &= \frac{1}{\varepsilon} Q(f^A, f^B)(x,v) + \frac{1}{\varepsilon} Q(f^B, f^B)(x,v), \\ x &\in [-1,1], \quad v \in \mathbb{R}^3,\end{aligned}\tag{1.5.6}$$

avec

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{\pi}}{2} K_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2} l,$$

et

$$l = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n_I}.$$

l désigne le libre parcours moyen des molécules de vapeur à l'état d'équilibre à la température T_I et à la densité n_I et d correspond à leur diamètre.

La composante qui peut se condenser, notée A possède un profil de type données au bord rentrantes:

$$f^A(-1,v) = M_-(v), \quad \xi > 0,\tag{1.5.7}$$

$$f^A(1,v) = \frac{n_{II}}{n_I} M_+(v), \quad \xi < 0.\tag{1.5.8}$$

La composante qui ne peut pas se condenser, notée B satisfait des conditions de bord de type Maxwell diffuse,

$$f^B(-1,v) = \sqrt{\pi} M_-(v) \int_{\xi' < 0} |\xi'| f^B(-1,v') dv', \quad \xi > 0,\tag{1.5.9}$$

$$f^B(1,v) = \sqrt{\frac{\pi}{\frac{T_{II}}{T_I}}} M_+(v) \int_{\xi' > 0} |\xi'| f^B(1,v') dv', \quad \xi < 0,\tag{1.5.10}$$

où M_- et M_+ sont les fonctions maxwelliennes normalisées suivantes

$$M_-(v) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \exp(-v^2) \quad \text{et} \quad M_+(v) = \left(\frac{1}{\pi(\frac{T_{II}}{T_I})}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{v^2}{\frac{T_{II}}{T_I}}\right).$$

On se place dans un cadre où $\frac{T_{II}}{T_I}$ et $\frac{n_{II}}{n_I}$ sont proches de 1, ie dans un cadre de perturbation autour d'une Maxwellienne absolue M_- . Le système à résoudre est donc un cas particulier de celui étudié au chapitre 2, mais sa démonstration repose sur des arguments tout à fait différents, à savoir l'usage d'un développement asymptotique et d'un terme reste qui est contrôlé. De plus, on met en évidence le phénomène d'effet fantôme.

Dans un premier temps, on effectue un développement asymptotique des solutions. L'ordre 0 met en évidence deux situations différentes par les équations fluides qu'elles entraînent: $u_{H0} = 0$ et $u_{H0} \neq 0$, où u_{H0} est la vitesse macroscopique de la somme des composantes. Seul le premier cas est étudié dans ce chapitre, le second étant laissé en perspective. Pour le premier cas, on obtient le système fluide suivant

$$\frac{\partial}{\partial x} p_{H0} = 0, \quad (1.5.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (n_{H0} u_{1,H1}) = 0, \quad (1.5.12)$$

$$n_{H0} u_{1,H1} \frac{\partial}{\partial x} T_{H0} = \frac{\gamma_2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} (T_{H0}) T_{H0}^{\frac{1}{2}} \right), \quad (1.5.13)$$

$$u_{1,H1} = -\frac{5}{2} \gamma_c \frac{T_{H0}^{\frac{1}{2}}}{p_{H0}^B n_{H0}} \frac{\partial}{\partial x} p_{H0}^A, \quad (1.5.14)$$

$$u_{1,H1}^B = 0, \quad (1.5.15)$$

où n_H , p_H et T_H désignent la densité, la pression et la température de la somme des fonctions de distribution des deux composantes et n_{Hi} , p_{Hi} et T_{Hi} leurs termes respectifs d'ordre i . On remarque que la température T_{H0} dépend de u_{H1} . Ceci influence le comportement de (n_{H0}, T_{H0}) même si son terme d'ordre 0 vaut 0. C'est ce que l'on appelle l'effet fantôme. Ce phénomène a été mis en évidence pour le cas d'une composante de gaz dans ([24]) et pour le cas de deux composantes de gaz dans ([2], [4], [1], [16]). Dans un premier temps, le système (1.5.11, 1.5.12, 1.5.13, 1.5.14, 1.5.15) est fermé dans un état proche de l'état d'équilibre. Ensuite, afin de satisfaire les conditions de bord, on rajoute une couche de Knudsen à chacune des composantes pour chacune des parois. Il s'agit ensuite de contrôler le terme reste rigoureusement avec la norme,

$$|f|_{r,\beta_0} = \sup_{x \in [-1,1]} \sup_{v \in \mathbb{R}^3} |f(x,v)| \exp(\beta_0 v^2),$$

où β_0 est une constante déterminée au cours de la démonstration. Cette étude s'effectue en deux étapes. Dans un premier temps, on contrôle le terme reste pour un problème linéarisé. Ensuite, on contrôle les termes restes des problèmes non linéaires en montrant qu'ils sont limités d'une suite itérative. Le résultat principal de ce chapitre est le suivant:

Théorème 1.5.1. *Pour n_{II} assez proche de n_I , pour certains T_{II} suffisamment proches de T_I et ε assez petit, il existe une solution (f^A, f^B) du système (1.5.6, 1.5.7, 1.5.8, 1.5.9, 1.5.10) de la forme*

$$(f^A, f^B) = (f_{H0}^A + \varepsilon f_1^A + \varepsilon^2 f_2^A + \varepsilon^3 f_R^A, f_{H0}^B + \varepsilon f_1^B + \varepsilon^2 f_2^B + \varepsilon^3 f_R^B)$$

où

$$\|f_R^A\|_\infty + \|f_R^B\|_\infty \leq c\varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$

1.6 Chapitre 4: Modèles hydrodynamiques inélastiques pour la diffusion d'impuretés dans un gaz.

Ce travail a été effectué avec Lorenzo Pareschi de l'université de Ferrare. Il a été accepté pour publication dans la revue Math Applied Letters en 2005.

L'évolution d'un gaz granulaire constitué de particules de masse m entrant en collision de manière inélastique avec un fluide en équilibre thermodynamique constitué de particules de masse m_1 peut être décrite par une équation de Boltzmann linéaire dissipative. Par exemple, le cas de fines particules polluantes interagissant avec l'air ou un autre gaz est traité dans ([5]). Elle est donnée par

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x, v) + v \cdot \nabla_x f(t, x, v) = Q(f, M_1)(t, x, v), \quad (1.6.16)$$

où $Q(f, M_1)$ est défini par ([14], [21])

$$Q(f, M_1)(v) = \frac{1}{2\pi\lambda} \int_{\mathbb{R}_w^3 \times \mathbb{S}^2} B(v, w, \omega) \left[\frac{1}{e^2} f(v_*) M_1(w_*) - f(v) M_1(w) \right] dw d\omega. \quad (1.6.17)$$

(v_*, w_*) désignent les vitesses précolisionnelles. Elles sont données par les expressions

$$\begin{cases} v_* = v - 2\alpha \frac{1-\beta}{1-2\beta} [q \cdot n] n, \\ w_* = v + 2(1-\alpha) \frac{1-\beta}{1-2\beta} [q \cdot n] n, \end{cases} \quad (1.6.18)$$

où $q = v - w$ est la vitesse relative ([8] [14]), α et β étant des paramètres adimensionnés correspondant au rapport des masses et à l'inélasticité. Ils vérifient $0 < \alpha < 1$ et $0 < \beta < \frac{1}{2}$ et sont donnés par les formules

$$\alpha = \frac{m_1}{m_1 + m}, \quad \beta = \frac{1-e}{2}, \quad (1.6.19)$$

où $e \in]0, 1[$ est le coefficient de restitution, le cas $e = 1$ correspondant aux collisions élastiques. $B(v, w, \omega)$ est le noyau de collision, λ le libre parcours moyen.

Le fluide est supposé être à l'équilibre thermodynamique avec une vitesse u_1 et une température T_1 . Cela signifie que sa fonction de distribution M_1 est la Maxwellienne normalisée donnée par

$$M_1(v) = \frac{1}{(2\pi R_1 T_1)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{(v-u_1)^2}{2R_1 T_1}\right), \quad (1.6.20)$$

avec $R_1 = \frac{k_B}{m_1}$ et k_B , la constante de Boltzmann ([9]).

Dans ces conditions, on montre (cf [14]) que les états d'équilibre stationnaires sont donnés par les distributions Maxwelliennes proportionnelles à

$$M^\sharp(v) = \left(\frac{m}{2\pi R T^\sharp}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{m(v-u_1)^2}{2R T^\sharp}\right\}, \quad (1.6.21)$$

où

$$R = \frac{k_B}{m}, \quad T^\sharp = \frac{(1-\alpha)(1-\beta)R_1}{1-\alpha(1-\beta)} T_1.$$

Dans toute la suite, on se place dans un cadre de molécules Maxwelliennes, i.e d'un noyau de collision de la forme

$$B(v, w, \omega) = S, \quad (v, w, \omega) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2. \quad (1.6.22)$$

Ce modèle pour molécules Maxwelliennes est alors donné par

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = \frac{S}{2\pi\lambda} \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} \left[\frac{1}{e^2} f(v_*) M_1(w_*) - f(v) M_1(w) \right] dw d\omega. \quad (1.6.23)$$

Lorsqu'on s'intéresse aux modèles fluides obtenus en prenant les moments de l'équation de Boltzmann dissipative, on voit que la densité ρ définie par

$$\rho(x) = \int_{\mathbb{R}^3} f(x,v)dv \quad (1.6.24)$$

est la seule quantité pour laquelle une seule équation non triviale peut être dérivée. Elle est donnée par l'équation d'advection ([21]),

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u_1) = 0.$$

Le but de ce chapitre est alors de dériver un modèle hydrodynamique mettant en jeu des équations dissipatives pour la quantité de mouvement et la température du gaz. Pour cela, on suppose que la fonction de distribution f est une Maxwellienne locale ayant la vitesse et la température du gaz polluant, c'est à dire de la forme,

$$M(x,v,t) = \frac{\rho(x,t)}{(2\pi RT(x,t))^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{(v-u(x,v))^2}{2RT(x,t)}\right). \quad (1.6.25)$$

On aboutit alors formellement au système d'Euler inélastique suivant,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_x \cdot (\rho u) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho u + \nabla_x \cdot (\rho u \otimes u) + \nabla_x (\rho T) = \frac{4S\alpha(1-\beta)}{3\lambda} \rho (u_1 - u), \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \left(\frac{1}{2} |u|^2 + \frac{3}{2} T \right) \right) + \nabla_x \cdot \left(\rho \left(\frac{1}{2} |u|^2 + \frac{5}{2} T \right) \right) = \frac{4\rho S}{3\lambda} D(x,t) \end{array} \right. ,$$

où

$$\begin{aligned} D(x,t) &= \alpha^2(1-\beta)^2(3RT + 3R_1T_1 + |u|^2 + |u_1|^2 - 2u_1 \cdot u) \\ &- \alpha(1-\beta)(3RT + |u|^2 - u \cdot u_1). \end{aligned}$$

1.7 Chapitre 5: Simulations hybrides de Monte-Carlo pour la diffusion d'impuretés dans l'air.

Travail effectué en collaboration avec Lorenzo Pareschi et Elisa Ferrari de l'université de Ferrare.

On se place dans le même cadre physique que le paragraphe précédent. On considère un domaine de la forme $D = [0, L_x] \times [0, L_y]$. Le but de cette partie est de simuler dans le domaine D la diffusion de particules d'un polluant évoluant dans un fluide situé à l'équilibre thermodynamique. Leur évolution peut être décrite par un système couplé de $N + 1$ équations de Boltzmann inélastiques pour des sphères dures:

$$\begin{cases} \frac{\partial f_i}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f_i = \sum_{j=1}^N \frac{1}{\varepsilon_{ij}} Q_{i,j}(f_i, f_j) + \frac{1}{\varepsilon_{ib}} Q_{i,b}(f_i, f_b), \\ \frac{\partial f_b}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f_b = \frac{1}{\varepsilon_b} Q_{b,b}(f_b, f_b) + \sum_{j=1}^N \frac{1}{\varepsilon_{jb}} Q_{j,b}(f_j, f_b), \end{cases} \quad (1.7.26)$$

où $i = 1, \dots, N$ et $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$, $\varepsilon_{ib} = \varepsilon_{bi}$, $\varepsilon_b = \varepsilon_{bb}$ sont les nombres de Knudsen correspondant aux interactions.

Les collisions sont supposées inélastiques avec les coefficients de restitution respectifs e_{ij}, e_{ib}, e_b dans $[0, 1]$. On se place dans une situation de sphères dures. On suppose que le fluide est homogène en espace et que sa distribution est Maxwellienne. Quant au polluant, il n'est pas supposé homogène en espace. On se place dans une situation de sphères dures. On admet également que les impuretés sont en nombre suffisamment faible par rapport aux molécules du fluide, pour pouvoir négliger les collisions entre les particules de polluant. Cette hypothèse permet de découpler le système (1.7.26) et de se ramener à étudier N systèmes de la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = \frac{\delta^2}{2\pi\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} |\langle q, \omega \rangle| \left[\frac{1}{e^2} f(v_*) f_b(w_*) - f(v) f_b(w) \right] dw d\omega, \\ f_b = M_b. \end{cases} \quad (1.7.27)$$

(v_*, w_*) sont les vitesses précollisionnelles définies en (1.6.18), $q = v - w$ est la vitesse relative, M_b est la distribution Maxwellienne du fluide et δ est la distance entre les centres des molécules d'une particule polluant et d'une particule d'air entrant en collision.

Plusieurs simulations sont réalisées. Dans chaque situation, on effectue la simulation par un schéma *DSMC* et un schéma *TRMC*.

Bibliographie

- [1] Aoki K. *The behaviour of a vapor-gas mixture in the continuum limit: Asymptotic analysis based on the Boltzmann equation*, T.J.' Bartel, M.A.Gallis(Eds), *Rarified Gas Dynamic*, AIP, Melville, , 565-574, 2001.
- [2] Aoki K., Takata S., Kosuge S. *Vapor flows caused by evaporation and condensation on two parallel plane surfaces: Effect of the presence of a noncondensable gas*', *Physics of Fluids*, 10, 6, 1519-1532 1998.
- [3] Aoki K., Takata S., Taguchi S. *Vapor flows with evaporation and condensation in the continuum limit: effect of a trace of non condensable gas*, *European Journal of Mechanics B/Fluids*, 22, 51-71, 2003.
- [4] Arkeryd L., Heintz A. *On the solvability and asymptotics of the Boltzmann equation in irregular domains*, *Comm.Part.Diff.Eqs.*, 22, 2129-2152, 1997.
- [5] Arkeryd L., Maslova N. *On diffuse reflection at the boundary for the Boltzmann equation and related equations*, *Journ.Stat.Phys.*, 77, 1051-1077, 1994.
- [6] Arkeryd L., Nouri A. *The stationary Boltzmann Equation in the Slab with Given Weighted Mass for Hard and Soft Forces*, *Ann.Scuola.Norm.Sup.Pisa*, 27, 533-536, 1998.
- [7] Arkeryd L., Nouri A. *L^1 solutions to the stationary Boltzmann equation in a slab*', *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse*, 9, 375-413, 2000.
- [8] Bouchut F., Golse F., Pulverenti M. *Kinetic Equation and Asymptotic Theory*, Gauthier-Villard
- [9] Bruhat G. *Cours de physique générale. Thermodynamique*, Masson et *C^{ie}*, 1968.
- [10] Cercignani C. *The Boltzmann equation and its applications*', Springer, Berlin , 1988.

- [11] Cercignani C. *Mathematical Method in kinetic Theory*. Plenum Press, New-York, 1990.
- [12] Cercignani C., Illner R., Pulvirenti M. *The mathematical theory of dilute gases*, Springer, Berlin, 1994.
- [13] Ferziger J.H., Kaper H.G. *Mathematical theory of transport processes in gases.*, North-Holland, 1972.
- [14] Lods B., Toscani G. *The dissipative linear Boltzmann equation for hard spheres*, Journ.Statist.Phys., 117, 3-4, 635-664, 2004.
- [15] Pareschi L. *Hybrid multiscale methods for kinetic and hyperbolic problems*, ESAIM: PROCEEDINGS, Vol.15, T. Goudon, E. Sonnendrucker, D. Talay, Editors, 87-120, 2005.
- [16] Pareschi L., Toscani G. *Modelling and numerical methods for granular gases*, Modelling and computational Methods for Kinetic Equation, P.Degond L.Pareschi and Russo Eds, Birkhauser, Boston, 259-285, 2004.
- [17] Pareschi L., Trazzi S. *Numerical solution of the Boltzmann equation by Time Relaxed Monte Carlo (TRMC) methods*, International Journal of Numerical Methods in Fluids, 48, 947-983, 2005.
- [18] Sone Y. *Kinetic theory and Fluid dynamics*, Birkhäuser Boston 2002.
- [19] Sone Y., Aoki K., Doi T. *Kinetic theory analysis of gas flows condensing on a plane condensed phase: Case of a mixture of a vapor and noncondensable gas.*, Transport Theory and Statistical Physics, 21(4-6),297-328, 1992.
- [20] Sone Y., Aoki K., Takata S., Sugimoto H., Bobylev A. *Inappropriateness of the heat-conduction equation for description of a temperature field of a stationary gas in the continuum limit: examination by asymptotic and numerical computation of the Boltzmann equation.*, Physics of Fluids, 8, 2, 628-638, 1996.
Erratum Phys Fluids, 8, 841, 1996.
- [21] Spiga G., Toscani G. *The dissipative linear Boltzmann equation*, Appl.Math.Letters 17, 3, 255-301, 2004.
- [22] Taguchi S., Aoki K., Takata S. *Vapor flows condensing at incidence onto a plane condensed phase in the presence of a noncondensable gas.I. Subsonic condensation*, Physics of Fluids 15, 3, 689-705, 2003.
- [23] Taguchi S., Aoki K., Takata S. *Vapor flows at incidence onto a plane condensed phase in the presence of a non condensable gas. II. Supersonic condensation*, Physics of Fluids 16, 79, 2004.

- [24] Takata S., Aoki K. *Two-surface-problems of a multicomponent mixture of vapors and noncondensable gases in the continuum limit in the light of kinetic theory*, Physics of Fluids, 11, 9, 2743-2756, 1999.
- [25] Takata S., Aoki K., Muraki T. *Behaviour of a vapor-gas mixture between two parallel plane condensed phases in the continuum limit*. Rarefied Gas Dynamic, edited by R. brun, R. Campargue, and J. C. Lengrand, Cépaduès, Toulouse, 479, 1999.
- [26] Villani C. *A review of mathematical topics in collisional kinetic theory*. Handbook of Mathematical Fluid Dynamics, 1, 71-305, 2002.

Chapitre 2

Etude d'un système d'équations cinétiques pour un gaz à deux composantes entre deux parois.

2.1 Introduction

On s'intéresse dans ce chapitre, à l'équation de Boltzmann stationnaire dans le contexte d'un gaz à deux composantes pour des forces dures situé entre deux parois comportant des tranches infinies dans les directions (y,z) . Un théorème d'existence est démontré dans L^1 lorsqu'une des deux composantes vérifie un profil de données au bord rentrantes et l'autre des conditions de bord de type Maxwell diffuses. On considère un cadre cinétique dans le cas d'un barreau pour un gaz à deux composantes, chacune des deux composantes possédant des molécules mécaniquement identiques. Si f^A et f^B sont les fonctions de distribution respectives d'un gaz A et d'un gaz B , ce cadre est donné par le système:

$$\begin{aligned} \xi \frac{\partial}{\partial x} f_A(x,v) &= Q(f_A, f_A + f_B)(x,v), \\ \xi \frac{\partial}{\partial x} f_B(x,v) &= Q(f_B, f_A + f_B)(x,v), \\ x \in [-1,1], \quad v \in \mathbb{R}^3. \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

L'opérateur Q désigne l'opérateur de collision de Boltzmann. Il est donné par:

$$\begin{aligned} Q(f,g)(x,v) &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} B(v-v_*,\omega)[f'g'_* - fg_*]d\omega dv_*, \\ &= Q^+(f,g)(x,v) - Q^-(f,g)(x,v), \end{aligned}$$

où $Q^+(f,g) - Q^-(f,g)$ est la décomposition classique entre le terme de gain et le terme de perte,

$$\begin{aligned} f_* &= f(x,v_*), \quad f' = f(x,v'), \quad f'_* = f'(x,v_*) \\ v' &= v - \langle v - v_*, \omega \rangle \omega, \quad v'_* = v_* + \langle v - v_*, \omega \rangle \omega, \quad \omega \in \mathbb{S}^2. \end{aligned}$$

Pour une introduction générale sur l'équation de Boltzmann cf [9]. La composante de la vitesse dans la direction x est notée ξ .

$\langle v - v_*, \omega \rangle$ désigne le produit scalaire euclidien dans \mathbb{R}^3 . Soit $\omega \in \mathbb{R}^3$ représenté par θ , l'angle polaire pris avec l'axe polaire $v - v_*$ et ϕ l'angle azimutal.

La fonction $B(v - v_*, \omega)$ est le noyau de l'opérateur de collision Q pris dans le cas des potentiels durs égal à $|v - v_*|^\beta b(\theta)$ avec,

$$0 \leq \beta < 2, \quad b \in L^1_+([0, 2\pi]), \quad b(\theta) \geq c > 0 \quad pp.$$

La condition de bord pour la composante A possède le profil données au bord rentrantes suivantes:

$$f_A(-1, v) = kM_-(v), \quad \xi > 0, \quad f_A(1, v) = kM_+(v), \quad \xi < 0, \quad (2.1.2)$$

où k désigne une constante positive qui fait partie des inconnues. Elle sera déterminée au cours de la résolution du problème.

La condition de bord pour la composante B est du type Maxwell diffuse. Elle est donnée par la formule

$$\begin{aligned} f_B(-1, v) &= \sqrt{\frac{2\pi}{T_-}} M_-(v) \left(\int_{\xi' < 0} |\xi'| f_B(-1, v') dv' \right), \quad \xi > 0, \\ f_B(1, v) &= \sqrt{\frac{2\pi}{T_+}} M_+(v) \left(\int_{\xi' > 0} \xi' f_B(1, v') dv' \right), \quad \xi < 0. \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

M_+ et M_- sont les fonctions maxwelliennes normalisées suivantes

$$M_-(v) = \left(\frac{1}{2\pi T_-} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{|v|^2}{2T_-}\right) \quad \text{et} \quad M_+(v) = \left(\frac{1}{2\pi T_+} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{|v|^2}{2T_+}\right).$$

Remarque 2. *Pour les conditions de bord (2.1.3), on a considéré le cas $R = m = 1$ de la formule (1.3.2).*

Notons pour $f = f^A + f^B$

$$\nu(x, v) = \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} B(v - v_*, \omega) f(x, v_*) dv_* d\omega,$$

la fréquence de collision associée à la fonction de distribution f . Dans le contexte des gaz à deux composantes, des résultats numériques ont été obtenus dans ([23],[14]) pour l'opérateur *BGK* lorsque $k = 1$. Le contexte physique y est décrit de la façon suivante: f_A représente physiquement la densité d'un gaz sous forme de vapeur et f_B la densité d'un gaz qui ne peut pas se condenser sur les parois du barreau. Le cas des gaz à plusieurs composantes pour l'opérateur de Boltzmann est traité dans les articles ([2], [4], [1], [3]), lorsque le gaz non condensable devient négligeable. Il est prouvé numériquement que ce dernier s'accumule dans une fine couche située contre chaque paroi appelée couche de Knudsen. Ce problème sera développé d'un point de vue théorique dans le chapitre suivant.

Dans le contexte des gaz à une composante, l'existence d'une solution faible a été démontrée pour des conditions de bord du type (2.1.2) dans ([5]). Dans le cas des conditions de bord du type (2.1.3), un théorème analogue est également prouvé dans ([6]). Le cas de l'équation de Povzner est traité dans ([15]) pour un gaz à une composante dans le cas des conditions de bord du type Maxwell diffuse et pour les sphères dures.

Concernant les conditions de bord de type Maxwell diffuses en dimension n quelconque, " le biting lemma " est appliqué dans ([12]) pour obtenir les conditions de bord (2.1.3). Dans ce chapitre, le contexte étant la dimension 1 en espace, la condition (2.1.3) est obtenue par un argument de compacité faible dans L^1 grâce à un contrôle du flux sortant d'entropie.

Pour toute fonction de distribution f , on définit la β -norme de f de la manière suivante:

Définition 2.1.1.

$$\|f\|_\beta = \int (1 + |v|)^\beta f(x, v) dx dv.$$

Dans ce chapitre, on montre l'existence de solutions faibles (f_A, f_B) du problème stationnaire au sens de la définition 2.1.2 suivante:

Définition 2.1.2. Soient m_A et m_B deux constantes positives données. On dit que (f_A, f_B) est une solution faible du problème de Boltzmann stationnaire de β -normes m_A et m_B , si f_A et f_B appartiennent à $L^1_{loc}((-1,1) \times \mathbb{R}^3)$, $\nu \in L^1_{loc}((-1,1) \times \mathbb{R}^3)$, si

$$\begin{aligned} \int (1 + |\nu|)^\beta f_A(x, \nu) dx d\nu &= m_A, \\ \int (1 + |\nu|)^\beta f_B(x, \nu) dx d\nu &= m_B, \end{aligned}$$

et s'il existe une constante $k > 0$ telle que pour toute fonction test $\varphi \in C_c^1([-1,1] \times \mathbb{R}^3)$ s'annulant dans un voisinage de $\xi = 0$, et sur $\{(-1, \nu); \xi < 0\} \cup \{(1, \nu); \xi > 0\}$,

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \int_{\mathbb{R}^3} (\xi f_A \frac{\partial \varphi}{\partial x} + Q(f_A, f_A + f_B) \varphi)(x, \nu) dx d\nu \\ &= k \int_{\mathbb{R}^3, \xi < 0} \xi M_+(v) \varphi(1, v) dv - k \int_{\mathbb{R}^3, \xi > 0} \xi M_-(v) \varphi(-1, v) dv, \\ & \int_{-1}^1 \int_{\mathbb{R}^3} (\xi f_B \frac{\partial \varphi}{\partial x} + Q(f_B, f_A + f_B) \varphi)(x, \nu) dx d\nu, \\ &= \int_{\xi' < 0} |\xi| M_+(v) \varphi(1, v) dv \left(\int_{\xi' > 0} \xi' f_B(1, v') dv' \right) \\ & - \int_{\xi' > 0} \xi M_-(v) \varphi(-1, v) dv \left(\int_{\xi' < 0} \xi' f_B(-1, v') dv' \right). \quad (2.1.4) \end{aligned}$$

Notons que le choix des fonctions test au sens de la définition 2.1.2 est un choix naturel. En effet, d'après la formule de Green pour une fonction φ quelconque,

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \int_{\mathbb{R}_\nu^3} [\xi f_A(x, \nu) \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, \nu) + \xi \frac{\partial}{\partial x} f_A(x, \nu) \varphi(x, \nu)] dx d\nu \\ &= \int_{\mathbb{R}_\nu^3} \xi f_A(1, \nu) \varphi(1, \nu) dv - \int_{\mathbb{R}_\nu^3} \xi f_A(-1, \nu) \varphi(-1, \nu) dv \quad (2.1.5) \end{aligned}$$

D'après la définition 2.1.2, les fonctions test s'annulent sur

$\{(-1, v); \xi < 0\} \cup \{(1, v); \xi > 0\}$. Donc, l'équation (2.1.5) satisfait

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \int_{\mathbb{R}_v^3} \left[\xi \left(f_A \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) (x, v) + \xi \left(\frac{\partial f_A}{\partial x} \varphi \right) (x, v) \right] dx dv \\ &= \int_{\xi < 0} f_A(1, v) \varphi(1, v) \xi dv - \int_{\xi > 0} f_A(-1, v) \varphi(-1, v) \xi dv. \end{aligned}$$

D'après la formule (2.1.4),

$$\begin{aligned} & \int_{\xi < 0} |\xi| (f_A(1, v) - kM_+(v)) \varphi(1, v) dv \\ &+ \int_{\xi > 0} \xi (f_A(-1, v) - kM_-(v)) \varphi(-1, v) dv = 0. \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

Finalement, (2.1.6) fournit les conditions de bord (2.1.2). De plus, la composante B vérifie un résultat analogue.

Le principal résultat de ce chapitre est le théorème suivant:

Théorème 2.1.1. *Soit β tel que $0 \leq \beta < 2$. Alors, il existe une solution faible au problème stationnaire ayant une β -norme égale à 1.*

Les grandes lignes de la démonstration sont les suivantes: dans le paragraphe 2.2 on traite de la construction d'une solution approchée du problème stationnaire avec un noyau de collision approché qui n'est pas symétrique. Les preuves sont réalisées par des arguments de monotonie qui entraînent l'unicité de la suite des approximations successives. Dans le paragraphe 2.3, on réintroduit la symétrie de l'opérateur de collision. A cette étape, on utilise la compacité faible dans L^1 de la somme des deux composantes qui vérifie l'équation de Boltzmann stationnaire pour un gaz à une composante dans un barreau. On passe ainsi à la limite dans les traces. Dans le paragraphe 2.4, des extensions du théorème 2.1.1 sont données, en particulier lorsque m_A et m_B sont des valeurs positives quelconques.

2.2 Approximations avec des masses totales fixées.

Soit $r > 0$, $p, n \in \mathbb{N}^*$, $\mu > 0$, $\alpha > 0$, $j \in \mathbb{N}^*$. On définit $\chi^{r,p}$ comme une fonction C_0^∞ sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$ à valeurs dans $[0, 1]$ invariante par la transformation J suivante ,

$$J(v, v_*, \omega) = (v', v'_*, -\omega),$$

avec $\chi^{r,p}$ laissée également invariante par l'échange de v et v_* , et telle que

$$\begin{aligned} \chi^{r,p}(v, v_*, \omega) &= 1 \quad , \quad \min(|\xi|, |\xi_*|, |\xi'|, |\xi'_*|) \geq r, \\ \text{et } \chi^{r,p}(v, v_*, \omega) &= 0 \quad , \quad \max(|\xi|, |\xi_*|, |\xi'|, |\xi'_*|) \leq r - \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

Le noyau $B_{p,n,\mu}$ est une fonction C^∞ positive approchant $\min(B, \mu)$, lorsque

$$v^2 + v_*^2 < \frac{\sqrt{n}}{2}, \quad \left| \frac{v - v_*}{|v - v_*|} \cdot \omega \right| > \frac{1}{p}, \quad \left| \frac{v - v_*}{|v - v_*|} \cdot \omega \right| < 1 - \frac{1}{p},$$

et telle que $B_{p,n,\mu}(v, v_*, \omega) = 0$, si

$$v^2 + v_*^2 > \sqrt{n} \quad \text{ou} \quad \left| \frac{v - v_*}{|v - v_*|} \cdot \omega \right| < \frac{1}{2p} \quad \text{ou} \quad \left| \frac{v - v_*}{|v - v_*|} \cdot \omega \right| > 1 - \frac{1}{2p}.$$

Les fonctions φ_l sont des suites régularisantes en la variable x , définies par $\varphi_l(x) := l\varphi(lx)$, où

$$\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad \text{support}(\varphi) \subset]-1, 1[, \quad \varphi \geq 0, \quad \int_{-1}^1 \varphi(x) dx = 1.$$

Dans le but d'opérer un raisonnement de point fixe, on considère le sous-ensemble convexe et fermé de $L_+^1([-1, 1] \times \mathbb{R}_v^3)$ suivant,

$$K = \left\{ f \in L_+^1([-1, 1] \times \mathbb{R}_v^3), \int_{[-1, 1] \times \mathbb{R}_v^3} \min(\mu, (1 + |v|)^\beta) f(x, v) dx dv = 2 \right\}.$$

Pour $f \in K$ et $\theta \in [0, 1]$ fixés, on construit F_A et F_B solutions du problème suivant:

$$\begin{aligned} \alpha F_A + \xi \frac{\partial}{\partial x} F_A &= \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \frac{F_A}{1 + \frac{F_A + F_B}{j}}(x, v') \frac{f * \varphi}{1 + \frac{f * \varphi}{j}}(x, v'_*) dv_* d\omega \\ -F_A \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \frac{f * \varphi}{1 + \frac{f * \varphi}{j}}(x, v_*) dv_* d\omega, \quad (x, v) &\in (-1, 1) \times \mathbb{R}_v^3, \\ F_A(-1, v) &= \lambda M_-(v), \quad \xi > 0, \quad F_A(1, v) = \lambda M_+(v), \quad \xi < 0, \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

et

$$\begin{aligned}
\alpha F_B + \xi \frac{\partial}{\partial x} F_B &= \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \frac{F_B}{1 + \frac{F_A + F_B}{j}}(x, v') \frac{f * \varphi}{1 + \frac{f * \varphi}{j}}(x, v'_*) dv_* d\omega \\
-F_B \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \frac{f * \varphi}{1 + \frac{f * \varphi}{j}}(x, v_*) dv_* d\omega, & \quad (x, v) \in (-1, 1) \times \mathbb{R}_v^3, \\
F_B(-1, v) = \theta \lambda M_-(v), \quad \xi > 0, & \quad F_B(1, v) = (1 - \theta) \lambda M_+(v), \quad \xi < 0.
\end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Le nombre $\lambda > 0$ sera précisé dans l'équation (2.2.12). Les fonctions F_A et F_B sont construites comme la limite monotone dans L^1 de $(F_A^l)_{l \in \mathbb{N}}$ et $(F_B^l)_{l \in \mathbb{N}}$ définies respectivement par

$$\begin{aligned}
F_A^0 &= 0, \\
\alpha F_A^{l+1} + \xi \frac{\partial}{\partial x} F_A^{l+1} &= \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \frac{F_A^l}{1 + \frac{F_A^l + F_B^l}{j}}(x, v') \frac{f * \varphi}{1 + \frac{f * \varphi}{j}}(x, v'_*) dv_* d\omega \\
-F_A^{l+1} \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \frac{f * \varphi}{1 + \frac{f * \varphi}{j}}(x, v) dv_* d\omega, & \quad (x, v) \in [-1, 1] \times \mathbb{R}_v^3, \\
F_A^l(-1, v) = \lambda M_-(v), \quad \xi > 0, & \quad F_A^l(1, v) = \lambda M_+(v), \quad \xi < 0,
\end{aligned} \tag{2.2.3}$$

et

$$\begin{aligned}
F_B^0 &= 0, \\
\alpha F_B^{l+1} + \xi \frac{\partial}{\partial x} F_B^{l+1} &= \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \frac{F_B^l}{1 + \frac{F_A^l + F_B^l}{j}}(x, v') \frac{f * \varphi}{1 + \frac{f * \varphi}{j}}(x, v'_*) dv_* d\omega \\
-F_B^{l+1} \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \frac{f * \varphi}{1 + \frac{f * \varphi}{j}}(x, v_*) dv_* d\omega, & \quad (x, v) \in [-1, 1] \times \mathbb{R}_v^3, \\
F_B^{l+1}(-1, v) = \theta \lambda M_-(v), \quad \xi > 0, & \\
F_B^{l+1}(1, v) = (1 - \theta) \lambda M_+(v), \quad \xi < 0. &
\end{aligned}$$

$(F_A^l)_{l \in \mathbb{N}}$ et $(F_B^l)_{l \in \mathbb{N}}$ sont bien définies étant donné qu'elles sont solutions d'équations linéaires et sont positives pour $l \geq 1$. Leur somme $(F^l)_{l \in \mathbb{N}}$ sa-

tisfait

$$\begin{aligned}
 F^0 &= 0, \\
 \alpha F^{l+1} + \xi \frac{\partial}{\partial x} F^{l+1} &= \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \frac{F^l}{1 + \frac{F^l}{j}}(x, v') \frac{f * \varphi}{1 + \frac{f * \varphi}{j}}(x, v'_*) dv_* d\omega \\
 -F^{l+1} &\int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \frac{f * \varphi}{1 + \frac{f * \varphi}{j}}(x, v_*) dv_* d\omega, \quad (x, v) \in [-1, 1] \times \mathbb{R}_v^3, \\
 F^{l+1}(-1, v) &= (\theta + 1)\lambda M_-(v), \quad \xi > 0, \\
 F^{l+1}(1, v) &= (2 - \theta)\lambda M_+(v), \quad \xi < 0.
 \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Tout d'abord, $F^1 \geq 0$. Ecrivons l'équation (2.2.4) sous forme exponentielle

$$\begin{aligned}
 F^{l+1}(x, v) &= (1 + \theta)\lambda M_-(v) e^{-\alpha \frac{1+x}{\xi} - \int_{-\frac{1+x}{\xi}}^0 \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \frac{f * \varphi}{1 + \frac{f * \varphi}{j}}(x + \tau\xi, v_*) dv_* d\omega d\tau} \\
 &\quad + \int_{-\frac{1+x}{\xi}}^0 e^{-\alpha s - \int_s^0 \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \frac{f * \varphi}{1 + \frac{f * \varphi}{j}}(x + \tau\xi, v_*) dv_* d\omega d\tau} \\
 &\quad \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \frac{F^l}{1 + \frac{F^l}{j}}(x + s\xi, v') \frac{f * \varphi}{1 + \frac{f * \varphi}{j}}(x + s\xi, v'_*) dv_* d\omega ds, \quad \xi > 0.
 \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

Pour les $\xi < 0$, on trouve une expression analogue pour $F^{l+1}(x, v)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
 F^{l+1}(x, v) - F^l(x, v) &= \int_{-\frac{1+x}{\xi}}^0 e^{-\alpha s - \int_s^0 \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \frac{f * \varphi}{1 + \frac{f * \varphi}{j}}(x + \tau\xi, v_*) dv_* d\omega d\tau} \\
 &\quad \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \left(\frac{F^l}{1 + \frac{F^l}{j}}(x + s\xi, v') - \frac{F^{l-1}}{1 + \frac{F^{l-1}}{j}}(x + s\xi, v') \right) \\
 &\quad \frac{f * \varphi}{1 + \frac{f * \varphi}{j}}(x + s\xi, v'_*) dv_* d\omega ds, \quad \xi > 0.
 \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

Donc, $(F^l)_{l \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante pour $\xi > 0$. De plus, $B_{p,n,\mu}$ étant à support compact du fait de la troncature pour $v^2 + v_*^2 > \sqrt{n}$, $(F^l)_{l \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée dans L^1 . Donc, $(F^l)_{l \in \mathbb{N}}$ converge *p.p* en croissant vers une fonction F . Par passage à la limite dans l'équation (2.2.5) lorsque l tend

vers $+\infty$, on obtient

$$\begin{aligned}
F(x,v) &= (1+\theta)\lambda M_-(v) e^{-\alpha\frac{1+x}{\xi} - \int_{-\frac{1+x}{\xi}}^0 \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \frac{f^* \varphi}{1+\frac{f^* \varphi}{j}}(x+\tau\xi, v_*) dv_* d\omega d\tau} \\
&\quad + \int_{-\frac{1+x}{\xi}}^0 e^{-\alpha s - \int_s^0 \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \frac{f^* \varphi}{1+\frac{f^* \varphi}{j}}(x+\tau\xi, v_*) dv_* d\omega d\tau} \\
&\quad \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \frac{F}{1+\frac{F}{j}}(x+s\xi, v') \frac{f^* \varphi}{1+\frac{f^* \varphi}{j}}(x+s\xi, v'_*) dv_* d\omega ds, \quad \xi > 0
\end{aligned} \tag{2.2.7}$$

et une équation analogue pour $F(x,v)$ dans le cas où $\xi < 0$. Montrons que $(F_A^l)_{l \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente dans L^1 fort. L'équation (2.2.3) mise sous forme exponentielle entraîne,

$$\begin{aligned}
F_A^{l+1}(x,v) &= \lambda M_-(v) e^{-\alpha\frac{1+x}{\xi} - \int_{-\frac{1+x}{\xi}}^0 \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \frac{f^* \varphi}{1+\frac{f^* \varphi}{j}}(x+\tau\xi, v_*) dv_* d\omega d\tau} \\
&\quad + \int_{-\frac{1+x}{\xi}}^0 e^{-\alpha s - \int_s^0 \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \frac{f^* \varphi}{1+\frac{f^* \varphi}{j}}(x+\tau\xi, v_*) dv_* d\omega d\tau} \\
&\quad \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \frac{F_A^l}{1+\frac{F_A^l}{j}}(x+s\xi, v') \frac{f^* \varphi}{1+\frac{f^* \varphi}{j}}(x+s\xi, v'_*) dv_* d\omega ds, \quad \xi > 0.
\end{aligned} \tag{2.2.8}$$

Soit

$$Q_l^{A+} = \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \frac{F_A^l}{1+\frac{F_A^l}{j}}(x+s\xi, v') \frac{f^* \varphi}{1+\frac{f^* \varphi}{j}}(x+s\xi, v'_*) dv_* d\omega.$$

En utilisant que $F_A^l \leq F$ ainsi qu'une convolution en la variable v ([11], [6]), Q_l^{A+} est fortement compact dans L^1 . Par conséquent, $(F_A^l)_{l \in \mathbb{N}}$ converge fortement vers une fonction F_A dans L^1 . Pour des raisons analogues, $(F_B^l)_{l \in \mathbb{N}}$ converge fortement vers une fonction F_B . Par passage à la limite dans (2.2.8), on obtient qu'il existe F_A et F_B solutions de (2.2.1) et (2.2.2). Le lemme suivant établit l'unicité de (F_A, F_B) , solution de (2.2.1, 2.2.2).

Lemme 2.2.1. *Le système (2.2.1, 2.2.2) possède une unique solution strictement positive.*

Preuve du lemme 2.2.1.

Soient F_A et G_A deux solutions de l'équation (2.2.1). Considérons $\psi_{\varepsilon,}$ une approximation de la fonction signe et ϕ_{ε} définie par $\phi_{\varepsilon}(x) = \sqrt{\varepsilon + x^2}$ une

primitive de ψ_ε . Par soustraction des équations vérifiées par G_A et F_A , puis par multiplication par $\psi_\varepsilon(F_A(x,v) - G_A(x,v))$ et par intégration sur $[-1,1]$, on obtient pour $\xi > 0$,

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^1 \alpha[F_A - G_A](y,v) \psi_\varepsilon(y,v) dy + \phi_\varepsilon(\xi(F_A(1,v) - G_A(1,v))) \\
 & \leq \int_{-1}^1 \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \frac{|F_A - G_A|}{\left(1 + \frac{F_A + F_B}{j}\right) \left(1 + \frac{G_A + G_B}{j}\right)}(y,v') \\
 & \quad \frac{f * \varphi}{1 + \frac{f * \varphi}{j}}(y,v'_*) dv_* d\omega dy \\
 & - \int_{-1}^1 \psi_\varepsilon[F_A(y,v) - G_A(y,v)] \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \frac{f * \varphi}{1 + \frac{f * \varphi}{j}}(y,v_*) dv_* d\omega dy.
 \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

Le passage à la limite dans (2.2.9) lorsque ε tend vers 0 entraîne

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^1 \alpha|[F_A - G_A](y,v)| dy + \xi|[F_A - G_A](1,v)| \\
 & \leq \int_{-1}^1 \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \frac{|F_A - G_A|}{\left(1 + \frac{F_A + F_B}{j}\right) \left(1 + \frac{G_A + G_B}{j}\right)}(y,v') \\
 & \quad \frac{f * \varphi}{1 + \frac{f * \varphi}{j}}(y,v'_*) dv_* d\omega dy \\
 & - \int_{-1}^1 |[F_A - G_A](y,v)| \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{R}_v^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \frac{f * \varphi}{1 + \frac{f * \varphi}{j}}(y,v_*) dv_* d\omega dy.
 \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

En intégrant (2.2.10) sur \mathbb{R}_v^3 ,

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}_v^3} \int_{-1}^1 \alpha |F_A - G_A|(y, v) dy dv + \int_{\mathbb{R}_v^3} \xi |F_A - G_A|(1, v) dv \\
& \leq \int_{-1}^1 \int_{\mathbb{R}_v^3 \times \mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \frac{|F_A - G_A|}{\left(1 + \frac{F_A + F_B}{j}\right) \left(1 + \frac{G_A + G_B}{j}\right)}(y, v') \\
& \quad \frac{f * \varphi}{1 + \frac{f * \varphi}{j}}(y, v'_*) dv_* d\omega dy dv \\
& \quad - \int_{-1}^1 |F_A - G_A|(y, v) \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{R}_v^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \frac{f * \varphi}{1 + \frac{f * \varphi}{j}}(y, v_*) dv_* d\omega dy dv.
\end{aligned} \tag{2.2.11}$$

Etant donné que

$$|F_A - G_A|(y, v) \geq \frac{|F_A - G_A|}{\left(1 + \frac{F_A + F_B}{j}\right) \left(1 + \frac{G_A + G_B}{j}\right)}(y, v),$$

le membre de droite de l'équation (2.2.11) est négatif. Alors, pour $\xi > 0$,

$$\int_{-1}^1 \int_{\mathbb{R}_v^3} \alpha |F_A - G_A|(y, v) dy dv \leq 0.$$

De manière analogue, le même résultat est vérifié pour $\xi < 0$. Il s'en suit que $F_A = G_A$. Par le même raisonnement, on montre que l'équation (2.2.2) possède une unique solution. Ce qui prouve le lemme 2.2.1. \square

Considérons

$$\begin{aligned}
f_A &= \frac{F_A}{\int \min(\mu, (1 + |v|)^\beta) F_A(x, v) dx dv}, \\
f_B &= \frac{F_B}{\int \min(\mu, (1 + |v|)^\beta) F_B(x, v) dx dv}.
\end{aligned}$$

Les fonctions f_A et f_B sont bien définies étant donné que F_A et F_B sont strictement positives. En effet, les équations (2.2.1) et (2.2.2) écrites sous forme exponentielle entraînent

$$\begin{aligned} F_A(x,v) &\geq \lambda M_-(v) e^{-\alpha \frac{1+x}{\xi} - H_+(x)}, \quad \xi > 0, \\ F_A(x,v) &\geq \lambda M_+(v) e^{-\alpha \frac{1-x}{\xi} - H_-(x)}, \quad \xi < 0, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} H_+(x) &= \int_{-\frac{1+x}{\xi}}^0 \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \frac{f * \varphi}{1 + \frac{f * \varphi}{j}}(x + \tau \xi, v_*) dv_* d\omega d\tau \\ H_-(x) &= \int_{\frac{1-x}{\xi}}^0 \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \frac{f * \varphi}{1 + \frac{f * \varphi}{j}}(x + \tau \xi, v_*) dv_* d\omega d\tau. \end{aligned}$$

Pour $\alpha \in]0,1[$ et par définition de $B_{p,n,\mu}$, on a $\int_{-1}^1 (\alpha + \nu(x,v)) dx \leq 2 + 2\mu$. D'où,

$$\begin{aligned} F_A(x,v) &\geq \lambda M_-(v) e^{-\frac{2+2\mu}{\xi}} \quad , \quad \xi > 0, \\ F_A(x,v) &\geq \lambda M_+(v) e^{-\frac{2+2\mu}{|\xi|}} \quad , \quad \xi < 0. \end{aligned}$$

De manière analogue,

$$\begin{aligned} F_B(x,v) &\geq \theta \lambda M_-(v) e^{-\frac{2+2\mu}{\xi}} \quad , \quad \xi > 0, \\ F_B(x,v) &\geq (1 - \theta) \lambda M_+(v) e^{-\frac{2+2\mu}{|\xi|}} \quad , \quad \xi < 0. \end{aligned}$$

Soit λ défini par $\lambda = \min(\lambda_1, \lambda_2)$ avec

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{\int_{\xi > 0} M_-(v) \min(\mu, (1 + |v|)^\beta) e^{-\frac{2+2\mu}{\xi}} dv} \\ \lambda_2 &= \frac{1}{\int_{\xi < 0} M_+(v) \min(\mu, (1 + |v|)^\beta) e^{-\frac{2+2\mu}{|\xi|}} dv}. \end{aligned} \tag{2.2.12}$$

Alors,

$$\int \min(\mu, (1 + |v|)^\beta) F_A(x,v) dx dv \geq 1$$

et

$$\int \min(\mu, (1 + |v|)^\beta) F_B(x,v) dx dv \geq 1.$$

Les fonctions f_A et f_B sont solutions de

$$\begin{aligned}
\alpha f_A + \xi \frac{\partial}{\partial x} f_A &= \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \frac{f_A}{1 + \frac{F}{j}}(x, v') \frac{f * \varphi}{1 + \frac{f * \varphi}{j}}(x, v'_*) dv_* d\omega \\
&- f_A \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \frac{f * \varphi}{1 + \frac{f * \varphi}{j}}(x, v_*) dv_* d\omega, \quad (x, v) \in (-1, 1) \times \mathbb{R}_v^3, \\
f_A(-1, v) &= \frac{\lambda}{\int \min(\mu, (1 + |v|)^\beta) F_A(x, v) dx dv} M_-(v) \quad , \quad \xi > 0, \\
f_A(1, v) &= \frac{\lambda}{\int \min(\mu, (1 + |v|)^\beta) F_A(x, v) dx dv} M_+(v) \quad , \quad \xi < 0, \quad (2.2.13)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\alpha f_B + \xi \frac{\partial}{\partial x} f_B &= \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \frac{f_B}{1 + \frac{F}{j}}(x, v') \frac{f * \varphi}{1 + \frac{f * \varphi}{j}}(x, v'_*) dv_* d\omega \\
&- f_B(x, v) \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \frac{f * \varphi}{1 + \frac{f * \varphi}{j}}(x, v_*) dv_* d\omega, \quad (x, v) \in (-1, 1) \times \mathbb{R}_v^3, \\
f_B(-1, v) &= \frac{\lambda}{\int \min(\mu, (1 + |v|)^\beta) F_B(x, v) dx dv} \theta M_-(v), \quad \xi > 0, \\
f_B(1, v) &= \frac{\lambda}{\int \min(\mu, (1 + |v|)^\beta) F_B(x, v) dx dv} (1 - \theta) M_+(v), \quad \xi < 0.
\end{aligned} \tag{2.2.14}$$

Rappelons que F est solution de

$$\begin{aligned}
\alpha F + \xi \frac{\partial}{\partial x} F &= \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \frac{F}{1 + \frac{F}{j}}(x, v') \frac{f * \varphi}{1 + \frac{f * \varphi}{j}}(x, v'_*) dv_* d\omega \\
&- F \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \frac{f * \varphi}{1 + \frac{f * \varphi}{j}}(x, v_*) dv_* d\omega, \quad (x, v) \in (-1, 1) \times \mathbb{R}_v^3, \\
F(-1, v) &= (\theta + 1) \lambda M_-(v), \quad \xi > 0, \\
F(1, v) &= (2 - \theta) \lambda M_+(v), \quad \xi < 0.
\end{aligned} \tag{2.2.15}$$

Dans le but d'obtenir les égalités (2.2.13, 2.2.14) avec $f = f_A + f_B$, on opère un raisonnement de point fixe.

Soit T définie sur $K \times [0,1]$ par $T(f,\theta) = (f_A + f_B, \tilde{\theta})$ avec

$$\tilde{\theta} = \frac{\int_{\xi < 0} |\xi| f_B(-1, v) dv}{\int_{\xi < 0} |\xi| f_B(-1, v) dv + \int_{\xi > 0} \xi f_B(1, v) dv}, \quad (2.2.16)$$

où (f_A, f_B) est solution de (2.2.13, 2.2.14).

Lemme 2.2.2. *T est une application continue et compacte de $K \times [0,1]$ dans lui-même, K étant muni de la topologie forte de L^1 .*

Preuve du lemme 2.2.2.

T laisse stable $K \times [0,1]$.

Soit \tilde{T} l'application associant à $f \in K$, F solution de (2.2.15). On montre d'abord que \tilde{T} est compacte dans L^1 . Soit (f^l) une suite bornée de $L^1([-1,1] \times \mathbb{R}_v^3)$. D'après la forme exponentielle de $F^l = \tilde{T}(f^l)$,

$$\begin{aligned} F^l(x, v) &= \lambda(1 + \theta_l) M_-(v) e^{-\alpha \frac{1+x}{\xi} - \int_{-\frac{1+x}{\xi}}^0 \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \frac{f^{l*} \varphi}{1 + \frac{f^{l*} \varphi}{j}}(x + \tau \xi, v_*) d\tau dv_* d\omega} \\ &+ \int_{-\frac{1+x}{\xi}}^0 e^{-\alpha \frac{1+x}{\xi} - \int_s^0 \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \frac{f^{l*} \varphi}{1 + \frac{f^{l*} \varphi}{j}}(x + \tau \xi, v_*) d\tau dv_* d\omega} Q_l^+(x + s\xi, v) ds, \end{aligned}$$

$\xi > 0,$

où

$$Q_l^+(x, v) = \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \frac{F^l}{1 + \frac{F^l}{j}}(x, v') \frac{f^l * \varphi}{1 + \frac{f^l * \varphi}{j}}(x, v_*) dv_* d\omega.$$

D'après la convolution de (f^l) par φ en la variable x ,

$$\left(\int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \frac{f^l * \varphi}{1 + \frac{f^l * \varphi}{j}}(x + \tau \xi, v_*) d\tau dv_* d\omega \right)$$

est fortement compacte dans L^1 . En utilisant une convolution en la variable v ([11], [6]), le terme de gain Q_l^+ est fortement compact dans L^1 . Il s'ensuit que (F^l) est fortement compacte dans L^1 et que \tilde{T} est une application compacte. Montrons que \tilde{T} est une application continue. Soit (f^l) une suite convergente dans $L^1([-1,1] \times \mathbb{R}_v^3)$. C'est donc une suite bornée de L^1 . Par compacité de l'application \tilde{T} , (F^l) possède une sous-suite extraite, toujours notée (F^l) ,

convergeant vers une fonction F . La suite (F^l) vérifie

$$\begin{aligned} \alpha F^l + \xi \frac{\partial}{\partial x} F^l &= \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \frac{F^l}{1 + \frac{F^l}{j}}(x, v') \frac{f^l * \varphi}{1 + \frac{f^l * \varphi}{j}}(x, v'_*) dv_* d\omega \\ &- F^l \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \frac{f^l * \varphi}{1 + \frac{f^l * \varphi}{j}}(x, v_*) dv_* d\omega, \quad (x, v) \in (-1, 1) \times \mathbb{R}_v^3, \\ F^l(-1, v) &= (\theta_l + 1) \lambda M_-(v), \quad \xi > 0, \\ F^l(1, v) &= (2 - \theta_l) \lambda M_+(v), \quad \xi < 0. \end{aligned} \tag{2.2.17}$$

La forme exponentielle de (2.2.17) entraîne

$$\begin{aligned} F^l(x, v) &= (1 + \theta_l) \lambda M_-(v) e^{-\alpha \frac{1+x}{\xi} - \int_{-\frac{1+x}{\xi}}^0 \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \frac{f^l * \varphi}{1 + \frac{f^l * \varphi}{j}}(x + \tau \xi, v_*) dv_* d\omega d\tau} \\ &+ \int_{-\frac{1+x}{\xi}}^0 e^{-\alpha s - \int_s^0 \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \frac{f^l * \varphi}{1 + \frac{f^l * \varphi}{j}}(x + \tau \xi, v_*) dv_* d\omega d\tau} \\ &\int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \frac{F^l}{1 + \frac{F^l}{j}}(x + s\xi, v') \frac{f^l * \varphi}{1 + \frac{f^l * \varphi}{j}}(x + s\xi, v'_*) dv_* d\omega ds, \quad \xi > 0. \end{aligned} \tag{2.2.18}$$

De plus, (F^l) converge vers F et $(f^l * \varphi)$ converge vers $f * \varphi$ dans $L^1([-1, 1] \times \mathbb{R}_v^3)$. Donc, il existe une sous suite de (F^l) toujours notée (F^l) convergeant $p.p.$ vers F . De plus,

$$\chi^{r,p} B_{p,n,\mu}(v, v_*, \omega) \frac{F^l}{1 + \frac{F^l}{j}}(y, v') \frac{f^l * \varphi}{1 + \frac{f^l * \varphi}{j}}(y, v'_*) \leq j^2 \chi^{r,p} B_{p,n,\mu}(v, v_*, \omega).$$

Donc, d'après le théorème de Lebesgue appliqué à l'équation (2.2.18), F est solution de

$$\begin{aligned} \alpha F + \xi \frac{\partial}{\partial x} F &= \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \frac{F}{1 + \frac{F}{j}}(x, v') \frac{f * \varphi}{1 + \frac{f * \varphi}{j}}(x, v'_*) dv_* d\omega, \\ &- F \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \frac{f * \varphi}{1 + \frac{f * \varphi}{j}}(x, v_*) dv_* d\omega, \quad (x, v) \in (-1, 1) \times \mathbb{R}_v^3, \\ F(-1, v) &= (\theta + 1) \lambda M_-(v), \quad \xi > 0, \\ F(1, v) &= (2 - \theta) \lambda M_+(v), \quad \xi < 0. \end{aligned} \tag{2.2.19}$$

En raisonnant de manière analogue à la preuve du Lemme 2.2.1, on obtient que (2.2.19) possède une unique solution. Par conséquent, toute la suite $(F^l)_{l \in \mathbb{N}}$ converge vers la solution de l'équation (2.2.19). D'où, \tilde{T} est continue. Pour des raisons analogues, T_A et T_B sont des applications continues et compactes. Donc, la première composante de T , $T_A + T_B$ est une application continue et compacte. La seconde composante étant trivialement compacte, il reste à montrer sa continuité. Considérons une suite (f^l) convergeant vers f dans L^1 et montrons que $(\tilde{\theta}_l)$ converge vers $\tilde{\theta}$. Rappelons que $\tilde{\theta}$ est définie par (2.2.16). Grâce à la troncature en la variable ξ , $(\int_{\mathbb{R}_v^3} \xi^2 f^l(x,v) dv)$ est uniformément bornée en x . D'où, $Q_l(f_B^l, f^l)$ converge vers $Q(f_B, f)$ dans L^1 . Considérons une fonction continue et différentiable définie sur $[-1,1]$ à valeurs dans $[0,1]$ telle que $\varphi(-1) = 0$ et $\varphi(1) = 1$. f_B^l vérifiant l'équation (2.2.14),

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \xi \frac{\partial}{\partial x} ((f_B^l - f_B) \varphi(x)) dx &= \int_{-1}^1 (Q(f_B^l, f^l) - Q(f_B, f)) \varphi(x) dx \\ &+ \int_{-1}^1 (f_B^l - f_B)(x,v) \xi \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x) dx \\ &- \alpha \int_{-1}^1 (f_B^l - f_B)(x,v) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Les fonctions φ et φ' étant bornées,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_v^3} |\xi (f_B^l(1,v) - f_B(1,v))| dv &\leq c \int_{\mathbb{R}_v^3} \int_{-1}^1 |Q(f_B^l, f^l) - Q(f_B, f)| dx dv \\ &+ c \int_{\mathbb{R}_v^3} \int_{-1}^1 |(f_B^l - f_B)(x,v)| dx dv \\ &+ c \int_{\mathbb{R}_v^3} \int_{-1}^1 (f_B^l - f_B)(x,v) dx dv. \end{aligned}$$

$(Q(f_B^l, f^l))$ et (f_B^l) convergeant respectivement vers $Q(f_B, f)$ et f_B dans $L^1([-1,1] \times \mathbb{R}_v^3)$, $(f_B^l(1, \cdot))$ converge vers $f_B(1, \cdot)$ dans $L^1_{|\xi|}$. De manière analogue, $(f_B^l(-1, \cdot))$ converge vers $f_B(-1, \cdot)$ dans $L^1_{|\xi|}$.

Donc, $\int_{\xi > 0} \xi f_B^l(1,v) dv$ et $\int_{\xi < 0} |\xi| f_B^l(-1,v) dv$ convergent respectivement vers $\int_{\xi > 0} \xi f_B(1,v) dv$ et $\int_{\xi < 0} |\xi| f_B(-1,v) dv$. Ceci prouve que la suite $(\tilde{\theta}_l)$ converge vers $\tilde{\theta}$. Finalement, T est une application compacte et continue de l'ensemble convexe et fermé $K \times [0,1]$ dans lui-même. \square

Ainsi, le théorème du point fixe de Schauder entraîne qu'il existe $(f, \theta) \in K \times [0, 1]$ tel que

$$\begin{aligned} f &= f_A + f_B, \\ \theta &= \frac{\int_{\xi < 0} |\xi| f_B(-1, v) dv}{\int_{\xi > 0} \xi f_B(1, v) dv + \int_{\xi < 0} |\xi| f_B(-1, v) dv}, \end{aligned}$$

vérifiant

$$\begin{aligned} \alpha f_A + \xi \frac{\partial}{\partial x} f_A &= \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \frac{f_A}{1 + \frac{F}{j}}(x, v') \frac{f * \varphi_l}{1 + \frac{f * \varphi_l}{j}}(x, v'_*) dv_* d\omega \\ &- f_A \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \frac{f * \varphi_l}{1 + \frac{f * \varphi_l}{j}}(x, v_*) dv_* d\omega, \quad (x, v) \in (-1, 1) \times \mathbb{R}_v^3, \\ f_A(-1, v) &= k_A M_-(v), \quad \xi > 0, \quad f_A(1, v) = k_A M_+(v), \quad \xi < 0, \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

avec

$$k_A = \frac{\lambda}{\int \min(\mu, (1 + |v|)^\beta) F_A(x, v) dx dv}$$

et

$$\begin{aligned} \alpha f_B + \xi \frac{\partial}{\partial x} f_B &= \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \frac{f_B}{1 + \frac{F}{j}}(x, v') \frac{f * \varphi_l}{1 + \frac{f * \varphi_l}{j}}(x, v'_*) dv_* d\omega \\ &- f_B \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \frac{f * \varphi_l}{1 + \frac{f * \varphi_l}{j}}(x, v_*) dv_* d\omega, \quad (x, v) \in (-1, 1) \times \mathbb{R}_v^3, \\ f_B(-1, v) &= \lambda' \left(\frac{\int_{\xi < 0} |\xi| f_B(-1, v) dv}{\int_{\xi > 0} \xi f_B(1, v) dv + \int_{\xi < 0} |\xi| f_B(-1, v) dv} \right) M_-(v), \quad \xi > 0, \\ f_B(1, v) &= \lambda' \left(\frac{\int_{\xi > 0} \xi f_B(1, v) dv}{\int_{\xi > 0} \xi f_B(1, v) dv + \int_{\xi < 0} |\xi| f_B(-1, v) dv} \right) M_+(v), \quad \xi < 0, \end{aligned}$$

avec

$$\lambda' = \frac{\lambda}{\int \min(\mu, (1 + |v|)^\beta) F_B(x, v) dx dv}.$$

l, j, r, p, μ étant fixés, notons $f^{j,\alpha,l,r,p,\mu}$ par f^α et étudions le passage à la limite lorsque α tend vers 0 dans les systèmes précédents. D'après la forme exponentielle des équations (2.2.20, 2.2.19) et en utilisant un lemme de moyenne avec une convolution en la variable x ([6],[11]), on obtient que (f_A^α) et (F^α) sont fortement compactes dans $L^1([-1,1] \times \mathbb{R}_v^3)$. Notons par f_A et F les limites respectives de f_A^α et F^α . Le passage à la limite lorsque α tend vers 0 dans l'équation (3.3.22) entraîne

$$\begin{aligned}
 \xi \frac{\partial}{\partial x} f_A &= \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \frac{f_A}{1 + \frac{F}{j}}(x, v') \frac{f * \varphi_l}{1 + \frac{f * \varphi_l}{j}}(x, v'_*) dv_* d\omega \\
 &- f_A \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \frac{f * \varphi_l}{1 + \frac{f * \varphi_l}{j}}(x, v_*) dv_* d\omega, \quad (x, v) \in (-1, 1) \times \mathbb{R}_v^3, \\
 f_A(-1, v) &= \frac{\lambda}{\int \min(\mu, (1 + |v|)^\beta) F_A(x, v) dx dv} M_-(v), \quad \xi > 0, \\
 f_A(1, v) &= \frac{\lambda}{\int \min(\mu, (1 + |v|)^\beta) F_A(x, v) dx dv} M_+(v), \quad \xi < 0, \quad (2.2.21)
 \end{aligned}$$

avec

$$\int \min(\mu, (1 + |v|)^\beta) f_A(x, v) dx dv = 1.$$

Pour des raisons analogues, la limite f_B de f_B^α vérifie

$$\begin{aligned}
 \xi \frac{\partial}{\partial x} f_B &= \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \frac{f_B}{1 + \frac{F}{j}}(x, v') \frac{f * \varphi_l}{1 + \frac{f * \varphi_l}{j}}(x, v'_*) dv_* d\omega \\
 &- f_B \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \frac{f * \varphi_l}{1 + \frac{f * \varphi_l}{j}}(x, v_*) dv_* d\omega, \quad (x, v) \in (-1, 1) \times \mathbb{R}_v^3, \\
 f_B(-1, v) &= \sigma(-1) \lambda' M_-(v), \quad \xi > 0, \\
 f_B(1, v) &= \sigma(1) \lambda' M_+(v), \quad \xi < 0, \quad (2.2.22)
 \end{aligned}$$

avec

$$\int \min(\mu, (1 + |v|)^\beta) f_B(x, v) dx dv = 1.$$

On a noté

$$\sigma(-1) = \frac{\int_{\xi < 0} |\xi| f_B(-1, v) dv}{\int_{\xi > 0} \xi f_B(1, v) dv + \int_{\xi < 0} |\xi| f_B(-1, v) dv},$$

$$\sigma(1) = \frac{\int_{\xi > 0} \xi f_B(1, v) dv}{\int_{\xi > 0} \xi f_B(1, v) dv + \int_{\xi < 0} |\xi| f_B(-1, v) dv}$$

et

$$\lambda' = \frac{\lambda}{\int \min(\mu, (1 + |v|)^\beta) F_B(x, v) dx dv}. \quad (2.2.23)$$

Le passage à la limite dans (2.2.21) et dans (2.2.22), lorsque l tend vers $+\infty$ est similaire et implique que les limites respectives f_A et f_B de (f_A^l) et (f_B^l) sont solutions de

$$\begin{aligned} \xi \frac{\partial}{\partial x} f_A &= \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \frac{f_A}{1 + \frac{F}{j}}(x, v') \frac{f}{1 + \frac{f}{j}}(x, v'_*) dv_* d\omega \\ &- f_A \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \frac{f}{1 + \frac{f}{j}}(x, v_*) dv_* d\omega, \quad (x, v) \in (-1, 1) \times \mathbb{R}_v^3, \\ f_A(-1, v) &= k_A M_-(v), \quad \xi > 0, \quad f_A(1, v) = k_A M_+(v), \quad \xi < 0, \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

avec

$$\int \min(\mu, (1 + v)^\beta) f_A(x, v) dx dv = 1,$$

où k_A est définie dans (2.2.20) et

$$\begin{aligned} \xi \frac{\partial}{\partial x} f_B &= \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \frac{f_B}{1 + \frac{F}{j}}(x, v') \frac{f}{1 + \frac{f}{j}}(x, v'_*) dv_* d\omega \\ &- f_B \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \frac{f}{1 + \frac{f}{j}}(x, v_*) dv_* d\omega, \quad (x, v) \in (-1, 1) \times \mathbb{R}_v^3, \\ f_B(-1, v) &= \sigma(-1) \lambda' M_-(v), \quad \xi > 0, \\ f_B(1, v) &= \sigma(1) \lambda' M_+(v), \quad \xi < 0, \end{aligned} \quad (2.2.25)$$

$$\int \min(\mu, (1 + |v|)^\beta) f_B(x, v) dx dv = 1,$$

avec,

$$\begin{aligned}\sigma(-1) &= \frac{\int_{\xi < 0} |\xi| f_B(-1, v) dv}{\int_{\xi > 0} \xi f_B(1, v) dv + \int_{\xi < 0} |\xi| f_B(-1, v) dv}, \\ \sigma(1) &= \frac{\int_{\xi > 0} \xi f_B(1, v) dv}{\int_{\xi > 0} \xi f_B(1, v) dv + \int_{\xi < 0} |\xi| f_B(-1, v) dv},\end{aligned}$$

et

$$F = F_A + F_B.$$

Les fonctions F_A et F_B sont définies par (2.2.1, 2.2.2) après être passé à la limite.

On passe maintenant à la limite dans les équations (2.2.24, 2.2.25) lorsque j tend vers $+\infty$. Les suites (f_A^j) et (f_B^j) , solutions de (2.2.24) et (2.2.25) sont faiblement compactes dans $L^1([-1, 1] \times \mathbb{R}_v^3)$. En effet, $f^j = f_A^j + f_B^j$ satisfait l'équation de Boltzmann pour un gaz à une composante. En utilisant le terme de production d'entropie ([6]), on obtient que (f^j) est faiblement compacte dans $L^1([-1, 1] \times \mathbb{R}_v^3)$. Les inégalités $0 \leq f_A^j \leq f^j$ et $0 \leq f_B^j \leq f^j$ entraînent alors que (f_A^j) et (f_B^j) sont faiblement compactes dans L^1 .

Notons par f_A et f_B les limites respectives de (f_A^j) et (f_B^j) , considérées à une sous-suite près. De plus, $(Q_j^+(f^j, f^j))$ et $(Q_j^-(f^j, f^j))$ sont faiblement compactes dans $L^1([-1, 1] \times \mathbb{R}_v^3)$ ([6]). Donc, d'après les inégalités

$$\begin{aligned}Q_j^+(f_A^j, f^j) &\leq Q_j^+(f^j, f^j), & Q_j^+(f_B^j, f^j) &\leq Q_j^+(f^j, f^j), \\ Q_j^-(f_A^j, f^j) &\leq Q_j^-(f^j, f^j), & Q_j^-(f_B^j, f^j) &\leq Q_j^-(f^j, f^j),\end{aligned}$$

les suites de termes de collision $(Q_j^+(f_B^j, f^j))$, $(Q_j^-(f_A^j, f^j))$, $(Q_j^-(f_A^j, f^j))$ et $(Q_j^-(f_B^j, f^j))$ sont faiblement compactes dans $L^1([-1, 1] \times \mathbb{R}_v^3)$. D'où, (f_A^j) et (f_B^j) vérifiant (2.2.24, 2.2.25), $(\xi \frac{\partial}{\partial x} f_A^j)$ et $(\xi \frac{\partial}{\partial x} f_B^j)$ sont faiblement compactes dans $L^1([-1, 1] \times \mathbb{R}_v^3)$. Le passage à la limite lorsque $j \rightarrow +\infty$ dans la formulation faible de (2.2.25) entraîne

$$\begin{aligned}
& \int_{[-1,1] \times \mathbb{R}_v^3} \xi \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x,v) f_B^j(x,v) dx dv + \int_{[-1,1] \times \mathbb{R}_v^3} \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \varphi(x,v) \\
& \left(\frac{f_B^j}{1 + \frac{F_A^j + F_B^j}{j}}(x,v') \frac{f^j}{1 + \frac{f^j}{j}}(x,v'_*) - f_B^j(x,v) \frac{f^j}{1 + \frac{f^j}{j}}(x,v_*) \right) dv_* d\omega dx dv \\
& = \int_{\xi > 0} \xi f_B^j(1,v) \varphi(1,v) dv - \int_{\xi < 0} \xi f_B^j(-1,v) \varphi(-1,v) dv \\
& - \sigma^j(-1) \lambda' \int_{\xi > 0} \xi M_-(v) \varphi(-1,v) dv + \sigma^j(1) \lambda' \int_{\xi < 0} \xi M_+(v) \varphi(1,v) dv,
\end{aligned} \tag{2.2.26}$$

où

$$\begin{aligned}
\sigma^j(-1) &= \frac{\int_{\xi < 0} |\xi| f_B^j(-1,v) dv}{\int_{\xi < 0} |\xi| f_B^j(-1,v) dv + \int_{\xi > 0} \xi f_B^j(1,v) dv}, \\
\sigma^j(1) &= \frac{\int_{\xi > 0} \xi f_B^j(1,v) dv}{\int_{\xi < 0} |\xi| f_B^j(-1,v) dv + \int_{\xi > 0} \xi f_B^j(1,v) dv},
\end{aligned}$$

pour toute fonction test φ appartenant à $C_c^1([-1,1] \times \mathbb{R}_v^3)$. Par compacité faible dans L^1 de (f_B^j) et de (f^j) ,

$$\begin{aligned}
& \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{[-1,1] \times \mathbb{R}_v^3} \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \varphi(x,v) \frac{f_B^j}{1 + \frac{F_A^j + F_B^j}{j}}(x,v') \frac{f^j}{1 + \frac{f^j}{j}}(x,v'_*) dx dv dv_* d\omega \\
& = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{[-1,1] \times \mathbb{R}_v^3} \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} \varphi(x,v') f_B^j(x,v) f^j(x,v_*) dx dv dv_* d\omega.
\end{aligned}$$

Le terme $\chi^{r,p} B_{p,n,\mu}$ étant borné et les suites (f^j) et $(\xi \frac{\partial}{\partial x} f^j)$ étant faiblement compactes dans $L^1([-1,1] \times \mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2)$, un lemme de moyenne implique que

$$\left(\int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} f^j(x,v_*) \varphi(x,v') dv_* d\omega \right)_{j \in \mathbb{N}}$$

converge dans $L^1([-1,1] \times \mathbb{R}_v^3)$ vers

$$\int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} f(x,v_*) \varphi(x,v') dv_* d\omega.$$

De plus, du fait de la troncature en la variable ξ_* pour les petites vitesses, cette suite est bornée. Les suites (f_B^j) et $(\xi \frac{\partial}{\partial x} f_B^j)$ étant faiblement compactes dans $L^1([-1,1] \times \mathbb{R}_v^3)$, un lemme de moyenne implique que

$$\left(\int_{[-1,1] \times \mathbb{R}_v^3} \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} f_B^j(x,v) f^j(x,v_*) \varphi(x,v') dv_* d\omega dx dv \right)_{j \in \mathbb{N}}$$

converge vers

$$\int_{[-1,1] \times \mathbb{R}_v^3} \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} f_B(x,v) f(x,v_*) \varphi(x,v') dv_* d\omega dx dv.$$

Donc, $(Q_j(f_B^j, f^j))$ converge vers $Q(f_B, f)$ dans L^1 . D'où, en raisonnant de manière analogue à la preuve du lemme 2.2.2, on obtient que $\sigma^j(-1)$ (resp $\sigma^j(1)$) tend vers $\sigma(-1)$ (resp $\sigma(1)$), lorsque j tend vers l'infini. En passant à la limite lorsque j tend vers l'infini dans (2.2.26), il s'ensuit qu'il existe $f_B^{r,\mu}$ solution de

$$\begin{aligned} \xi \frac{\partial}{\partial x} f_B^{r,\mu} &= \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} f_B^{r,\mu}(x,v') f^{r,\mu}(x,v_*) dv_* d\omega \\ &- f_B^{r,\mu} \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^{r,p} B_{p,n,\mu} f^{r,\mu}(x,v_*) dv_* d\omega, \quad (x,v) \in (-1,1) \times \mathbb{R}_v^3, \\ f_B^{r,\mu}(-1,v) &= \sigma(-1) \lambda' M_-(v), \quad \xi > 0, \\ f_B^{r,\mu}(1,v) &= \sigma(1) \lambda' M_+(v), \quad \xi < 0, \end{aligned} \tag{2.2.27}$$

avec

$$\int \min(\mu, (1 + |v|)^\beta) f_B^{r,\mu}(x,v) dx dv = 1.$$

$\sigma(-1)$ et $\sigma(1)$ vérifient,

$$\sigma(-1) = \frac{\int_{\xi < 0} |\xi| f_B^{r,\mu}(-1,v) dv}{\int_{\xi > 0} \xi f_B^{r,\mu}(1,v) dv + \int_{\xi < 0} |\xi| f_B^{r,\mu}(-1,v) dv}$$

et

$$\sigma(1) = \frac{\int_{\xi > 0} \xi f_B^{r,\mu}(1,v) dv}{\int_{\xi > 0} \xi f_B^{r,\mu}(1,v) dv + \int_{\xi < 0} |\xi| f_B^{r,\mu}(-1,v) dv}.$$

De plus,

$$\int_{\mathbb{R}_v^3} \xi f_B^{r,\mu}(1,v) dv - \int_{\mathbb{R}_v^3} \xi f_B^{r,\mu}(-1,v) dv = 0.$$

D'où,

$$\int_{\xi>0} |\xi| f_B^{r,\mu}(1,v) dv + \int_{\xi<0} |\xi| f_B^{r,\mu}(-1,v) dv = \lambda',$$

où λ' est défini par 2.2.23. Les conditions au bord de (2.2.27) se simplifient donc et s'écrivent

$$\begin{aligned} f_B^{r,\mu}(-1,v) &= M_-(v) \int_{\xi'<0} |\xi'| f_B^{r,\mu}(-1,v') dv' \quad , \quad \xi > 0, \\ f_B^{r,\mu}(1,v') &= M_+(v) \int_{\xi'>0} \xi' f_B^{r,\mu}(1,v') dv' \quad , \quad \xi < 0, \end{aligned}$$

i.e. sont de type Maxwell diffuse.

Le passage à la limite lorsque $p \rightarrow +\infty$ et $n \rightarrow +\infty$ dans l'équation (2.2.27) est réalisé comme précédemment et implique qu'il existe $f_B^{r,\mu}$ vérifiant,

$$\begin{aligned} \xi \frac{\partial}{\partial x} f_B^{r,\mu} &= \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^r B_\mu(v - v_*, \omega) f_B^{r,\mu}(x, v') f_B^{r,\mu}(x, v'_*) dv_* d\omega \\ - f_B^{r,\mu} &\int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^r B_\mu(v - v_*, \omega) f_B^{r,\mu}(x, v_*) dv_* d\omega, \quad (x, v) \in (-1, 1) \times \mathbb{R}_v^3, \\ f_B^{r,\mu}(-1, v) &= M_-(v) \int_{\xi<0} |\xi| f_B^{r,\mu}(-1, v) dv \quad , \quad \xi > 0, \\ f_B^{r,\mu}(1, v) &= M_+(v) \int_{\xi>0} \xi f_B^{r,\mu}(1, v) dv \quad , \quad \xi < 0, \end{aligned} \tag{2.2.28}$$

avec

$$\int \min(\mu, (1 + |v|)^\beta) f_B^{r,\mu}(x, v) dx dv = 1.$$

Pour des raisons analogues, il existe $f_A^{r,\mu}$ vérifiant,

$$\begin{aligned} \xi \frac{\partial}{\partial x} f_A^{r,\mu} &= \int_{\mathbb{R}_v^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^r B_\mu(v - v_*, \omega) f_A^{r,\mu}(x, v') f^{r,\mu}(x, v'_*) dv_* d\omega \\ &- f_A^{r,\mu} \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^r B_\mu(v - v_*, \omega) f^{r,\mu}(x, v_*) dv_* d\omega, \quad (x, v) \in (-1, 1) \times \mathbb{R}_v^3, \\ f_A^{r,\mu}(-1, v) &= k_A M_-(v), \quad \xi > 0, \quad f_A^{r,\mu}(1, v) = k_A M_+(v), \quad \xi < 0, \end{aligned} \quad (2.2.29)$$

avec

$$\int \min(\mu, (1 + |v|)^\beta) f_A^{r,\mu}(x, v) dx dv = 1,$$

où k_A est définie par l'équation (2.2.20) avant le passage à la limite.

2.3 Fin de la preuve du théorème principal.

Le dernier passage à la limite qui consiste à faire tendre r vers 0 et μ vers $+\infty$ requiert une technique particulière, étant donné qu'on ne dispose plus de troncature uniforme pour les $|\xi|$ petits. Soit $(r_j)_{j \in \mathbb{N}}$ avec $\lim_{j \rightarrow +\infty} r_j = 0$ et $(\mu_j)_{j \in \mathbb{N}}$ avec $\lim_{j \rightarrow +\infty} \mu_j = +\infty$, $f_A^j = f_A^{r_j, \mu_j}$ et $f_B^j = f_B^{r_j, \mu_j}$. Le passage à la limite lorsque $j \rightarrow +\infty$ est maintenant réalisé dans les formulations faibles satisfaites par f_A^j et f_B^j .

Un nombre positif δ étant fixé, soit φ une fonction test s'annulant pour $|\xi| \leq \delta$ et pour $|v| \geq \frac{1}{\delta}$. Puisque $f^j = f_A^j + f_B^j$ vérifie l'équation de Boltzmann pour un gaz à une composante, l'utilisation du terme de production d'entropie ([3]), entraîne que (f^j) , $(Q_j^-(f^j, f^j))$ et $(Q_j^+(f^j, f^j))$ sont faiblement compactes dans $L^1([-1, 1] \times \{v \in \mathbb{R}^3; |\xi| \geq \delta, |v| \leq \frac{1}{\delta}\})$. La compacité faible dans L^1 de (f_A^j) , (f_B^j) , $(Q_j^-(f_A^j, f^j))$, $(Q_j^+(f_A^j, f^j))$, $(Q_j^-(f_B^j, f^j))$ et $Q_j^+(f_B^j, f^j)$ provient des inégalités suivantes

$$\begin{aligned} 0 &\leq f_A^j \leq f^j, \quad 0 \leq f_B^j \leq f^j, \quad Q_j^-(f_A^j, f^j) \leq Q_j^-(f^j, f^j), \\ Q_j^+(f_A^j, f^j) &\leq Q_j^+(f^j, f^j), \quad Q_j^-(f_B^j, f^j) \leq Q_j^-(f^j, f^j), \\ Q_j^+(f_B^j, f^j) &\leq Q_j^+(f^j, f^j). \end{aligned}$$

On note par f_A et f_B les limites respectives dans L^1 de (f_A^j) et (f_B^j) , à une sous-suite près. On montre alors que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int [Q_j^-(f_A^j, f^j) - Q^-(f_A, f)] \varphi dx dv = 0. \quad (2.3.1)$$

On décompose $\int [Q_j^-(f_A^j, f^j) - Q^-(f_A, f)] \varphi dx dv$ selon

$$\int [Q_j^-(f_A^j, f^j) - Q^-(f_A, f)] \varphi dx dv = C_j + D_j + E_j + F_j,$$

avec

$$C_j = \int_{-1}^1 \int_{|\xi| > \delta} \int_{\lambda \geq |\xi_*| > \frac{1}{4}, \rho_* \leq \lambda} \left(f_A^j \varphi(x, v) \chi^j B_j(v - v_*, \omega) f^j(x, v_*) \right. \\ \left. - f_A \varphi(x, v) B(v - v_*, \omega) f(x, v_*) \right) dv_* d\omega dx dv.$$

$$D_j = \int_{-1}^1 \int_{|\xi| > \delta} \int_{|\xi_*| \geq \lambda, \rho_* \leq \lambda} \left((f_A^j \varphi)(x, v) \chi^j B_j(v - v_*, \omega) f^j(x, v_*) \right. \\ \left. - (f_A \varphi)(x, v) B(v - v_*, \omega) f(x, v_*) \right) dv_* d\omega dv dx.$$

$$E_j = \int_{-1}^1 \int_{|\xi| > \delta} \int_{|\xi_*| \leq \frac{1}{4}, \rho_* \leq \lambda} \left((f_A^j \varphi)(x, v) \chi^j B_j(v - v_*, \omega) f^j(x, v_*) \right. \\ \left. - (f_A \varphi)(x, v) B(v - v_*, \omega) f(x, v_*) \right) dv_* d\omega dv dx$$

$$F_j = \int_{-1}^1 \int_{|\xi| > \delta} \int_{\rho_* > \lambda} \left((f_A^j \varphi)(x, v) \chi^j B_j(v - v_*, \omega) f^j(x, v_*) \right. \\ \left. - (f_A \varphi)(x, v) B(v - v_*, \omega) f(x, v_*) \right) dv_* d\omega dv dx$$

Rappelons les quatre lemmes suivants dont la preuve figure dans ([5])

Lemme 2.3.1. *Il existe $c > 0$ et pour $\delta > 0$ une constante c_δ , telles que*

$$\int \xi^2 f^j(x, v) dv < c, \quad x \in (-1, 1), \\ \int_{|\xi| > \delta, |v| \leq \frac{1}{8}} |v|^2 f^j(x, v) dx dv < c_\delta.$$

Lemme 2.3.2.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{S \subset (-1,1); |S| \leq \varepsilon, j > \frac{1}{\varepsilon}} \int_{S \times \mathbb{R}^3} K_j(v) f^j(x,v) dx dv = 0,$$

où $K_j(v) = \min(\mu_j, (1 + |v|)^\beta)$.

Lemme 2.3.3. Soit $\eta > 0$. Il existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $j > j_0$ et en dehors d'un ensemble dépendant de j et de mesure inférieure à η ,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{\rho \geq \lambda} K_j(v) f^j(x,v) dv = 0,$$

uniformément par rapport aux variables x et j .

Lemme 2.3.4. Soit $\lambda > 0$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $j > j_0$ et en dehors d'un ensemble en x dépendant de j de mesure inférieure à ε ,

$$\int_{\rho \leq \lambda, |\xi| \leq \frac{1}{i}} K_j(v) f^j(x,v) dv$$

tend vers zéro lorsque $i \rightarrow +\infty$, uniformément par rapport à x et j .

Contrôle de C_j .

On considère le terme

$$\int_{-1}^1 \int_{|\xi| > \delta} f_A^j(x,v) \varphi(x,v) \int_{\lambda \geq |\xi_*| > \frac{1}{i}, \rho_* \leq \lambda} \chi^j B_j(v - v_*, \omega) f^j(x, v_*) dv_* d\omega dv dx$$

où λ et i seront choisis ultérieurement. Comme (f^j) et $(\xi \frac{\partial}{\partial x} f^j)$ sont faiblement compactes dans $L^1([-1,1] \times \{v_* \in \mathbb{R}_{v_*}^3; |\xi_*| \geq \delta, |v_*| \leq \frac{1}{\delta}\})$, que $(\chi^j B_j)$ est bornée sur l'ensemble $\{(v, v_*, \omega); |v| \leq \delta, |\xi_*| \leq \lambda, \rho_* \leq \lambda\}$ et qu'elle converge pp vers B , un lemme de moyenne entraîne que

$$\int_{\lambda \geq |\xi_*| > \frac{1}{i}, \rho_* \leq \lambda} \chi^j B_j(v - v_*, \omega) f^j(x, v_*) dv_* d\omega$$

tend vers

$$\int_{\lambda \geq |\xi_*| > \frac{1}{i}, \rho_* \leq \lambda} B(v - v_*, \omega) f(x, v_*) dv_* d\omega$$

dans $L^1((-1, 1) \times \{v \in \mathbb{R}_v^3; |\xi| \geq \delta, |v| \leq \frac{1}{\delta}\})$ lorsque j tend vers $+\infty$. De plus, $(\chi^j B_j)$ étant bornée sur les ensembles $\{\lambda \geq |\xi_*| > \frac{1}{i}\}$ et $\{\rho_* \leq \lambda\}$ et comme on intègre sur $\{|\xi_*| > \frac{1}{i}\}$, on a:

$$\begin{aligned} & \int_{\lambda \geq |\xi_*| > \frac{1}{i}, \rho_* \leq \lambda} \chi^j B_j(v - v_*, \omega) f^j(x, v_*) dv_* d\omega \\ & \leq \int_{\lambda \geq |\xi_*| > \frac{1}{i}, \rho_* \leq \lambda} f^j(x, v_*) dv_* d\omega \leq C(i). \end{aligned}$$

Les suites (f_A^j) et $(\xi \frac{\partial}{\partial x} f_A^j)$ étant faiblement compactes dans $L^1((-1, 1) \times \{v \in \mathbb{R}_v^3; |\xi| \geq \delta, |v| \leq \frac{1}{\delta}\})$, en utilisant une nouvelle fois un lemme de moyenne, on obtient que (C_j) tend vers 0.

Contrôle de D_j .

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Grâce à la fonction test, la variable v peut être supposée bornée. Donc, pour $|\xi_*| \geq \lambda$ et $\rho_* \leq \lambda$, $\chi^j B_j(v - v_*, \omega) \sim |\xi_*|^\beta$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} & \int_{|\xi_*| \geq \lambda, \rho_* \leq \lambda} \chi^j B_j(v - v_*, \omega) f^j(y, v_*) dv_* d\omega \\ & \leq \frac{c}{\lambda^{2-\beta}} \int_{\mathbb{R}_*^3 \times \mathbb{S}^2} |\xi_*|^2 f^j(x, v_*) dv_* d\omega. \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

D'après le lemme 2.3.1, l'intégrale du membre de droite de l'équation (2.3.2) peut être contrôlé indépendamment de j et de x . Donc, pour λ suffisamment grand, on obtient uniformément en j et en x ,

$$\int_{|\xi_*| \geq \lambda, \rho_* \leq \lambda} \chi^j B_j(v - v_*, \omega) f^j(x, v_*) dv_* d\omega \leq \varepsilon.$$

Donc, du fait de la troncature en la variable v ,

$$\int_{-1}^1 \int_{|\xi| > \delta} \int_{|\xi_*| \geq \lambda, \rho_* \leq \lambda} f_A^j \varphi(x, v) \chi^j B_j(v - v_*, \omega) f^j(x, v_*) dv_* d\omega dv dx < c\varepsilon.$$

D'où, pour λ suffisamment grand, $D_j \leq \varepsilon$ uniformément en x et j .
Contrôle de E_j et de F_j .

$$\int_{-1}^1 \int_{\mathbb{R}_v^3} f_A^j \varphi(x, v) \int_{\rho_* > \lambda} \chi^j B_j(v - v_*, \omega) f^j(x, v_*) dv_* d\omega dv dx$$

et

$$\int_{-1}^1 \int_{\mathbb{R}_v^3} f_A^j \varphi(x, v) \int_{\rho_* \leq \lambda, |\xi_*| \leq \frac{1}{i}} \chi^j B_j(v - v_*, \omega) f^j(x, v_*) dv_* d\omega dv dx,$$

d'après le lemme 2.3.2, il existe η tel que uniformément en j

$$\sup_{E \subset (-1, 1); |E| \leq \eta, j > \frac{1}{\eta}} \int_{E \times \mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} K_j(v_*) f^j(x, v_*) dx dv_* d\omega < \varepsilon.$$

E_η étant choisi, le lemme 2.3.4 entraîne, pour λ suffisamment grand, uniformément en dehors d'un E_η de mesure inférieure à η en x et en j , que

$$\int_{\rho_* > \lambda} K_j(v_*) f^j(x, v_*) dv_* d\omega < \varepsilon.$$

Ensuite, le lemme 2.3.3 entraîne, pour i suffisamment grand, uniformément en dehors d'un ensemble E'_η de mesure inférieure à η en x et en j ,

$$\int_{\rho_* \leq \lambda, |\xi_*| \leq \frac{1}{i}} K_j(v_*) f^j(x, v_*) dv_* d\omega < \varepsilon.$$

Pour les autres ensembles en x E'_η et E_η , le lemme 3.6.54 entraîne uniformément en j , que

$$\int_{E_\eta \times \mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}} K_j(v_*) f^j(x, v_*) dx dv_* d\omega < \varepsilon$$

et

$$\int_{E'_\eta \times \mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} K_j(v_*) f^j(x, v_*) dx dv_* d\omega < \varepsilon.$$

Finalement, on obtient uniformément en j , pour i et λ choisis précédemment,

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \int_{\mathbb{R}_v^3} (f_A^j \varphi)(x, v) \int_{\rho_* > \lambda} \chi^j B_j(v - v_*, \omega) f^j(x, v_*) dv_* d\omega dv dx \\ & + \int_{-1}^1 \int_{\mathbb{R}_v^3} (f_A^j \varphi)(x, v) \int_{\rho_* \leq \lambda, |\xi_*| \leq \frac{1}{i}} \chi^j B_j(v - v_*, \omega) \\ & \quad f^j(x, v_*) dv_* d\omega dv dx \leq c\varepsilon. \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Pour i et λ choisis précédemment, $E_j \leq \varepsilon$ et $F_j \leq \varepsilon$, uniformément en j . Finalement,

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{-1}^1 \int_{\mathbb{R}_v^3} (Q_j^-(f_A^j, f^j)\varphi)(x, v) dx dv = \int_{-1}^1 \int_{\mathbb{R}_v^3} (Q^-(f_A, f)\varphi)(x, v) dx dv.$$

Ensuite, en appliquant le changement de variable $(v, v_*, \omega) \mapsto (v', v'_*, -\omega)$ et en utilisant $\chi^j B_j(v - v_*, \omega)\varphi(x, v')$ à la place de $\chi^j B_j(v - v_*, \omega)$ comme précédemment, on obtient la même propriété sur le terme de gain,

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{-1}^1 \int_{\mathbb{R}_v^3} (Q_j^+(f_A^j, f^j)\varphi)(x, v) dx dv = \int_{-1}^1 \int_{\mathbb{R}_v^3} (Q^+(f_A, f)\varphi)(x, v) dx dv.$$

De manière analogue, le même résultat est démontré pour f_B . Il reste à passer à la limite dans les termes de bord (2.1.3). Il s'agit pour cela de montrer la convergence faible dans $L_{|\xi|}^1(\{v \in \mathbb{R}_v^3, \xi > 0\})$ (resp $L_{|\xi|}^1(\{v \in \mathbb{R}_v^3, \xi < 0\})$) de $f_B^j(1, \cdot)$ (resp. $f_B^j(-1, \cdot)$) vers $f_B(1, \cdot)$ (resp. $f_B(-1, \cdot)$). En premier lieu, les flux $\int_{\xi > 0} \xi f_B^j(1, v) dv$ et $\int_{\xi < 0} |\xi| f_B^j(-1, v) dv$ sont contrôlés de la manière suivante. D'après (2.2.28) écrite sous forme exponentielle, on obtient que

$$\begin{aligned} f_B^j(x, v) &\geq f_B^j(-1, v) e^{-\int_{-\frac{1+x}{\xi}}^0 \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}} \chi^j B^j f^j(x+s\xi, v_*) dv_* d\omega ds}, & \xi > \frac{1}{2}, |v| \leq 2, \\ f_B^j(x, v) &\geq f_B^j(1, v) e^{-\int_{\frac{1-x}{\xi}}^0 \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}} \chi^j B^j f^j(x+s\xi, v_*) dv_* d\omega ds}, & \xi < -\frac{1}{2}, |v| \leq 2. \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Rappelons que,

$$\nu^j(x, v) = \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^j B^j f^j(x, v_*) dv_* d\omega.$$

Donc, pour v vérifiant $|v| \leq 2$ et $|\xi| > \frac{1}{2}$, la suite

$$\left(\int_{-1}^1 \frac{\nu^j(z, v)}{|\xi|} dz \right)$$

est uniformément bornée. Donc, d'après les conditions de bord (2.1.3) et (2.3.4),

$$\begin{aligned} f_B^j(x,v) &\geq cM_-(v) \int_{\xi < 0} |\xi| f_B^j(-1,v) dv, \quad \xi > \frac{1}{2}, \quad |v| \leq 2, \\ f_B^j(x,v) &\geq cM_+(v) \int_{\xi > 0} \xi f_B^j(1,v) dv, \quad \xi < -\frac{1}{2}, \quad |v| \leq 2. \end{aligned}$$

D'où,

$$c \int_{\{|\xi| > \frac{1}{2}, |v| \leq 2\}} f_B^j(x,v) dx dv \geq \int_{\xi > 0} \xi f_B^j(1,v) dv + \int_{\xi < 0} |\xi| f_B^j(-1,v) dv.$$

La fonction f_B^j étant positive,

$$\begin{aligned} &c \int_{-1}^1 \int_{\mathbb{R}_v^3} \min(\mu, (1+|v|)^\beta) f_B^j(x,v) dx dv \\ &\geq \int_{\xi > 0} \xi f_B^j(1,v) dv + \int_{\xi < 0} |\xi| f_B^j(-1,v) dv. \end{aligned}$$

Étant donné que

$$\int_{-1}^1 \int_{\mathbb{R}_v^3} \min(\mu, (1+|v|)^\beta) f_B^j(x,v) dx dv = 1,$$

les flux $\int_{\xi > 0} \xi f_B^j(1,v) dv$ et $\int_{\xi < 0} |\xi| f_B^j(-1,v) dv$ sont bornés uniformément par rapport à la variable j .

De plus, les flux d'énergie de (f_j^B) sont contrôlés. En effet,

$$\begin{aligned} &\int_{\xi > 0} \xi v^2 f_B^j(1,v) dv + \int_{\xi < 0} |\xi| v^2 f_B^j(-1,v) dv \\ &\leq \int_{\xi > 0} \xi v^2 f^j(-1,v) dv + \int_{\xi < 0} |\xi| v^2 f^j(1,v) dv. \end{aligned}$$

Puis d'après les conditions de bord (2.2.29) et (2.2.28),

$$\begin{aligned} &\int_{\xi > 0} \xi v^2 f^j(1,v) dv + \int_{\xi < 0} |\xi| v^2 f^j(-1,v) dv \\ &= (k^j + \int_{\xi' < 0} |\xi'| f_B^j(-1,v') dv') \int_{\xi > 0} \xi v^2 M_-(v) dv \\ &\quad + (k^j + \int_{\xi' > 0} \xi' f_B^j(1,v') dv') \int_{\xi < 0} |\xi| v^2 M_+(v) dv. \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

Le membre de droite de l'équation (2.3.5) étant borné,

$$\int_{\xi>0} \xi v^2 f_B^j(1,v) dv + \int_{\xi<0} |\xi| v^2 f_B^j(-1,v) dv \leq c.$$

Finalement, les flux d'entropie de (f_j^B) sont contrôlés. En effet,

$f^j = f_A^j + f_B^j$ vérifie l'équation suivante:

$$\xi \frac{\partial}{\partial x} (f^j (\log(f^j) - 1)) = Q_j(f^j, f^j) \log(f^j). \quad (2.3.6)$$

En utilisant une formule de Green et une estimation d'entropie dans (2.3.6), on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\xi>0} \xi f_B^j(1,v) \log f_B^j(1,v) dv + \int_{\xi<0} |\xi| f_B^j(-1,v) \log f_B^j(-1,v) dv \\ \leq \left(\int_{\xi'>0} \xi' f_B^j(1,v') dv' + k^j \right) \\ \int_{\xi<0} |\xi| M_+(v) \log \left(M_+(v) \left(\int_{\xi'>0} \xi' f_B^j(1,v') dv' + k^j \right) \right) dv \\ + \left(\int_{\xi'<0} |\xi'| f_B^j(-1,v') dv' + k^j \right) \\ \int_{\xi>0} M_-(v) \log \left(M_-(v) \left(\int_{\xi'<0} |\xi'| f_B^j(-1,v') dv' + k^j \right) \right) dv, \end{aligned}$$

ce qui contrôle les flux d'entropie de (f_B^j) . On peut donc déduire du critère de Dunford-Pettis ([12]), que $(f_B^j(1, \cdot))$ est faiblement compacte dans $L^1_{|\xi|}(\{v \in \mathbb{R}_v^3, \xi > 0\})$. Soit l'une de ses sous-suites toujours notée $(f_B^j(1, \cdot))$, convergeant faiblement vers une fonction g_+ dans $L^1_{|\xi|}(\{v \in \mathbb{R}_v^3, \xi > 0\})$. Il reste à prouver que $g_+ = f_B(1, \cdot)$. On considère une fonction test φ s'annulant sur $\{|\xi| \leq \delta\} \cup \{|v| \geq \frac{1}{\delta}\}$ et vérifiant $\varphi(x, v) = \varphi_1(x) \varphi_2(v)$ avec $\varphi_1 = 1$ dans un voisinage de 1. Rappelons que la trace $f_B(1, v)$ peut être définie par

$$f_B(1, v) = \lim_{\varepsilon_0 \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^{\varepsilon_0} f_B(1 - \varepsilon, v) d\varepsilon \quad ([8]).$$

La suite (φf_B^j) vérifie l'équation

$$\xi \frac{\partial(\varphi f_B^j)}{\partial x} = \xi \frac{\partial \varphi}{\partial x} f_B^j + Q_j(f_B^j, f^j) \varphi. \quad (2.3.7)$$

En intégrant (2.3.7) sur $[1 - \varepsilon, 1] \times \mathbb{R}_v^3$ puis sur $[0, \varepsilon_0]$, on obtient

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}_v^3} \int_0^{\varepsilon_0} \xi(f_B^j(1, v) - f_B^j(1 - \varepsilon, v)) \varphi_2(v) dv d\varepsilon \right| \\ & \leq \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^{\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}_v^3} \int_{1-\varepsilon_0}^1 |Q_j(f_B^j, f^j)(x, v) \varphi(x, v)| dx dv d\varepsilon \\ & \quad + \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^{\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}_v^3} \int_{1-\varepsilon_0}^1 |f_B^j(x, v) \xi \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, v)| dx dv d\varepsilon. \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

Soit $\eta > 0$. Par compacité faible de (f_B^j) et $(Q_j(f_B^j, f^j))$ dans $L^1([-1, 1] \times \{v \in \mathbb{R}_v^3, |\xi| \geq \delta, |v| \leq \frac{1}{\delta}\})$, il existe $\tilde{\varepsilon}_0 > 0$ tel que pour $\varepsilon_0 < \tilde{\varepsilon}_0$, uniformément par rapport à j ,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_v^3} \int_{1-\varepsilon_0}^1 |Q_j(f_B^j, f^j)(x, v) \varphi(x, v)| dx dv < \frac{\eta}{2}, \\ & \int_{\mathbb{R}_v^3} \int_{1-\varepsilon_0}^1 |f_B^j(x, v) \xi \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, v)| dx dv < \frac{\eta}{2}. \end{aligned}$$

Donc, l'inégalité (2.3.8) entraîne, pour $\varepsilon_0 < \tilde{\varepsilon}_0$, uniformément par rapport à j ,

$$\left| \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}_v^3} \int_0^{\varepsilon_0} \xi(f_B^j(1, v) - f_B^j(1 - \varepsilon, v)) \varphi_2(v) d\varepsilon dv \right| \leq \eta. \quad (2.3.9)$$

Par compacité faible de f_B^j dans $L^1([-1, 1] \times \{v \in \mathbb{R}_v^3, |\xi| \geq \delta, |v| \leq \frac{1}{\delta}\})$,

$$\int_{\mathbb{R}_v^3} \int_0^{\varepsilon_0} \xi f_B^j(1 - \varepsilon, v) \varphi_2(v) dv d\varepsilon$$

converge vers

$$\int_{\mathbb{R}_v^3} \int_0^{\varepsilon_0} \xi f_B(1 - \varepsilon, v) \varphi_2(v) dv d\varepsilon$$

lorsque j tend vers l'infini. Le passage à la limite lorsque j tend vers l'infini dans l'inégalité (2.3.9), implique que

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \left| \int_{\mathbb{R}_v^3} \int_0^{\varepsilon_0} \xi(g_+(v) - f_B(1 - \varepsilon, v)) \varphi_2(v) dv d\varepsilon \right| \leq \eta.$$

On fait ensuite tendre ε_0 vers 0, d'où

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} \xi(g_+(v) - f_B(1,v))\varphi_2(v)dv \right| \leq \eta. \quad (2.3.10)$$

L'inégalité (2.3.10) étant vraie pour tout $\eta > 0$, g_+ et $f_B(1, \cdot)$ coïncident sur les ensembles $\{v \in \mathbb{R}_v^3, |\xi| \geq \delta, |v| \leq \frac{1}{\delta}\}$ pour tout $\delta > 0$ et donc *pp.* $f_B(-1, \cdot)$ vérifie le même résultat. Par conséquent, on peut passer à la limite dans les équations (2.2.28, 2.2.29). Ceci achève la preuve du théorème 2.1.1. \square

2.4 Quelques extensions

Le théorème 2.1.1 peut être généralisé à toute valeur positive de m_A et m_B .

Corollaire 2.4.1. *Soient $\beta \in [0, 2[$, $m_A > 0$ et $m_B > 0$. Alors, il existe une solution faible au problème stationnaire (2.1.1) pour les β -normes m_A et m_B .*

Preuve du corollaire 2.4.1.

Soit $m = m_A + m_B$. Dans la première partie de la preuve du théorème 2.1.1, on choisit λ vérifiant,

$$\lambda \geq \min(m_A \lambda_1, m_A \lambda_2, m_B \lambda_1, m_B \lambda_2),$$

où

$$\lambda_1 = \frac{1}{\int_{\xi > 0} M_-(v) \min(\mu, (1 + |v|)^\beta) e^{-\frac{2+m}{\xi}} dv}$$

et

$$\lambda_2 = \frac{1}{\int_{\xi < 0} M_+(v) \min(\mu, (1 + |v|)^\beta) e^{-\frac{2+m}{|\xi|}} dv}.$$

Dans la partie du point fixe, on considère le convexe fermé suivant

$$K = \{f \in L_+^1([-1, 1] \times \mathbb{R}^3); \int \min(\mu, (1 + |v|)^\beta) f(x, v) dx dv = m\}. \quad (2.4.1)$$

En raisonnant comme précédemment, il existe f_A et f_B solutions de l'équation (2.1.1) avec les masses respectives m_A et m_B . \square

En présence de plusieurs composantes de gaz de la composante A (resp. B), le corollaire 2.4.1 peut être généralisé.

On considère $(f_{A_1} \dots f_{A_{N_A}}, f_{B_1} \dots f_{B_{N_B}})$ avec f_{A_i} vérifiant

$$\begin{aligned} \xi \frac{\partial}{\partial x} f_{A_i} &= Q(f_{A_i}, f_{A_1}) + \dots + Q(f_{A_i}, f_{A_{N_A}}) \\ &\quad + Q(f_{A_i}, f_{B_1}) + \dots + Q(f_{A_i}, f_{B_{N_B}}), \quad (x, v) \in (-1, 1) \times \mathbb{R}_v^3, \\ f_{A_i}(-1, v) &= k_{A_i} M_-(v), \quad \xi > 0, \\ f_{A_i}(1, v) &= k_{A_i} M_+(v), \quad \xi < 0, \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

et f_{B_i} vérifiant

$$\begin{aligned} \xi \frac{\partial}{\partial x} f_{B_i} &= Q(f_{B_i}, f_{A_1}) + \dots + Q(f_{B_i}, f_{A_{N_A}}) \\ &\quad + Q(f_{B_i}, f_{B_1}) + \dots + Q(f_{B_i}, f_{B_{N_B}}), \quad (x, v) \in (-1, 1) \times \mathbb{R}_v^3, \\ f_{B_i}(-1, v) &= M_-(v) \int_{\xi' < 0} |\xi'| f_{B_i}(-1, v') dv' \quad , \quad \xi > 0, \\ f_{B_i}(1, v) &= M_+(v) \int_{\xi' > 0} \xi' f_{B_i}(1, v') dv' \quad , \quad \xi < 0. \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

Corollaire 2.4.2. Soient $\beta \in [0, 2[$ et $m_{A_1} \dots m_{A_{N_A}}, m_{B_1} \dots m_{B_{N_B}}$ des quantités positives. Alors, il existe des solutions faibles $f_{A_1} \dots f_{B_{N_B}}$ au problème stationnaire (2.4.2-2.4.3) avec les masses respectives $m_{A_1}, \dots, m_{B_{N_B}}$.

Preuve du Corollaire 2.4.2.

Soit $f = f_{A_1} + \dots + f_{A_N} + f_{B_1} + \dots + f_{B_N}$. L'opérateur de Boltzmann correspondant à la composante A_i est ([9])

$$\begin{aligned} Q(f_{A_i}, f) &= Q(f_{A_i}, f_{A_1}) + \dots + Q(f_{A_i}, f_{A_{N_A}}) \\ &\quad + Q(f_{A_i}, f_{B_1}) + \dots + Q(f_{A_i}, f_{B_{N_B}}). \end{aligned}$$

Pour l'étape du point fixe, on considère K défini comme dans (2.4.1) et l'application continue et compacte T de l'ensemble fermé et convexe $K \times [0, 1]^{N_B}$ dans lui-même définie par,

$$T : (f, \theta_1, \dots, \theta_{N_B}) \mapsto (f_{A_1} + \dots + f_{A_{N_A}} + f_{B_1} \dots f_{B_{N_B}}, \tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_{N_B}),$$

où

$$\tilde{\theta}_{N_i} = \frac{\int_{\xi < 0} |\xi| f_{B_{N_i}}(-1, v) dv}{\int_{\xi < 0} |\xi| f_{B_{N_i}}(-1, v) dv + \int_{\xi > 0} \xi f_{B_{N_i}}(1, v) dv}.$$

La preuve du corollaire s'achève alors avec les mêmes arguments que précédemment.

□

Remarque 3. *On pourrait envisager de résoudre un problème stationnaire pour un gaz à une composante avec des conditions au bord mixtes, à savoir*

$$\begin{aligned} \xi \frac{\partial}{\partial x} f(x,v) &= Q(f,f)(x,v) \\ f(-1,v) &= M_-(v) \int_{\xi < 0} |\xi| f(-1,v) dv M_-(v), \quad \xi > 0, \\ f(1,v) &= k M_-(v), \quad \xi < 0 \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Mais comme $\int_{\mathbb{R}^3} \xi f(x,v) dv$ est constant, k ne peut pas être arbitraire mais vaut

$$k = \int_{\xi > 0} |\xi| f(-1,v) dv.$$

On est donc ramené à un problème stationnaire avec conditions au bord de type réflexion diffuse.

Le théorème 2.1.1 peut également être généralisé au cas d'une combinaison convexe des conditions de bord du type (2.1.2) et (2.1.3),

$$\begin{aligned} \xi \frac{\partial}{\partial x} f &= Q(f,f), \quad (x,v) \in (-1,1) \times \mathbb{R}_v^3, \\ f(-1,v) &= a \left(\int_{\xi < 0} |\xi| f(-1,v) dv \right) M_-(v) + (1-a) k M_-(v), \quad \xi > 0, \\ f(1,v) &= a \left(\int_{\xi > 0} \xi f(1,v) dv \right) M_+(v) + (1-a) k M_+(v), \quad \xi < 0, \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

où a est donné dans $[0,1]$.

Corollaire 2.4.3. *Soient β avec $0 \leq \beta < 2$ et $M > 0$. Alors, il existe une solution faible au problème stationnaire (2.4.5) de β -norme M .*

Bibliographie

- [1] Aoki K. *The behaviour of a vapor-gas mixture in the continuum limit: Asymptotic analysis based on the Boltzmann equation*, in: T.J.' Bartel, M.A.Gallis(Eds), *Rarified Gas Dynamic*, AIP, Melville, 565-574, 2001.
- [2] Aoki K., Takata S. *Two-surface-problems of a multicomponent mixture of vapors and noncondensable gases in the continuum limit in the light of kinetic theory*, *Physics of fluids*, 11, 9, 2743-2756, 1999.
- [3] Aoki K., Takata S., Kosuge S. *Vapor flows caused by evaporation and condensation on two parallel plane surfaces: Effect of the presence of a noncondensable gas*, *Physics of Fluids*, 10, 6, 1519-1532, 1998.
- [4] Aoki K., Takata S., Taguchi S. *Vapor flows with evaporation and condensation in the continuum limit: effect of a trace of non condensable gas*, *European Journal of Mechanics B/Fluids*, 22 , 51-71, 2003.
- [5] Arkeryd L., Nouri A. *The stationary Boltzmann Equation in the Slab with Given Weighted Mass for Hard and Soft Forces*, *Ann.Scuola.Norm.Sup.Pisa*, 27, 533-536, 1998.
- [6] Arkeryd L., Nouri A. *L^1 solutions to the stationary Boltzmann equation in a slab*, *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 9, 375-413, 2000.
- [7] Arkeryd L., Maslova N. *On diffuse reflection at the boundary for the Boltzmann equation and related equations*, *Journ.Stat.Phys.*, 77, 1051-1077, 1994.
- [8] Arkeryd L., Heintz A. *On the solvability and asymptotics of the Boltzmann equation in irregular domains*, *Comm.Part.Diff.Eqs.*, 22, 2129-2152, 1997.
- [9] Cercignani C., Illner R., Pulvirenti M. *'The mathematical theory of dilute gases*, Springer, Berlin , 1994.
- [10] Cercignani C. *The Boltzmann equation and its applications*, Springer, Berlin , 1998.

- [11] Lions P.L. *Compactness in Boltzmann equation via Fourier integral operators and applications*, Journ.Math.Kyoto.Univ., 34, 391-427, 1994.
- [12] Mischler S. *On the weak-weak convergences and applications to the initial boundary value problem for kinetic equations* , Preprint .
- [13] Sone Y., Aoki K., Doi T. *Kinetic theory analysis of gas flows condensing on a plane condensed phase: Case of a mixture of a vapor and noncondensable gas*, Transport theory and statistical physics, 21, 4-6, 297-328, 1992.
- [14] Taguchi S., Aoki K., Takata S. *Vapor flows condensing at incidence onto a plane condensed phase in the presence of a noncondensable gas.I. Subsonic condensation*, Physics of Fluids, volume 15,number 3, 689-705, 2003.
- [15] Panferov V.A. *On the interior boundary-value problem for the stationary Povzner equation with hard and soft interaction*, Annali Sc. Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci, 5, à paraître.
- [16] Taguchi S., Aoki K., Takata S. *Vapor flows at incidence onto a plane condensed phase in the presence of a non condensable gas. II. Supersonic condensation*, Physics of Fluids 16, 79, 2004.

Chapitre 3

Effet fantôme pour un système d'équations cinétiques pour un gaz à deux composantes.

3.1 Introduction.

On considère dans ce chapitre un problème stationnaire d'évaporation-condensation qu'on résout à l'aide d'un développement asymptotique et d'un reste, qu'on contrôle lorsque le nombre de Knudsen est suffisamment proche de 0. L'ordre 0 du développement met en évidence deux situations remarquables par les équations fluides qu'elles entraînent: $u_{1,H0}$ identiquement nulle, et $u_{1,H0}$ ne s'annulant en aucun point, où $u_{1,H0}$ désigne la vitesse macroscopique de la somme des deux composantes. Dans ce chapitre, on se restreint au premier cas, où le système fluide obtenu à l'ordre 0 est de type Navier-Stokes. On montre qu'il est influencé par le terme d'ordre 1 du flot, $u_{1,H1}$. C'est que l'on appelle l'effet fantôme. On résout ce système fluide lorsque les données au bord sont assez proches l'une de l'autre. On contrôle enfin le terme reste rigoureusement.

3.2 Présentation du modèle.

On considère un mélange constitué de vapeur et d'un gaz non condensable dont on étudie le comportement stationnaire. La partie de l'espace occupée par le mélange est située entre deux phases de gaz condensé représentée par deux plans verticaux. On suppose que le modèle est homogène en espace

selon les directions y et z . On est donc ramené pour la variable d'espace x au segment $[-1,1]$. Les plans verticaux sont respectivement maintenus aux températures T_I et T_{II} . On note n_I (resp. n_{II}) la densité de saturation de la vapeur à la température T_I (resp T_{II}). La première composante du gaz, notée A est constituée de vapeur et peut se condenser sur chacune des deux parois, tandis que la seconde composante de gaz notée B ne peut se condenser sur aucune des deux parois. On suppose que les molécules des deux composantes de gaz sont mécaniquement identiques, c'est à dire de même masse et de même diamètre ([27]).

Les fonctions de distribution f^A et f^B des deux gaz sont solutions de l'équation de Boltzmann stationnaire ([9]):

$$\begin{aligned} \xi \frac{\partial}{\partial x} f^A(x,v) &= \frac{1}{\varepsilon} Q(f^A, f^A)(x,v) + \frac{1}{\varepsilon} Q(f^A, f^B)(x,v), \\ \xi \frac{\partial}{\partial x} f^B(x,v) &= \frac{1}{\varepsilon} Q(f^B, f^A)(x,v) + \frac{1}{\varepsilon} Q(f^B, f^B)(x,v), \\ & x \in [-1,1], \quad v \in \mathbb{R}^3, \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

avec

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{\pi}}{2} K_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{l}{2}, \quad (3.2.2)$$

et

$$l = \frac{1}{\sqrt{2\pi} d^2 n_I}.$$

l désigne le libre parcours moyen des molécules de vapeur à l'état d'équilibre à la température T_I et à la densité n_I et d correspond à leur diamètre.

L'opérateur de collision Q est défini par la formule suivante ([9]):

$$Q(f,g)(x,v) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} B(v - v_*, \omega) [f' g'_* - f g_*] d\omega dv_*,$$

avec

$$\begin{aligned} f_* &= f(x, v_*), \quad f' = f(x, v'), \quad f'_* = f(x, v'_*), \\ v' &= v - \langle v - v_*, \omega \rangle \omega, \quad v'_* = v_* + \langle v - v_*, \omega \rangle \omega. \end{aligned}$$

La variable de vitesse $v \in \mathbb{R}^3$ a pour coordonnées (ξ, η, χ) .

$\langle v - v_*, \omega \rangle$ désigne le produit scalaire euclidien dans \mathbb{R}^3 . $\omega \in \mathbb{S}^2$ est représenté

par θ et ϕ , angle polaire et azimutal pris avec l'axe polaire $v - v_*$.

La fonction $B(v - v_*, \omega)$ est le noyau de l'opérateur de collision Q . On se place dans une situation de sphère dure. La condition de bord pour la composante A est de type donnée rentrante

$$f^A(-1, v) = M_-(v), \quad \xi > 0, \quad (3.2.3)$$

$$f^A(1, v) = \frac{n_{II}}{n_I} M_+(v), \quad \xi < 0. \quad (3.2.4)$$

Les conditions de bord pour la composante B sont de type Maxwell diffuse,

$$f^B(-1, v) = M_-(v) \int_{\xi' < 0} |\xi'| f^B(-1, v') dv', \quad \xi > 0, \quad (3.2.5)$$

$$f^B(1, v) = M_+(v) \int_{\xi' > 0} |\xi'| f^B(1, v') dv', \quad \xi < 0, \quad (3.2.6)$$

où M_- et M_+ sont les fonctions maxwelliennes normalisées suivantes

$$M_-(v) = \frac{1}{\pi} \exp(-v^2) \quad \text{et} \quad M_+(v) = \frac{1}{\pi \left(\frac{T_{II}}{T_I}\right)^2} \exp\left(-\frac{v^2}{\frac{T_{II}}{T_I}}\right).$$

Remarque 4. La Maxwellienne M_+ est telle que $\int_{\xi < 0} |\xi| M_+ dv = 1$. Cette condition est équivalente pour B au fait que sur la paroi, le flux entrant est égal au flux sortant. La même remarque vaut pour M_- .

Remarque 5. $f^A + f^B$ satisfait l'équation de Boltzmann pour un gaz à une composante.

Cette dernière remarque repose sur l'hypothèse d'égalité des masses moléculaires m_A et m_B . Elle intervient de manière décisive pour l'obtention d'un théorème d'existence dans L^1 de solutions des systèmes précédents ([1]). L'analyse numérique d'un modèle *BGK* pour un gaz à deux composantes a été effectué dans ([23]).

Dans ce chapitre, on considère la limite hydrodynamique lorsque ε tend vers zéro dans (3.2.1). On décompose les fonctions de distribution des deux gaz en un développement asymptotique et un terme reste.

Numériquement, deux types de comportements ont été mis en évidence dans ([2], [1]). Dans la première situation, la vitesse macroscopique des deux gaz est nulle ([2], [29]). Cela signifie physiquement que l'évaporation et la condensation pour la composante A cessent. Cependant, le terme de Hilbert d'ordre 1 de la composante A conserve une influence à la limite dans le système hydrodynamique obtenu. C'est ce que l'on appelle l'effet fantôme.

Il a été mis en évidence pour le cas d'une composante de gaz dans ([24]) et pour le cas de deux composantes de gaz dans ([2], [29], [28]).

Dans le second cas, la composante B devient négligeable et s'accumule dans une fine couche située contre l'une des parois, appelée couche de Knudsen ([4], [21], [14]). Dans ce chapitre, on se restreindra au premier cas ($u_{1,H0} = 0$).

Le plan de ce chapitre est le suivant: le paragraphe 3.3 traite du développement asymptotique des solutions ainsi que des quantités macroscopiques. À la fin du paragraphe, on dérive un système fluide mêlant termes d'ordre 0 et terme d'ordre 1 et mettant en évidence l'effet fantôme. Le paragraphe 3.4 traite des conditions de bord que doivent satisfaire les densités f^A et f^B . Le paragraphe 3.5 étudie les termes d'ordre 2. Un système fluide du même type qu'au paragraphe 3.3 est établi. Le paragraphe 3.6 présente l'étude du terme reste qui est décomposé à la manière de ([14], [15]) en une partie en grande vitesse et une partie en petite vitesse. Les principaux résultats du chapitre sont aussi évoqués (proposition 3, théorème 3.6.1). Le paragraphe 3.7 est consacré au contrôle du terme reste. On contrôle dans un premier temps le terme reste d'un problème linéarisé, en norme L^2 à poids (proposition 4) et pour des normes L^∞ à poids (propositions 7, 8, 9, 3). Ensuite le terme reste est obtenu comme limite d'une suite de terme reste de problèmes linéarisés (théorème 3.7.1) et on en déduit le théorème 3.6.1.

3.3 Développement asymptotique.

3.3.1 Quantités macroscopiques

Pour toute fonction de distribution f , on définit les quantités macroscopiques n , u_1 , T et p par ([26]):

$$n = \int_{\mathbb{R}_v^3} f dv, \quad (3.3.1)$$

$$nu = \int_{\mathbb{R}_v^3} v f dv, \quad (3.3.2)$$

$$nu_1 = \int_{\mathbb{R}_v^3} \xi f dv, \quad (3.3.3)$$

$$Tn = \frac{2}{3} \int_{\mathbb{R}_v^3} ((\xi - u_{1,H0})^2 + \eta^2 + \chi^2) f dv, \quad (3.3.4)$$

$$p = \frac{2}{3} \int_{\mathbb{R}_v^3} ((\xi - u_{1,H0})^2 + \eta^2 + \chi^2) f dv. \quad (3.3.5)$$

3.3.2 Développement de Hilbert.

On développe les fonctions de distribution f^A et f^B en termes de Hilbert de la façon suivante:

$$\begin{aligned} f_H^A(x,v) &= f_{H0}^A(x,v) + \varepsilon f_{H1}^A(x,v) + \dots, \\ f_H^B(x,v) &= f_{H0}^B(x,v) + \varepsilon f_{H1}^B(x,v) + \dots. \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

En remplaçant f_H^A et f_H^B par les expressions données en (3.3.6) dans l'équation de départ (3.2.1), on obtient

$$\begin{aligned} \xi \frac{\partial}{\partial x} (f_{H0}^A + \varepsilon f_{H1}^A + \dots) &= \frac{1}{\varepsilon} Q(f_{H0}^A + \varepsilon f_{H1}^A + \dots, f_{H0}^A + \varepsilon f_{H1}^A + \dots) \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} Q(f_{H0}^A + \varepsilon f_{H1}^A + \dots, f_{H0}^B + \varepsilon f_{H1}^B + \dots) \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

$$\begin{aligned} \xi \frac{\partial}{\partial x} (f_{H0}^B + \varepsilon f_{H1}^B + \dots) &= \frac{1}{\varepsilon} Q(f_{H0}^B + \varepsilon f_{H1}^B + \dots, f_{H0}^A + \varepsilon f_{H1}^A + \dots) \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} Q(f_{H0}^B + \varepsilon f_{H1}^B + \dots, f_{H0}^B + \varepsilon f_{H1}^B + \dots). \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

Posons

$$f_H = f_H^A + f_H^B. \quad (3.3.9)$$

f_H vérifie alors la relation

$$\xi \frac{\partial}{\partial x} (f_{H0} + \varepsilon f_{H1} + \dots) = \frac{1}{\varepsilon} Q(f_{H0} + \varepsilon f_{H1} + \dots, f_{H0} + \varepsilon f_{H1} + \dots) \quad (3.3.10)$$

En utilisant le développement de Hilbert (3.3.6) pour f_H^A et f_H^B et en identifiant les ordres successifs des nombres de Knudsen, on obtient les relations suivantes sur les quantités macroscopiques définies dans le paragraphe précédent

$$\int_{\mathbb{R}_v^3} f_{Hm}^\alpha dv = n_{Hm}^\alpha \quad (m = 0, 1, \dots), \quad (3.3.11)$$

$$\int_{\mathbb{R}_v^3} \xi f_{H0} dv = n_{H0} u_{1,H0}, \quad (3.3.12)$$

$$\int_{\mathbb{R}_v^3} \xi f_{H0}^\alpha dv = n_{H0}^\alpha u_{1,H0}^\alpha, \quad (3.3.13)$$

$$\int_{\mathbb{R}_v^3} \xi^2 f_{H0}^\alpha dv = \frac{1}{2} (n_{H0}^\alpha T_{H0}^\alpha) \quad (3.3.14)$$

$$\int_{\mathbb{R}_v^3} v^2 f_{H0}^\alpha dv = n_{H0}^\alpha |u_{1,H0}^\alpha|^2 + \frac{3}{2} p_{H0}^\alpha, \quad (3.3.15)$$

$$\int_{\mathbb{R}_v^3} \xi f_{H1}^\alpha dv = n_{H0}^\alpha u_{1,H1}^\alpha + n_{H1}^\alpha u_{1,H0}^\alpha, \quad (3.3.16)$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_v^3} v^2 f_{H1}^\alpha dv &= \frac{3}{2} (n_{H0}^\alpha T_{H1}^\alpha + n_{H1}^\alpha T_{H0}^\alpha) \\ &+ 2n_{H0}^\alpha u_{1,H0}^\alpha u_{1,H1}^\alpha + 2n_{H0}^\alpha |u_{1,H0}^\alpha|^2. \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

3.3.3 Etude des termes d'ordre -1 .

En identifiant les termes d'ordre -1 dans les équations (3.3.7) et (3.3.8), on obtient

$$Q(f_{H0}^A, f_{H0}^A) + Q(f_{H0}^A, f_{H0}^B) = 0, \quad (3.3.18)$$

$$Q(f_{H0}^B, f_{H0}^A) + Q(f_{H0}^B, f_{H0}^B) = 0. \quad (3.3.19)$$

Donc,

Lemme 3.3.1. *Les solutions de (3.3.18) et (3.3.19) sont*

$$f_{H_0}^A(x, v) = \frac{n_{H_0}^A}{\pi^{\frac{3}{2}}(T_{H_0})^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{((\xi - u_{1, H_0})^2 + \eta^2 + \chi^2)}{T_{H_0}}\right), \quad (3.3.20)$$

$$f_{H_0}^B(x, v) = \frac{n_{H_0}^B}{\pi^{\frac{3}{2}}(T_{H_0})^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{((\xi - u_{1, H_0})^2 + \eta^2 + \chi^2)}{T_{H_0}}\right), \quad (3.3.21)$$

où $(n_{H_0}^A, n_{H_0}^B, T_{H_0} \text{ et } u_{1, H_0}) \in \mathbb{R}_+^{*3} \times \mathbb{R}$.

Preuve du lemme 3.3.1.

Comme dans ([2]), on multiplie (3.3.18) par $\ln(f_{H_0}^A)$ et (3.3.19) par $\ln(f_{H_0}^B)$, on intègre en vitesse et on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^3} Q(f_{H_0}^A, f_{H_0}^A) \ln(f_{H_0}^A) dv + \int_{\mathbb{R}^3} Q(f_{H_0}^A, f_{H_0}^B) \ln(f_{H_0}^A) dv = 0, \quad (3.3.22)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} Q(f_{H_0}^B, f_{H_0}^A) \ln(f_{H_0}^B) dv + \int_{\mathbb{R}^3} Q(f_{H_0}^B, f_{H_0}^B) \ln(f_{H_0}^B) dv = 0. \quad (3.3.23)$$

En effectuant successivement les changements de variable $v \mapsto v'$ et $v \mapsto v_*$, dans le premier terme du membre de gauche de l'équation (3.3.22),

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_v^3} Q(f_{H_0}^A, f_{H_0}^A) \ln(f_{H_0}^A) dv &= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \int_{\mathbb{R}_v^3} B(|v - v_*|, \langle v - v_*, \omega \rangle) \\ &\quad (f_{H_0}^A(x, v'_*) f_{H_0}^A(x, v') - f_{H_0}^A(x, v_*) f_{H_0}^A(x, v)) \\ &\quad \ln\left(\frac{f_{H_0}^A(x, v) f_{H_0}^A(x, v_*)}{f_{H_0}^A(x, v') f_{H_0}^A(x, v'_*)}\right) dv_* d\omega dv. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\int_{\mathbb{R}_v^3} Q(f_{H_0}^A, f_{H_0}^A) \ln(f_{H_0}^A) dv \leq 0.$$

De même,

$$\int_{\mathbb{R}_v^3} Q(f_{H_0}^B, f_{H_0}^B) \ln(f_{H_0}^B) dv \leq 0.$$

On obtient aussi

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}_v^3} Q(f_{H_0}^B, f_{H_0}^A) \ln(f_{H_0}^B) dv + \int_{\mathbb{R}_v^3} Q(f_{H_0}^A, f_{H_0}^B) \ln(f_{H_0}^A) dv \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \int_{\mathbb{R}_v^3} B(|v - v_*|, \langle v - v_*, \omega \rangle) (f_{H_0}^A(x, v'_*) f_{H_0}^B(x, v') \\
 &\quad - f_{H_0}^A(x, v_*) f_{H_0}^B(x, v)) \ln \left(\frac{f_{H_0}^B(x, v)}{f_{H_0}^B(x, v')} \right) dv_* d\omega dv \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \int_{\mathbb{R}_v^3} B(|v - v_*|, \langle v - v_*, \omega \rangle) (f_{H_0}^B(x, v'_*) f_{H_0}^A(x, v') \\
 &\quad - f_{H_0}^B(x, v_*) f_{H_0}^A(x, v)) \ln \left(\frac{f_{H_0}^A(x, v)}{f_{H_0}^A(x, v')} \right) dv_* d\omega dv.
 \end{aligned}$$

Dans le second terme du membre de droite, on effectue le changement de variable $v \mapsto v_*$ et on obtient

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}_v^3} Q(f_{H_0}^A, f_{H_0}^B) \ln(f_{H_0}^B) dv + \int_{\mathbb{R}_v^3} Q(f_{H_0}^B, f_{H_0}^A) \ln(f_{H_0}^A) dv \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \int_{\mathbb{R}_v^3} B(f_{H_0}^A(x, v'_*) f_{H_0}^B(x, v') - f_{H_0}^A(x, v_*) f_{H_0}^B(x, v)) \\
 &\quad \ln \left(\frac{f_{H_0}^A(x, v_*) f_{H_0}^B(x, v)}{f_{H_0}^A(x, v'_*) f_{H_0}^B(x, v')} \right) dv_* d\omega dv. \quad (3.3.24)
 \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\int_{\mathbb{R}_v^3} Q(f_{H_0}^A, f_{H_0}^B) \ln(f_{H_0}^B) dv + \int_{\mathbb{R}_v^3} Q(f_{H_0}^B, f_{H_0}^A) \ln(f_{H_0}^A) dv \leq 0.$$

En ajoutant membre à membre les équations (3.3.22) et (3.3.23), on obtient une somme nulle. Chacun des termes est donc nul. Donc,

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}_v^3} Q(f_{H_0}^A, f_{H_0}^A) \ln(f_{H_0}^A) dv = 0, \\
 & \int_{\mathbb{R}_v^3} Q(f_{H_0}^B, f_{H_0}^B) \ln(f_{H_0}^B) dv = 0.
 \end{aligned}$$

La relation (3.3.24) entraîne

$$f_{H_0}^A(x, v'_*) f_{H_0}^B(x, v') = f_{H_0}^A(x, v_*) f_{H_0}^B(x, v), \quad (v, v_*, \omega) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2.$$

Il s'ensuit que $f_{H_0}^A$ et $f_{H_0}^B$ sont des Maxwellienne ([9]), i.e. qu'il existe $(n_{H_0}^A, n_{H_0}^B, T_{H_0}, u_{H_0}^A$ et $u_{H_0}^B) \in \mathbb{R}_+^{*3} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ tel que

$$f_{H_0}^A(x, v) = \frac{n_{H_0}^A}{(\pi T_{H_0}^A)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{|v - u_{H_0}^A|^2}{T_{H_0}^A}\right), \quad (3.3.25)$$

$$f_{H_0}^B(x, v) = \frac{n_{H_0}^B}{(\pi T_{H_0}^B)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{|v - u_{H_0}^B|^2}{T_{H_0}^B}\right). \quad (3.3.26)$$

De plus, comme $n_{H_0}^A n_{H_0}^B \neq 0$,

$$\frac{|v'_* - u_{H_0}^A|^2}{T_{H_0}^A} + \frac{|v'_* - u_{H_0}^B|^2}{T_{H_0}^B} = \frac{|v_* - u_{H_0}^A|^2}{T_{H_0}^A} + \frac{|v - u_{H_0}^B|^2}{T_{H_0}^B}.$$

En choisissant $v = 0$ et $\omega = \frac{v_*}{|v_*|}$ puis $\omega = -\frac{v_*}{|v_*|}$ dans

$$\begin{cases} v' = v - \langle v - v_*, \omega \rangle \omega, \\ v'_* = v_* + \langle v - v_*, \omega \rangle \omega, \end{cases}$$

on obtient: $T_{H_0}^B = T_{H_0}^A$ et $u_{H_0}^B = u_{H_0}^A$. D'où, $u_{1,H_0}^B = u_{1,H_0}^A$ □

Remarque 6. Dans le cas où $n_{H_0}^B \equiv 0$, on est ramené à résoudre

$$Q(f_{H_0}^A, f_{H_0}^A) = 0.$$

Ce qui signifie que $f_{H_0}^A$ vérifie la formule (3.3.25).

3.3.4 Etude des termes d'ordre 0.

L'identification des termes d'ordre 0 dans l'équation (3.3.8) entraîne la relation suivante,

$$\xi \frac{\partial}{\partial x} f_{H_0}^B = Q(f_{H_1}^B, f_{H_0}^A) + Q(f_{H_0}^B, f_{H_1}^A) + Q(f_{H_1}^B, f_{H_0}^B) + Q(f_{H_0}^B, f_{H_1}^B).$$

En intégrant cette équation sur \mathbb{R}_v^3 , on obtient

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{\mathbb{R}_v^3} \xi f_{H_0}^B(x, v) dv = 0.$$

Or, les conditions de bord pour f^B étant de type réflexion Maxwellienne diffuse, le flux total en chaque point du bord est nul. D'où,

$$n_{H_0}^B(x) u_{1,H_0}^B(x) = 0, \quad x \in [-1, 1]. \quad (3.3.27)$$

Parmi toutes les situations représentées par (3.3.27), on considère les deux cas suivants:

$$u_{1,H0}^B \equiv 0 \text{ et } n_{H0}^B \neq 0 \quad (3.3.28)$$

et

$$n_{H0}^B \equiv 0 \text{ et } u_{1,H0}^A \neq 0. \quad (3.3.29)$$

Ces deux situations sont intéressantes au niveau des équations fluides qu'elles entraînent. Dans notre travail, on ne s'intéressera qu'au premier cas.

3.3.5 Equations fluides à l'ordre 0.

L'identification des termes d'ordre 0 dans l'équation (3.3.10) entraîne

$$\xi \frac{\partial}{\partial x} f_{H0} = Q(f_{H1}, f_{H0}) + Q(f_{H0}, f_{H1}), \quad (3.3.30)$$

On intègre alors par rapport à v sur \mathbb{R}_v^3 selon 1, ξ et v^2 . Les équations intégrées selon 1 et v^2 sont triviales et l'équation intégrée selon ξ entraîne, en tenant compte de ce que

$$\int_{\mathbb{R}_v^3} \xi^2 f_{H0} dv = \frac{1}{2} n_{H0} T_{H0},$$

que

$$\frac{\partial}{\partial x} (n_{H0} T_{H0}) = 0, \quad (3.3.31)$$

ou bien, en utilisant les relations entre les données macroscopiques

$$\frac{\partial}{\partial x} p_{H0} = 0. \quad (3.3.32)$$

Remarque 7. (3.3.32) correspond au système de Navier-Stokes incompressible stationnaire pour un champ de vitesse $u_{1,H0}$ nul.

3.3.6 Décomposition de f_{H1} .

f_{H1} se décompose en ses parties hydrodynamique et non hydrodynamique selon la formule:

$$f_{H1} = f_{H0} (c_0(x) + c_1(x)\xi + c_4(x)v^2 + \psi_{H1}), \quad (3.3.33)$$

avec ψ_{H1} satisfaisant les conditions d'orthogonalité suivantes:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}_v^3} f_{H0} \psi_{H1} dv &= 0, \\ \int_{\mathbb{R}_v^3} \xi f_{H0} \psi_{H1} dv &= 0, \\ \int_{\mathbb{R}_v^3} v^2 f_{H0} \psi_{H1} dv &= 0.\end{aligned}$$

Déterminons c_0 , c_1 et c_4 . Comme $u_{1,H0} = 0$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}_v^3} \xi f_{H1} dv &= n_{H0} u_{1,H1}, \\ \int_{\mathbb{R}_v^3} v^2 f_{H1} dv &= \frac{3}{2}(n_{H0} T_{H1} + n_{H1} T_{H0}).\end{aligned}$$

En multipliant successivement le second membre de l'équation (3.3.33) par 1, ξ et v^2 et en intégrant par rapport à v , on obtient les relations suivantes:

$$\begin{aligned}n_{H1} &= c_0 n_{H0} + \frac{3}{2} c_4 n_{H0} T_{H0}, \\ n_{H0} u_{1,H1} &= \frac{1}{2} c_1 n_{H0} T_{H0}, \\ n_{H0} T_{H1} + n_{H1} T_{H0} &= c_0 n_{H0} T_{H0} + \frac{5}{2} c_4 n_{H0} T_{H0}^2.\end{aligned}$$

Les coefficients c_0 , c_1 et c_4 vérifient donc les relations suivantes:

$$\begin{aligned}c_0 &= \frac{n_{H1}}{n_{H0}} - \frac{3 T_{H1}}{2 T_{H0}}, \\ c_1 &= \frac{2 u_{1,H1}}{T_{H0}}, \\ c_4 &= \frac{1}{T_{H0}} \frac{T_{H1}}{T_{H0}}.\end{aligned}$$

D'où

$$f_{H1} = f_{H0} \left(\frac{n_{H1}}{n_{H0}} + \frac{2 u_{1,H1}}{T_{H0}} \xi + \left(\frac{v^2}{T_{H0}} - \frac{3}{2} \right) \frac{T_{H1}}{T_{H0}} + \psi_{H1} \right).$$

Il reste maintenant à déterminer la composante orthogonale $f_{H0}\psi_{H1}$ de f_{H1} .
En substituant f_{H1} par l'expression précédente dans (3.3.30),

$$\begin{aligned} \xi \frac{\partial}{\partial x} f_{H0} &= Q \left(f_{H0} \left(\frac{n_{H1}}{n_{H0}} + \frac{2u_{1,H1}}{T_{H0}} \xi + \left(\frac{v^2}{T_{H0}} - \frac{3}{2} \right) \frac{T_{H1}}{T_{H0}} + \psi_{H1} \right), f_{H0} \right) \\ &+ Q \left(f_{H0}, f_{H0} \left(\frac{n_{H1}}{n_{H0}} + \frac{2u_{1,H1}}{T_{H0}} \xi + \left(\frac{v^2}{T_{H0}} - \frac{3}{2} \right) \frac{T_{H1}}{T_{H0}} + \psi_{H1} \right) \right). \end{aligned}$$

Le noyau de l'application linéaire

$$L : \phi \mapsto Q(f_{H0}, f_{H0}\phi) + Q(f_{H0}\phi, f_{H0})$$

étant de la forme

$$\ker L = \{\alpha + \beta\xi + \gamma v^2\},$$

l'équation précédente se simplifie en

$$\xi \frac{\partial}{\partial x} f_{H0} = Q(f_{H0}, f_{H0}\psi_{H1}) + Q(f_{H0}\psi_{H1}, f_{H0}), \quad (3.3.34)$$

Or, d'après l'expression de f_{H0} ,

$$\begin{aligned} \xi \frac{\partial}{\partial x} f_{H0} &= \frac{\xi}{\pi^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\frac{\partial}{\partial x}(n_{H0})T_{H0}^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}T_{H0}T_{H0}^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x}(T_{H0})n_{H0}}{T_{H0}^3} \right. \\ &\left. + \frac{v^2}{T_{H0}^2} \frac{\partial}{\partial x}(T_{H0}) \frac{n_{H0}}{T_{H0}^{\frac{3}{2}}} \right) \exp\left(-\frac{v^2}{T_{H0}}\right). \end{aligned}$$

D'après l'équation (3.3.31),

$$\frac{\partial}{\partial x}(n_{H0})T_{H0} = -\frac{\partial}{\partial x}(T_{H0})n_{H0}.$$

Donc,

$$\xi \frac{\partial}{\partial x} f_{H0} = \xi \left(\frac{v^2}{T_{H0}} - \frac{5}{2} \right) \frac{n_{H0}}{\pi^{\frac{3}{2}} T_{H0}^{\frac{5}{2}}} \frac{\partial}{\partial x} T_{H0} \exp\left(-\frac{v^2}{T_{H0}}\right).$$

D'où,

$$\xi \frac{\partial}{\partial x} f_{H0} = \left(\xi \left(\frac{v^2}{T_{H0}} - \frac{5}{2} \right) \frac{1}{T_{H0}} \frac{\partial}{\partial x} T_{H0} \right) f_{H0}.$$

De plus,

$$\begin{aligned}
& Q(f_{H_0}, f_{H_0}\psi_{H_1}) + Q(f_{H_0}\psi_{H_1}, f_{H_0}) = \\
& \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} B(|v_* - v|, \langle v_* - v, \omega \rangle) f_{H_0}(x, v) f_{H_0}(x, v_*) \\
& (\psi_{H_1}(x, v') + \psi_{H_1}(x, v'_*) - \psi_{H_1}(x, v) - \psi_{H_1}(x, v_*)) d\omega dv_* \\
& = \frac{n_{H_0}^2}{T_{H_0}^3 \pi^3} \exp\left(-\frac{v^2}{T_{H_0}}\right) \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} B \exp\left(-\frac{v_*^2}{T_{H_0}}\right) \\
& (\psi_{H_1}(x, v') + \psi_{H_1}(x, v'_*) - \psi_{H_1}(x, v) - \psi_{H_1}(x, v_*)) d\omega dv_*. \quad (3.3.35)
\end{aligned}$$

On pose alors

$$\tilde{\xi} = \frac{\xi}{\sqrt{T_{H_0}}}, \quad \tilde{v} = \frac{v}{\sqrt{T_{H_0}}}$$

et

$$E(\tilde{v}) = \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}} \exp(-\tilde{v}^2).$$

La relation (3.3.35), devient donc

$$\begin{aligned}
Q(f_{H_0}, f_{H_0}\psi_{H_1}) + Q(f_{H_0}\psi_{H_1}, f_{H_0}) &= \frac{n_{H_0}^2}{T_{H_0}} E(\tilde{v}) \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} E(\tilde{v}_*) \\
& (\psi_{H_1}(x, v') + \psi_{H_1}(x, v'_*) - \psi_{H_1}(x, v) - \psi_{H_1}(x, v_*)) \\
& \frac{B(|\tilde{v}_* - \tilde{v}| \sqrt{T_{H_0}}, \langle \tilde{v}_* - \tilde{v}, \omega \rangle \sqrt{T_{H_0}})}{\sqrt{T_{H_0}}} d\omega d\tilde{v}_*,
\end{aligned}$$

soit

$$Q(f_{H_0}, f_{H_0}\psi_{H_1}) + Q(f_{H_0}\psi_{H_1}, f_{H_0}) = \frac{n_{H_0}^2}{T_{H_0}} E(\tilde{v}) \mathcal{L}_{T_{H_0}}(\varphi(\tilde{v}))$$

où

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{T_{H_0}}(\psi_{H_1}(\tilde{v})) &:= \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} E(\tilde{v}_*) \left(\psi_{H_1}(x, v') + \psi_{H_1}(x, v'_*) - \psi_{H_1}(x, v) \right. \\
& \left. - \psi_{H_1}(x, v_*) \right) \frac{B(|\tilde{v}_* - \tilde{v}| \sqrt{T_{H_0}}, \langle \tilde{v}_* - \tilde{v}, \omega \rangle \sqrt{T_{H_0}})}{\sqrt{T_{H_0}}} d\omega d\tilde{v}_*.
\end{aligned}$$

Donc (3.3.34) s'écrit

$$\mathcal{L}_{T_{H_0}}(\psi_{H_1}(\tilde{v})) = \tilde{\xi}(\tilde{v}^2 - \frac{5}{2}) \frac{1}{p_{H_0}} \frac{\partial}{\partial x} T_{H_0}. \quad (3.3.36)$$

Soit $\xi A(|v|)$ la solution de

$$\mathcal{L}_{T_{H_0}}(\tilde{\xi}A(|\tilde{v}|)) = -\tilde{\xi}(\tilde{v}^2 - \frac{5}{2}), \quad \int_0^{+\infty} r^4 A(r)E(r)dr = 0. \quad (3.3.37)$$

définie par exemple dans ([13],[22]).

Remarque 8. La seconde condition de (3.3.37) s'explique par la recherche de $\tilde{\xi}A(|\tilde{v}|)$ dans $(\ker(\mathcal{L}_{T_{H_0}}))^\perp$, ie

$$\int_{\mathbb{R}^3} \xi A(|v|)E(v)dv = 0, \quad (3.3.38)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \xi^2 A(|v|)E(v)dv = 0, \quad (3.3.39)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} v^2 \xi A(|v|)E(v)dv = 0. \quad (3.3.40)$$

Or, par raison d'imparité, les équations (3.3.38) et (3.3.40) sont automatiquement satisfaites et par passage en coordonnées sphériques dans l'équation (3.3.39), on obtient cette deuxième condition.

La partie non hydrodynamique $f_{H_0}\psi_{H_1}$ de f_{H_0} est alors donnée par l'expression,

$$\psi_{H_1}(\tilde{v}) = \frac{-\tilde{\xi}A(|\tilde{v}|)}{p_{H_0}} \frac{\partial}{\partial x} T_{H_0}.$$

Donc, f_{H_1} s'écrit:

$$f_{H_1} = \left(\frac{n_{H_1}}{n_{H_0}} + \frac{2u_{1,H_1}}{T_{H_0}}\xi + \left(\frac{v^2}{T_{H_0}} - \frac{3}{2}\right)\frac{T_{H_1}}{T_{H_0}} - \frac{\tilde{\xi}A(|\tilde{v}|)}{p_{H_0}} \frac{\partial}{\partial x} T_{H_0} \right) f_{H_0}. \quad (3.3.41)$$

3.3.7 Décomposition de $f_{H_1}^A$ et de $f_{H_1}^B$.

Par identification des termes d'ordre 0 dans les équations (3.3.7) et (3.3.8), $f_{H_0}^A$ et $f_{H_0}^B$ vérifient respectivement les équations suivantes:

$$\xi \frac{\partial}{\partial x} f_{H_0}^A = Q(f_{H_0}^A, f_{H_1}) + Q(f_{H_1}^A, f_{H_0}) \quad (3.3.42)$$

et

$$\xi \frac{\partial}{\partial x} f_{H_0}^B = Q(f_{H_0}^B, f_{H_1}) + Q(f_{H_1}^B, f_{H_0}). \quad (3.3.43)$$

D'après ([2]), l'application

$$\lambda : (\phi_A, \phi_B) \mapsto (Q(f_{H_0}^A, \phi f_{H_0}) + Q(\phi_A f_{H_0}^A, f_{H_0}), Q(f_{H_0}^B, \phi f_{H_0}) + Q(\phi_B f_{H_0}^B, f_{H_0})) \quad (3.3.44)$$

admet pour noyau

$$\ker \lambda = \{(\alpha^A + \beta\xi + \gamma v^2, \alpha^B + \beta\xi + \gamma v^2), (\alpha^A, \alpha^B, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}^2\}.$$

On décompose les fonctions de distribution inconnues $f_{H_1}^A$ et $f_{H_1}^B$ en leurs parties hydrodynamiques et non hydrodynamiques de la manière particulière suivante:

$$f_{H_1}^A = f_{H_0}^A \left(\frac{p_{H_1}^A}{p_{H_0}^A} + 2\xi \frac{u_{1,H_1}}{T_{H_0}} + \left(\frac{v^2}{T_{H_0}} - \frac{5}{2} \right) \frac{T_{H_1}}{T_{H_0}} - \frac{\tilde{\xi} A(|\tilde{v}|)}{p_{H_0}} \frac{\partial}{\partial x} T_{H_0} + \Psi_A \right) \quad (3.3.45)$$

et

$$f_{H_1}^B = f_{H_0}^B \left(\frac{p_{H_1}^B}{p_{H_0}^B} + 2\xi \frac{u_{1,H_1}}{T_{H_0}} + \left(\frac{v^2}{T_{H_0}} - \frac{5}{2} \right) \frac{T_{H_1}}{T_{H_0}} - \frac{\tilde{\xi} A(|\tilde{v}|)}{p_{H_0}} \frac{\partial}{\partial x} T_{H_0} + \Psi_B \right), \quad (3.3.46)$$

où $(\Psi_A; \Psi_B) \in (Ker \lambda)^\perp$.

Comme $p_{H_0}^A = n_{H_0}^A T_{H_0}$ et $\tilde{\xi} = \frac{\xi}{\sqrt{T_{H_0}}}$, le premier membre de l'équation (3.3.42) s'écrit

$$\xi \frac{\partial}{\partial x} f_{H_0}^A = \left(\frac{\partial}{\partial x} p_{H_0}^A \frac{\tilde{\xi}}{T_{H_0}^2} + \frac{\partial}{\partial x} T_{H_0} \tilde{\xi} \left(\tilde{v}^2 - \frac{5}{2} \right) \frac{n_{H_0}^A}{T_{H_0}^2} \right) E(\tilde{v}).$$

En reportant (3.3.41) et (3.3.46) dans (3.3.42), elle s'écrit

$$\begin{aligned}
Q(f_{H0}^A, f_{H1}) + Q(f_{H1}^A, f_{H0}) &= Q(f_{H0}^A, -\tilde{\xi}A(|\tilde{v}|)f_{H0}) + Q(-\tilde{\xi}A(|\tilde{v}|)f_{H0}^A, f_{H0}) \\
&+ Q(f_{H0}^A \Psi, f_{H0}). \\
&= \frac{n_{H0}n_{H0}^A}{T_{H0}^3} [Q(E(\tilde{v}), -\tilde{\xi}A(|\tilde{v}|)E(\tilde{v})) \\
&+ Q(-\tilde{\xi}A(|\tilde{v}|)E(\tilde{v}), E(\tilde{v}))] \\
&+ \frac{n_{H0}n_{H0}^A}{T_{H0}^3} Q(E(\tilde{v})\Psi, E(\tilde{v})) \\
&= \frac{n_{H0}n_{H0}^A}{p_{H0}T_{H0}} \mathcal{L}_{T_{H0}}(-\tilde{\xi}A(|\tilde{v}|)) \\
&+ \frac{n_{H0}n_{H0}^A}{T_{H0}} Q(E(\tilde{v})\Psi, E(\tilde{v})).
\end{aligned}$$

D'après (3.3.36)

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial x} p_{H0}^A \frac{\tilde{\xi}}{T_{H0}^2} + \frac{\partial}{\partial x} T_{H0} \tilde{\xi} (\tilde{v}^2 - \frac{5}{2}) \frac{n_{H0}^A}{T_{H0}^2} \right) E(\tilde{v}) &= \frac{n_{H0}n_{H0}^A}{p_{H0}T_{H0}} \tilde{\xi} (\tilde{v}^2 - \frac{5}{2}) \frac{\partial}{\partial x} T_{H0} \\
&+ \frac{n_{H0}n_{H0}^A}{T_{H0}} Q(E(\tilde{v})\psi_A, E(\tilde{v})),
\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{n_{H0}n_{H0}^A}{T_{H0}} Q(E(\tilde{v})\psi_A, E(\tilde{v})) = \frac{\partial}{\partial x} p_{H0}^A \frac{\tilde{\xi}}{T_{H0}^2} E(\tilde{v}).$$

Soit, C une solution de ([27], [30])

$$Q(E(\tilde{v})\tilde{\xi}C(\tilde{v}), E(\tilde{v})) = -\tilde{\xi}E(\tilde{v}).$$

Alors,

$$\psi_A(\tilde{v}) = -\frac{\tilde{\xi}C(|\tilde{v}|)}{n_{H0}p_{H0}^A} \frac{\partial}{\partial x} p_{H0}^A.$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
f_{H1}^A &= f_{H0}^A \left(\frac{p_{H1}^A}{p_{H0}^A} + 2\xi \frac{u_{1,H1}}{T_{H0}} + \left(\frac{v^2}{T_{H0}} - \frac{5}{2} \right) \frac{T_{H1}}{T_{H0}} - \frac{\tilde{\xi}A(|\tilde{v}|)}{p_{H0}} \frac{\partial}{\partial x} T_{H0} \right. \\
&\left. - \frac{\tilde{\xi}C(\tilde{v})}{n_{H0}p_{H0}^A} \frac{\partial}{\partial x} p_{H0}^A \right)
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} f_{H1}^A &= f_{H0}^A \left(\frac{n_{H1}^A}{n_{H0}^A} + 2\xi \frac{u_{1,H1}}{T_{H0}} + \left(\frac{v^2}{T_{H0}} - \frac{3}{2} \right) \frac{T_{H1}}{T_{H0}} - \frac{\tilde{\xi}A(|\tilde{v}|)}{p_{H0}} \frac{\partial}{\partial x} T_{H0} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\tilde{\xi}C(\tilde{v})}{n_{H0}p_{H0}^A} \frac{\partial}{\partial x} p_{H0}^A \right). \end{aligned} \quad (3.3.47)$$

Un raisonnement analogue pour la composante B implique que f_{H1}^B peut s'écrire de la manière suivante

$$\begin{aligned} f_{H1}^B &= f_{H0}^B \left(\frac{p_{H1}^B}{p_{H0}^B} + 2\xi \frac{u_{1,H1}}{T_{H0}} + \left(\frac{v^2}{T_{H0}} - \frac{5}{2} \right) \frac{T_{H1}}{T_{H0}} - \frac{\tilde{\xi}A(|\tilde{v}|)}{p_{H0}} \frac{\partial}{\partial x} T_{H0} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\tilde{\xi}C(\tilde{v})}{n_{H0}p_{H0}^B} \frac{\partial}{\partial x} p_{H0}^B \right). \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} f_{H1}^B &= f_{H0}^B \left(\frac{n_{H1}^B}{n_{H0}^B} + 2\xi \frac{u_{1,H1}}{T_{H0}} + \left(\frac{v^2}{T_{H0}} - \frac{3}{2} \right) \frac{T_{H1}}{T_{H0}} - \frac{\tilde{\xi}A(|\tilde{v}|)}{p_{H0}} \frac{\partial}{\partial x} T_{H0} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\tilde{\xi}C(\tilde{v})}{n_{H0}p_{H0}^B} \frac{\partial}{\partial x} p_{H0}^B \right). \end{aligned} \quad (3.3.48)$$

3.3.8 Equations fluides à l'ordre 1.

En considérant les termes d'ordre 1 et en intégrant (3.3.10) selon 1, ξ et v^2 sur \mathbb{R}_v^3 , on obtient le système:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{\mathbb{R}_v^3} \xi f_{H1} dv \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{\mathbb{R}_v^3} \xi^2 f_{H1} dv \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{\mathbb{R}_v^3} \xi v^2 f_{H1} dv \right) &= 0. \end{aligned}$$

La première équation s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{\mathbb{R}_v^3} \xi^2 f_{H0} dv \frac{u_{1,H1}}{T_{H0}} \right) = 0.$$

Ce qui entraîne d'après la relation (3.3.14),

$$\frac{\partial}{\partial x}(n_{H0}u_{1,H1}) = 0.$$

La troisième équation s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{\mathbb{R}_v^3} \xi^2 v^2 f_{H0} dv \frac{2u_{1,H1}}{T_{H0}} \right) \\ - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{p_{H0}} \frac{\partial}{\partial x} T_{H0} \frac{n_{H0}}{T_{H0}^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}_v^3} \tilde{\xi} \xi v^2 A(|\tilde{v}|) E(\tilde{v}) dv \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.3.49)$$

Or,

$$\int_{\mathbb{R}_v^3} \xi^2 v^2 f_{H0} dv = \frac{5}{4} p_{H0} T_{H0}.$$

Donc

$$\frac{5}{4} \frac{\partial}{\partial x} (p_{H0} u_{1,H1}) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} (T_{H0}) T_{H0}^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}_v^3} \tilde{\xi}^2 \tilde{v}^2 A(|\tilde{v}|) E(|\tilde{v}|) d\tilde{v} \right).$$

Par passage en coordonnées sphériques,

$$\int_{\mathbb{R}_v^3} \tilde{\xi}^2 \tilde{v}^2 A(\tilde{v}) E(\tilde{v}) d\tilde{v} = \frac{4}{3\pi^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}_+} r^6 A(r) \exp(-r^2) dr.$$

et en posant

$$\gamma_2 = \frac{16}{15\pi^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}_+} r^6 A(r) \exp(-r^2) dr,$$

(3.3.49) s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial x} (p_{H0} u_{1,H1}) = \frac{\gamma_2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} (T_{H0}) T_{H0}^{\frac{1}{2}} \right).$$

Or, comme $p_{H0} = T_{H0} n_{H0}$ et que $u_{1,H1} n_{H0}$ est constante sur $[-1,1]$,

$$n_{H0} u_{1,H1} \frac{\partial}{\partial x} T_{H0} = \frac{\gamma_2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} (T_{H0}) T_{H0}^{\frac{1}{2}} \right). \quad (3.3.50)$$

Remarque 9. Pour le cas des sphères dures, on a $\gamma_2 \approx 1.922284066$ ([22]).

Montrons maintenant que

$$u_{1,H1} = -\gamma_c \frac{\sqrt{T_{H0}}}{p_{H0}^B n_{H0}} \frac{\partial}{\partial x} p_{H0}^A, \quad (3.3.51)$$

où γ_c est une constante qui sera définie ultérieurement par la formule (3.3.53). L'intégration de (3.3.47) sur \mathbb{R}_v^3 selon ξ et le fait que $u_{1,H1}^B \equiv 0$, entraînent

$$u_{1,H1} = - \left(\int_{\mathbb{R}_v^3} E(\tilde{v}) \tilde{\xi}^2 C(\tilde{v}) d\tilde{v} \right) \frac{\sqrt{T_{H0}}}{p_{H0}^B n_{H0}} \frac{\partial}{\partial x} p_{H0}^A. \quad (3.3.52)$$

Par passage en coordonnées sphériques, l'équation (3.3.52) devient

$$u_{1,H1} = -\frac{4}{3} \frac{\sqrt{T_{H0}}}{p_{H0}^B n_{H0}^B} \frac{\partial}{\partial x} p_{H0}^A \int_{\mathbb{R}_+} C(r) r^4 \exp(-r^2) dr.$$

Soit, en posant

$$\gamma_c = \frac{4}{3} \int_{\mathbb{R}_+} C(r) r^4 \exp(-r^2) dr \quad (3.3.53)$$

dans la relation précédente, on obtient l'expression (3.3.51). D'où, le système suivant

$$\frac{\partial}{\partial x} p_{H0} = 0, \quad (3.3.54)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (n_{H0} u_{1,H1}) = 0, \quad (3.3.55)$$

$$\frac{\gamma_2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} (T_{H0}) T_{H0}^{\frac{1}{2}} \right) = -n_{H0} u_{1,H1} \frac{\partial}{\partial x} T_{H0}, \quad (3.3.56)$$

$$u_{1,H1} = -\gamma_c \frac{T_{H0}^{\frac{1}{2}}}{p_{H0}^B n_{H0}} \frac{\partial}{\partial x} p_{H0}^A, \quad (3.3.57)$$

$$u_{1,H1}^B = 0, \quad (3.3.58)$$

où $p_{H0} = n_{H0} T_{H0}$, $p_{H0}^A = n_{H0}^A T_{H0}$ et $p_{H0}^B = n_{H0}^B T_{H0}$.

Remarque 10. Lorsque le nombre de Knudsen tend vers 0, le flot $u_{1,H}$ tend également vers 0 ($u_{H0} = 0$). On s'attend alors au niveau de la mécanique

des fluides à ce que la température T_{H0} satisfasse la loi de Fourier, i.e à ce que le second membre de l'équation (3.3.56) soit nul. Ce n'est pas le cas, puisque le second membre de (3.3.56) est

$$n_{H0}u_{1,H1}\frac{\partial}{\partial x}(T_{H0}) = -\gamma_c \frac{T_{H0}^{\frac{1}{2}}}{p_{H0}^B} \frac{\partial}{\partial x} p_{H0}^A \frac{\partial}{\partial x}(T_{H0}) \neq 0.$$

Ceci signifie que le flot $u_{1,H}$ garde une influence sur la température à la limite. Cela met donc en évidence l'effet fantôme comme défini dans ([24], [8]).

3.4 Satisfaction des conditions de bord.

3.4.1 Fermeture du système à l'ordre 0.

On se restreint à des conditions aux limites pour f^A données par

$$f^A(-1,v) = M_-(v), \quad f^A(1,v) = M_+(v),$$

où $\frac{n_{II}}{n_I} = 1 + \tau$ avec τ suffisamment petit à déterminer. On impose aussi la contrainte suivante sur la masse de la composante B ,

$$\int_{-1}^1 n_{H0}^B dx = m.$$

Pour que f_{H0}^A vérifie les bonnes conditions de bord, il faut et il suffit de choisir pour la composante A , $n_{H0}^A(-1) = 1$, $n_{H0}^A(1) = \frac{n_{II}}{n_I}$, $T_{H0}^A(-1) = 1$ et $T_{H0}^A(1) = \frac{T_{II}}{T_I}$.

Pour f_{H0}^B , étant donné que

$$\int_{\xi < 0} \frac{1}{(\pi T_{H0}(-1))^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{v^2}{T_{H0}(-1)}\right) dv = 1,$$

on a pour $\xi > 0$,

$$\left(\int_{\xi < 0} |\xi| f_{H0}^B(-1,v) dv \right) \exp\left(-\frac{v^2}{T_{H0}(-1)}\right) = f_{H0}^B(-1,v).$$

Le même résultat étant aussi satisfait en 1, f_{H0}^B vérifie bien des conditions de bord de type Maxwell diffuse.

On a donc trouvé que les termes d'ordre 0 obtenus dans le développement asymptotique de (f^A, f^B) satisfont les conditions aux limites (3.2.3, 3.2.4, 3.2.5, 3.2.6).

Lemme 3.4.2. *Il existe τ_0 et il existe $\lambda > 0$ tel que pour tout $\tau \in \mathbb{R}$ satisfaisant $|\tau| \leq \tau_0$, le système (3.3.54, 3.3.55, 3.3.56, 3.3.57, 3.3.58) possède une solution vérifiant les conditions de bord:*

$$n_{H0}^A(-1) = 1, \quad T_{H0}(-1) = 1, \quad n_{H0}^A(1) = 1 + \tau, \quad |T_{H0}(1) - 1| \leq \lambda\tau, \quad (3.4.59)$$

et la contrainte sur n_{H0}^B

$$\int_{-1}^1 n_{H0}^B dx = m, \quad (3.4.60)$$

où m est une constante positive fixée.

De plus, on a les estimations suivantes: il existe $\lambda > 0$, tel que (pour tout $x \in [-1, 1]$)

$$\begin{aligned} |T_{H0}(x) - 1| &\leq \lambda\tau, & |n_{H0}^A(x) - 1| &\leq \lambda\tau, & |u_{1,H1}(x)| &\leq \lambda\tau, \\ |(T_{H0})'(x)| &\leq \lambda\tau, & |(n_{H0}^A)'(x)| &\leq \lambda\tau, & |(n_{H0}^B)'(x)| &\leq \lambda\tau. \end{aligned} \quad (3.4.61)$$

Remarque 11. *Les estimations (3.4.61) seront utilisées lors de la démonstration du lemme 3.7.1.*

Preuve du lemme 3.4.2.

Dans un premier temps, on considère le système (3.3.54, 3.3.55, 3.3.56, 3.3.57, 3.3.58) muni des conditions de bord suivantes:

$$n_{H0}^A(-1) = 1, \quad n_{H0}^A(1) = 1, \quad T_{H0}(-1) = 1, \quad T_{H0}(1) = 1,$$

et la condition sur n_{H0}^B ,

$$\int_{-1}^1 n_{H0}^B dx = m.$$

Pour ce système,

$$(T_{H0}, n_{H0}^A, u_{1,H1}, n_{H0}^B) = \left(1, 1, 0, \frac{1}{2m}\right)$$

est une solution constante.

On recherche une solution du système satisfaisant les conditions de bord

(3.4.59) ainsi que la contrainte sur la masse (3.4.61), comme perturbation de cette solution constante.

Déterminons dans un premier temps T_{H0} .

D'après les équations (3.3.55), $n_{H0}u_{1,H1}$ est constante sur $[-1,1]$. Donc, il existe une constante θ telle que:

$$n_{H0}u_{1,H1} = \theta. \quad (3.4.62)$$

L'équation (3.3.56) peut donc s'écrire en effectuant le changement d'inconnue $T = T_{H0} - 1$,

$$\theta T' = \frac{\gamma_2}{2} \left(T''(1+T)^{\frac{1}{2}} + \frac{(T')^2}{(1+T)^{\frac{1}{2}}} \right).$$

On note $c = T'(-1)$. On peut voir T comme la solution du problème de Cauchy,

$$\begin{aligned} T'' &= \frac{2\theta}{\gamma_2} \frac{T'}{(1+T)^{\frac{1}{2}}} - \frac{(T')^2}{2(1+T)}. \\ T(-1) &= 0, \\ T'(-1) &= c. \end{aligned} \quad (3.4.63)$$

On se restreint à l'étude des solutions bijectives de ce problème. Soit

$\varphi = T^{-1}$. D'où $\varphi'(T) = \frac{1}{T'}$ et $\varphi''(T) = -\frac{T''}{(T')^2}$. Donc

$$\varphi''(T) = \frac{1}{2(1+T)} - \frac{2\theta}{\gamma_2 T' (1+T)^{\frac{1}{2}}}.$$

$u(T) = \frac{1}{T'}$ est solution de l'équation de Riccati suivante:

$$u'(T) = \frac{u(T)}{2(1+T)} - \frac{2\theta}{\gamma_2} \frac{(u(T))^2}{(1+T)^{\frac{1}{2}}}.$$

La fonction z définie par $z(T) = \frac{1}{u(T)}$ est alors solution de:

$$z'(T) = -\frac{z(T)}{2(1+T)} + \frac{2\theta}{\gamma_2} \frac{1}{(1+T)^{\frac{1}{2}}}.$$

z est alors donné par l'expression:

$$z(T) = \frac{\frac{2\theta}{\gamma_2}T + c}{(1+T)^{\frac{1}{2}}}.$$

Il s'ensuit

$$u(T) = \frac{(1+T)^{\frac{1}{2}}}{\frac{2\theta}{\gamma_2}T + c}.$$

Cela revient donc à résoudre:

$$T' = \frac{\frac{2\theta}{\gamma_2}T + c}{(1+T)^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.4.64)$$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz garantit alors que la solution du problème de Cauchy (3.4.63) est globale sur $[-1,1]$.

On cherche maintenant une condition suffisante sur c pour que pour tout x , $T(x) \leq \tau$. Pour $\frac{2\theta}{\gamma_2} > 0$,

$$\int_{-1}^x \frac{T'(s)}{\frac{2\theta}{\gamma_2}T(s) + c} ds \leq \frac{4\theta}{\gamma_2}.$$

Ainsi, pour tout $x \in [-1,1]$,

$$T(x) \leq c \frac{2\theta}{\gamma_2} (\exp(\frac{4\theta}{\gamma_2}) - 1) \leq \tau,$$

en choisissant c tel que

$$0 < c \leq \frac{\tau \frac{\gamma_2}{2\theta}}{\exp(\frac{4\theta}{\gamma_2}) - 1}.$$

On cherche maintenant une condition suffisante sur c pour que pour tout $x \in [-1,1]$, $T'(x) \leq \tau$. En divisant l'équation (3.4.63) par T' et en intégrant sur $[-1,x]$, on obtient

$$\ln\left(\frac{T'(x)}{T'(-1)}\right) = \frac{2\theta}{\gamma_2} \int_{-1}^x \frac{ds}{(1+T)} - \frac{1}{2} \int_{-1}^x \frac{T'}{(1+T)} ds.$$

D'où,

$$T'(x) = c \exp \left(\frac{2\theta}{\gamma_2} \int_{-1}^x \frac{ds}{(1+T)} - \frac{1}{2} \int_{-1}^x \frac{T'}{(1+T)} ds \right). \quad (3.4.65)$$

Or, étant donné que $\frac{2\theta}{\gamma_2} > 0$, (3.4.64) implique que pour tout $x \in [-1,1]$, $T'(x) > 0$. De plus,

$$\int_{-1}^x \frac{ds}{(1+T)} \leq 2.$$

D'où, en choisissant c tel que

$$0 < c < \tau \exp\left(-\frac{4\theta}{\gamma_2}\right),$$

on obtient

$$T'(x) \leq \tau. \quad (3.4.66)$$

Le cas $\frac{2\theta}{\gamma_2} < 0$ se traite de manière analogue.

Déterminons maintenant n_{H0}^A . D'après l'équation (3.3.54), il existe une constante α telle que

$$(n_{H0}^A + n_{H0}^B)T_{H0} = \alpha. \quad (3.4.67)$$

D'où, comme pour tout $x \in [-1,1]$, $T_{H0}(x) \neq 0$,

$$n_{H0}^B = \left(\frac{\alpha}{T_{H0}} - n_{H0}^A \right). \quad (3.4.68)$$

L'équation (3.3.57) implique

$$\theta = -\frac{5}{2}\gamma_c \frac{(p_{H0}^A)'}{\sqrt{T_{H0}}n_{H0}^B}. \quad (3.4.69)$$

D'où, en utilisant (3.4.67),

$$(n_{H0}^A)' + n_{H0}^A \frac{(T_{H0}' - \frac{2}{5\gamma_c}\theta\sqrt{T_{H0}})}{T_{H0}} + \frac{2\theta\alpha}{5\gamma_c(T_{H0})^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

En appliquant la méthode de variation des constantes, on résout l'équation précédente avec la condition de bord $n_{H_0}^A(-1) = 1$ et on obtient

$$n_{H_0}^A(x) = 1 - \frac{2\theta\alpha}{5} \int_{-1}^x \frac{1}{(T_{H_0})^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\int_y^x \left(\frac{T'_{H_0} - \frac{2}{5}T_{H_0}\theta}{T_{H_0}}\right)ds\right) dy.$$

La condition $n_{H_0}^A(1) = 1 + \tau$ fournit alors la relation suivante entre α et θ :

$$\alpha = -\frac{\tau}{\frac{2\theta}{5} \int_{-1}^1 \frac{1}{(T_{H_0})^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\int_y^1 \left(\frac{T'_{H_0} - \frac{2}{5}T_{H_0}\theta}{T_{H_0}}\right)(s)ds\right) dy}.$$

Il reste à déterminer une autre relation entre α et θ . D'après (3.4.60) et (3.4.68),

$$m + \tau = \alpha \int_{-1}^1 \frac{dx}{T_{H_0}} - \int_{-1}^1 n_{H_0}^A dx.$$

$$\alpha = \frac{m + \tau + 2}{\int_{-1}^1 \frac{dx}{T_{H_0}} + \frac{2\theta}{5} \int_{-1}^1 \int_{-1}^x \frac{1}{(T_{H_0})^{\frac{3}{2}}} \exp\left(\int_y^x \frac{T'_{H_0} - \frac{2}{5}T_{H_0}\theta}{T_{H_0}} ds\right) dy dx}.$$

Cette seconde relation permet d'éliminer α . Ce qui entraîne l'équation suivante sur θ :

$$F(\theta) = -\int_{-1}^1 \frac{dx}{T_{H_0}}, \quad (3.4.70)$$

avec

$$\begin{aligned} J(\theta) &= \int_{-1}^1 \frac{1}{(T_{H_0}(y))^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\int_y^1 \left(\frac{T'_{H_0} - \frac{2}{5}T_{H_0}\theta}{T_{H_0}}\right)(s)ds\right) dy, \\ I(x,\theta) &= \int_{-1}^x \frac{1}{(T_{H_0})^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\int_y^x \left(\frac{T'_{H_0} - \frac{2}{5}T_{H_0}\theta}{T_{H_0}}\right)(s)ds\right) dy, \\ F(\theta) &= \left(\frac{m + \eta + 2}{\eta}\right) \frac{2\theta}{5} J(\theta) + \frac{2\theta}{5} \int_{-1}^1 I(x,\theta) dx. \end{aligned}$$

L'application qui à θ associe $F(\theta)$ étant strictement monotone, il existe θ_0 tel que l'expression (3.4.70) soit vérifiée.

On cherche maintenant une estimation de θ en supposant que $\theta > 0$. Le

cas $\theta < 0$ se traite de manière analogue.

La relation (3.4.64) évaluée pour $x = 1$ entraîne

$$T'(1) = \frac{2\theta}{\gamma_2} \left(\frac{T(1) + c}{2 + \tau} \right).$$

D'après l'estimation obtenue sur T' , on a

$$T'(1) = \frac{2\theta}{\gamma_2} \left(\frac{T(1) + c}{2 + \tau} \right) \leq \tau.$$

Ce qui implique

$$0 \leq \frac{2\theta}{\gamma_2} \leq 2\tau. \quad (3.4.71)$$

(3.4.71) appliquée à l'équation (3.4.69) entraîne qu'il existe $\tilde{d}_1 \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$|(p_{H0}^A)'| \leq \tilde{d}_1 \tau. \quad (3.4.72)$$

D'autre part, étant donné que $n_{H0}^A = \frac{p_{H0}^A}{T_{H0}}$, d'après (3.4.72) et (3.4.66), il existe $\tilde{k}_1 \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$|(n_{H0}^A)'| \leq \tilde{k}_1 \tau. \quad (3.4.73)$$

Donc, en dérivant (3.4.68) et en utilisant les inégalités (3.4.66, 3.4.74), on obtient qu'il existe $\tilde{k}_2 \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$|(n_{H0}^B)'| \leq \tilde{k}_2 \tau. \quad (3.4.74)$$

Par ailleurs, les équation (3.3.57) et (3.4.72) impliquent qu'il existe $c_1 \in \mathbb{R}_+$ tels que

$$|u_{1,H1}| \leq c_1 \tau.$$

□

3.4.2 Couche de Knudsen à l'ordre 1.

Pour toute la suite de cette étude, on note

$$x' = \frac{1+x}{\varepsilon}, \quad x'' = \frac{1-x}{\varepsilon}.$$

$f_{H_1}^A$ et $f_{H_1}^B$ définis en (3.3.45) et (3.3.46) ne pouvant pas vérifier les conditions aux limites $f_{H_1}^A(-1,v) = f_{H_1}^A(1,v) = 0$ et $f_{H_1}^B(-1,v) = f_{H_1}^B(1,v) = 0$, on rajoute des termes de Knudsen pour chacun des deux bords. On requiert de plus pour ces termes qu'ils aient une limite nulle pour x' et x'' tendant vers l'infini.

On écrit alors f_1 , f_1^A et f_1^B sous la forme

$$f_1(x,v) = f_{H_1}(x,v) + f_{K_1}^-(x',v) + f_{K_1}^+(x'',v), \quad (3.4.75)$$

$$f_1^A(x,v) = f_{H_1}^A(x,v) + f_{K_1}^{A-}(x',v) + f_{K_1}^{A+}(x'',v), \quad (3.4.76)$$

$$f_1^B(x,v) = f_{H_1}^B(x,v) + f_{K_1}^{B-}(x',v) + f_{K_1}^{B+}(x'',v). \quad (3.4.77)$$

Remarque 12. Les conditions de bord pour $f_{H_1}^A$ et $f_{H_1}^B$ sont liées aux termes de Knudsen.

Dorénavant, on note $\tilde{M} = \frac{1}{n_{H_0}^A} f_{H_0}^A$, i.e

$$\tilde{M} = \frac{1}{(\pi T_{H_0})^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{v^2}{T_{H_0}}\right)$$

et

$$M^A = n_{H_0}^A \tilde{M}, \quad M^B = n_{H_0}^B \tilde{M}.$$

Comme dans ([2]), on introduit l'espace \mathcal{H} muni du produit scalaire

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \langle (f^A, f^B); (g^A, g^B) \rangle \\ &= n_{H_0}^A \int_{\mathbb{R}^3} f^A(v) g^A(v) \tilde{M}(v) dv + n_{H_0}^B \int_{\mathbb{R}^3} f^B(v) g^B(v) \tilde{M}(v) dv. \end{aligned}$$

On note par $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ la norme associée.

Proposition 1. Il existe des conditions de bord en -1 pour les termes de Hilbert du premier ordre $f_{H_1}^A$ et $f_{H_1}^B$ définis respectivement par (3.3.47) et (3.3.48) et des termes de Knudsen $f_{K_1}^{A-}(x',v)$ et $f_{K_1}^{B-}(x',v)$, tels que

$$\begin{aligned} \xi \frac{\partial}{\partial x'} f_{K_1}^{A-}(x',v) &= Q(M^A(-1,v), f_{K_1}^-(x',v)) + Q(f_{K_1}^{A-}(x',v), M(-1,v)), \\ \xi \frac{\partial}{\partial x'} f_{K_1}^{B-}(x',v) &= Q(M^B(-1,v), f_{K_1}^-(x',v)) + Q(f_{K_1}^{B-}(x',v), M(-1,v)), \end{aligned} \quad (3.4.78)$$

où $M = M^A + M^B$ et $f_{K_1}^- = f_{K_1}^{A-} + f_{K_1}^{B-}$.

De plus, on a la propriété asymptotique suivante: $f_{K_1}^{A-}$ et $f_{K_1}^{B-}$ peuvent s'écrire sous la forme:

$$\begin{aligned} f_{K_1}^{A-}(x', v) &= M^A(-1, v) b_1^{A-}(x', v), \\ f_{K_1}^{B-}(x', v) &= M^B(-1, v) b_1^{B-}(x', v), \end{aligned}$$

où pour x' tendant vers $+\infty$, b_1^{A-} et b_1^{B-} convergent exponentiellement vers 0 de la façon suivante:

$$\begin{aligned} \|(1 + |v|)^{\frac{1}{2}} b_1^{A-}(x', v)\|_{\mathcal{H}} &\leq \exp(-\sigma x'), \\ \|(1 + |v|)^{\frac{1}{2}} b_1^{B-}(x', v)\|_{\mathcal{H}} &\leq \exp(-\sigma x'), \end{aligned} \quad (3.4.79)$$

pp $x' > 0$ avec $\sigma < 2\nu_1$, où ν_1 est défini en (3.6.36).

De même, il existe des conditions de bord en 1 pour les termes de Hilbert $f_{H_1}^A$ et $f_{H_1}^B$ ainsi que des termes de Knudsen $f_{K_1}^{A+}$ et $f_{K_1}^{B+}$ tels qu'une proposition analogue de la proposition 1 soit satisfaite en 1.

Preuve de la Proposition 1

Nous allons appliquer une méthode analogue à celle développée dans le cas d'une composante de gaz dans ([6], [5]). D'après ([2]), il existe (b_1^{A-}, b_1^{B-}) et (d_1^{A-}, d_1^{B-}) solutions uniques de

$$\begin{aligned} \xi \frac{\partial}{\partial x'} b_1^{A-}(x', v) &= \frac{1}{M^A(-1, v)} (Q(M^A(-1, v), M(-1, v) b_1^-(x', v)) \\ &\quad + Q(M^A(-1, v) b_1^{A-}(x', v), M(-1, v)), \\ \xi \frac{\partial}{\partial x'} b_1^{B-}(x', v) &= \frac{1}{M^B(-1, v)} (Q(M^B(-1, v), M(-1, v) b_1^-(x', v)) \\ &\quad + Q(M^B(-1, v) b_1^{B-}(x', v), M(-1, v)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_1^{A-}(0, v) &= -\Psi_{H_1}^A(-1, v), \quad \xi > 0, \\ b_1^{B-}(0, v) &= -\Psi_{H_1}^B(-1, v), \quad \xi > 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \xi M^A(-1, v) b_1^{A-}(x', v) dv &= 0, \\ \int_{\mathbb{R}^3} \xi M^B(-1, v) b_1^{B-}(x', v) dv &= 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\xi \frac{\partial}{\partial x'} d_1^{A-}(x', v) &= \frac{1}{M^A(-1, v)} (Q(M^A(-1, v), M(-1, v) d_1^-(x', v)) \\ &\quad + Q(M^A(-1, v) d_1^{A-}(x', v), M(-1, v))), \\ \xi \frac{\partial}{\partial x'} d_1^{B-}(x', v) &= \frac{1}{M^B(-1, v)} (Q(M^B(-1, v), M(-1, v) d_1^-(x', v)) \\ &\quad + Q(M^B(-1, v) d_1^{B-}(x', v), M(-1, v))),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d_1^{A-}(0, v) &= 0, \quad \xi > 0, \\ d_1^{B-}(0, v) &= 0, \quad \xi > 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} \xi M^A(-1, v) d_1^{A-}(x', v) dv &= 1, \\ \int_{\mathbb{R}^3} \xi M^B(-1, v) d_1^{B-}(x', v) dv &= 1,\end{aligned}$$

avec $b_1^- = b_1^{A-} + b_1^{B-}$ et $d_1^- = d_1^{A-} + d_1^{B-}$.
De plus,

$$\begin{aligned}\lim_{x' \rightarrow +\infty} b_1^{A-}(x', v) &= b_{1, \infty, 0}^{A-} + b_{1, \infty, 4}^- v^2, \\ \lim_{x' \rightarrow +\infty} b_1^{B-}(x', v) &= b_{1, \infty, 0}^{B-} + b_{1, \infty, 4}^- v^2, \\ \lim_{x' \rightarrow +\infty} d_1^{A-}(x', v) &= d_{1, \infty, 0}^{A-} + \frac{1}{2} \xi + d_{1, \infty, 4}^- v^2, \\ \lim_{x' \rightarrow +\infty} d_1^{B-}(x', v) &= d_{1, \infty, 0}^{B-} + \frac{1}{2} \xi + d_{1, \infty, 4}^- v^2,\end{aligned}$$

où $b_{1, \infty, 0}^{A-}$, $b_{1, \infty, 0}^{B-}$, $b_{1, \infty, 4}^-$, $d_{1, \infty, 0}^{A-}$, $d_{1, \infty, 0}^{B-}$ et $d_{1, \infty, 4}^-$ désignent des constantes.
On choisit alors les conditions de bord en -1 pour p_{H1}^A et T_{H1} de la manière suivante:

$$\begin{aligned}T_{H1}(-1) &= 2u_{1, H1}(-1) d_{1, \infty, 4}^- + b_{1, \infty, 4}^-, \\ n_{H1}^A(-1) &= \frac{3}{2} T_{H1}(-1) + 2u_{1, H1}(-1) d_{1, \infty, 0}^{A-} + b_{1, \infty, 0}^{A-}.\end{aligned}$$

Ainsi, $(f_{K1}^{A-}, f_{K1}^{B-})$ définis par:

$$\begin{aligned} f_{K1}^{A-} &= (2u_{1,H1}(-1)(d_1^{A-}(x',v) - d_{1,\infty,0}^{A+} - \xi - d_{1,\infty,0}^+ v^2) \\ &\quad + (b_1^{A-} - b_{1,\infty,0}^{A-} - b_{1,\infty,4}^- v^2)) f_{H0}^A, \\ f_{K1}^{B-} &= (2u_{1,H1}(-1)(d_1^{B-}(x',v) - d_{1,\infty,0}^{B-} - \xi - d_{1,\infty,4}^- v^2) \\ &\quad + (b_1^{B-} - b_{1,\infty,0}^{B-} - b_{1,\infty,4}^- v^2)) f_{H0}^B, \end{aligned}$$

satisfont les équations (3.4.78) et les estimations (3.4.79) ([2]). \square

Afin de satisfaire les conditions de bord en 1, on raisonne de manière analogue. On choisit $f_{K1}^{A+}, f_{K1}^{B+}, p_{H1}^A(1)$ et $T_{H1}(1)$ de la manière suivante:

$$\begin{aligned} f_{K1}^{A+}(x,v) &= (2u_{1,H1}(1)(d_1^{A+}(x'',-v) - d_{1,\infty,0}^{A+} - \xi - d_{1,\infty,0}^+ v^2) \\ &\quad + (b_1^{A+} - b_{1,\infty,0}^{A+} - b_{1,\infty,4}^+ v^2)) f_{H0}^A, \\ f_{K1}^{B+}(x,v) &= (2u_{1,H1}(1)(d_1^{B+}(x'',-v) - d_{1,\infty,0}^{B+} - \xi - d_{1,\infty,0}^+ v^2) \\ &\quad + (b_1^{B+} - b_{1,\infty,0}^{B+} - b_{1,\infty,4}^+ v^2)) f_{H0}^B, \\ T_{H1}(1) &= \left(\frac{T_{II}}{T_I} \right) \left(2u_{1,H1}(1)d_{1,\infty,4}^+ + \left(\frac{T_{II}}{T_I} \right) b_{1,\infty,4}^+ \right), \quad (3.4.80) \\ n_{H1}^A(1) &= \left(\frac{n_{II}}{n_I} \right) \left(\frac{3}{2} T_{H1}(1) + 2u_{1,H1}(1)d_{1,\infty,0}^{A+} + \left(\frac{T_{II}}{T_I} \right) b_{1,\infty,0}^{A+} \right). \quad (3.4.81) \end{aligned}$$

Remarque 13. *On a:*

$$\int_{\mathbb{R}^3} \xi f_{K1}^{B-}(x',v) dv = \int_{\mathbb{R}^3} \xi f_{K1}^{B-}(x',v) dv = 0,$$

ce qui permettra d'obtenir pour la composante B des conditions de bord de type Maxwell diffuse.

On pose

$$\begin{aligned} \gamma_{1,\varepsilon}^{A-} &= f_{K1}^{A-}\left(\frac{2}{\varepsilon}, v\right), \quad \gamma_{1,\varepsilon}^{A+} = f_{K1}^{A+}\left(\frac{2}{\varepsilon}, v\right), \quad \gamma_{1,\varepsilon}^{B-} = f_{K1}^{B-}\left(\frac{2}{\varepsilon}, v\right), \\ \gamma_{1,\varepsilon}^{B+} &= f_{K1}^{B+}\left(\frac{2}{\varepsilon}, v\right), \quad \gamma_{1,\varepsilon}^- = \gamma_{1,\varepsilon}^{A-} + \gamma_{1,\varepsilon}^{B-}, \quad \gamma_{1,\varepsilon}^+ = \gamma_{1,\varepsilon}^{A+} + \gamma_{1,\varepsilon}^{B+}. \quad (3.4.82) \end{aligned}$$

3.5 Etude des termes d'ordre 2.

3.5.1 Décomposition de f_{H2} .

f_{H2} se décompose en ses parties hydrodynamique et non hydrodynamique selon la formule

$$f_{H2} = f_{H0}(c_0 + c_1\xi + c_4v^2 + \psi_{H2}), \quad (3.5.83)$$

avec ψ_{H2} satisfaisant les mêmes relations d'orthogonalité que ψ_{H1} données dans le paragraphe 3.3.6. Une expression explicite de ψ_{H2} est donnée dans ([22]). Elle est établie en utilisant que

$$\xi \frac{\partial}{\partial x} f_{H1} = Q(f_{H2}, f_{H0}) + Q(f_{H0}, f_{H2}). \quad (3.5.84)$$

Un raisonnement analogue à celui effectué pour f_{H1} implique que

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{p_{H2}}{p_{H0}} - \frac{5}{2} \left(\frac{T_{H2}^A}{T_{H0}} + \frac{n_{H1} T_{H1}}{n_{H0} T_{H0}} \right) - \frac{u_{1,H1}^2}{T_{H0}}, \\ c_1 &= 2 \left(\frac{u_{1,H2}}{T_{H0}} + \frac{n_{H1} u_{1,H1}}{n_{H0} T_{H0}} \right), \end{aligned} \quad (3.5.85)$$

$$c_4 = \frac{1}{T_{H0}} \left(\frac{T_{H2}}{T_{H0}} + \frac{n_{1,H1} T_{H1}}{n_{H0} T_{H0}} + \frac{2 u_{1,H1}^2}{3 T_{H0}} \right). \quad (3.5.86)$$

3.5.2 Décomposition de f_{H2}^A et de f_{H2}^B .

En identifiant les termes d'ordre 1 dans les équations (3.3.7) et (3.3.8), f_{H1}^A et f_{H1}^B sont respectivement solutions des équations suivantes:

$$\xi \frac{\partial}{\partial x} f_{H1}^A = Q(f_{H0}^A, f_{H2}) + Q(f_{H1}^A, f_{H1}) + Q(f_{H2}^A, f_{H0}) \quad (3.5.87)$$

et

$$\xi \frac{\partial}{\partial x} f_{H1}^B = Q(f_{H0}^B, f_{H2}) + Q(f_{H1}^B, f_{H1}) + Q(f_{H2}^B, f_{H0}). \quad (3.5.88)$$

De même que pour f_{H2} , f_{H2}^A et f_{H2}^B se décomposent en leurs parties hydrodynamiques et non hydrodynamiques selon la formule

$$f_{H2}^A = (c_0^A + c_1\xi + c_4v^2 + \psi_{H2} + \varphi_{H2}^A) f_{H0}^A, \quad (3.5.89)$$

$$f_{H2}^B = (c_0^B + c_1\xi + c_4v^2 + \psi_{H2} + \varphi_{H2}^B) f_{H0}^B, \quad (3.5.90)$$

avec

$$\begin{aligned} c_0^A &= \frac{p_{H2}^A}{p_{H0}^A} - \frac{5}{2} \left(\frac{T_{H2}^A}{T_{H0}} + \frac{n_{H1}^A T_{H1}^A}{n_{H0}^A T_{H0}} \right) - \frac{u_{1,H1}^2}{T_{H0}}, \\ c_0^B &= \frac{p_{H2}^B}{p_{H0}^B} - \frac{5}{2} \left(\frac{T_{H2}^B}{T_{H0}} + \frac{n_{H1}^B T_{H1}^B}{n_{H0}^B T_{H0}} \right) - \frac{u_{1,H1}^2}{T_{H0}}, \end{aligned}$$

et c_1 et c_4 donnés par les relations (3.5.85) et (3.5.86). L'équation (3.5.87) devient alors

$$\begin{aligned} \xi \frac{\partial}{\partial x} f_{H1}^A &= \frac{n_{H0}^A}{n_{H0}} (Q(f_{H2}, f_{H0}) + Q(f_{H0}, f_{H2})) \\ &+ Q(f_{H1}^A, f_{H1}) + Q(f_{H0}^A \varphi_{H2}^A, f_{H0}). \end{aligned}$$

On est alors ramené à résoudre

$$\begin{aligned} Q(E(\tilde{v}) \varphi_{H2}^A, E(\tilde{v})) &= \frac{T_{H0}^3}{n_{H0} n_{H0}^A} \left(\xi \frac{\partial}{\partial x} f_{H1}^A - Q(f_{H1}^A, f_{H1}) \right) \\ &- \frac{T_{H0}^3}{n_{H0}^2} \left(\xi \frac{\partial}{\partial x} f_{H1} - Q(f_{H1}, f_{H1}) \right). \end{aligned}$$

L'existence d'une telle fonction φ_{H2}^A est donnée par le lemme suivant

Lemme 3.5.3. *Soit,*

$$T : \phi \mapsto \frac{1}{E(\tilde{v})} Q(E(\tilde{v}) \phi, E(\tilde{v})).$$

Alors, $\ker T$ est formé des fonctions constantes.

Preuve du lemme 3.5.91.

Soit $\phi \in \ker T$. En utilisant le changement de variables $v \mapsto v'$, on obtient

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} E(v) E(v_*) \phi(v) (\phi(v') - \phi(v)) dv dv_* d\omega \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} E(v) E(v_*) \phi(v) (\phi(v') - \phi(v)) dv dv_* d\omega \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} E(v) E(v_*) \phi(v') (\phi(v) - \phi(v')) dv dv_* d\omega \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} E(v) E(v_*) (\phi(v) - \phi(v'))^2 dv dv_* d\omega = 0 \end{aligned}$$

Donc,

$$(\forall (v, v_*, \omega) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2), \phi(v') = \phi(v),$$

avec

$$v' = v - \langle v - v_*, \omega \rangle \omega.$$

On choisit $v_* = 0$ et $\omega = \frac{v}{|v|}$. Ce qui entraîne

$$(\forall v \in \mathbb{R}^3), \phi(v) = \phi(0).$$

□

Or, en intégrant les équations (3.5.84) et (3.5.87) par rapport à v ,

$$\int_{\mathbb{R}^3} (\xi \frac{\partial}{\partial x} f_{H1}^A - Q(f_{H1}^A, f_{H1})) dv = 0$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^3} (\xi \frac{\partial}{\partial x} f_{H1} - Q(f_{H1}, f_{H1})) dv = 0.$$

D'où, un tel φ_{H2}^A existe d'après l'alternative de Fredholm.

Détermination de φ_{H2}^A .

On va écrire φ_{H2}^A comme la somme de deux termes φ_{H2}^{A1} et φ_{H2}^{A2} , solutions respectives des deux équations suivantes

$$Q(E(\tilde{v}), E(\tilde{v})\varphi_{H2}^{A1}) = \frac{T_{H0}^3}{n_{H0}} Q(f_{H1}, \frac{f_{H1}}{n_{H0}} - \frac{f_{H1}^A}{n_{H0}^A}), \quad (3.5.91)$$

$$Q(E(\tilde{v}), E(\tilde{v})\varphi_{H2}^{A2}) = \frac{T_{H0}}{n_{H0}} \left(\frac{\xi}{n_{H0}^A} \frac{\partial}{\partial x} f_{H1}^A - \frac{\xi}{n_{H0}} \frac{\partial}{\partial x} f_{H1} \right). \quad (3.5.92)$$

Or, d'après les expressions (3.3.41, 3.3.47),

$$\frac{f_{H1}}{n_{H0}} - \frac{f_{H1}^A}{n_{H0}^A} = \left(\frac{p_{H1}}{p_{H0}} - \frac{p_{H1}^A}{p_{H0}^A} + \frac{\tilde{\xi} C(|\tilde{v}|)}{n_{H0} p_{H0}^A} \frac{\partial}{\partial x} p_{H0}^A \right) \frac{E(\tilde{v})}{T_{H0}^{\frac{3}{2}}}.$$

L'équation (3.5.91) devient donc

$$\begin{aligned}
 Q(E(\tilde{v})\varphi_{H2}^{A1}, E(\tilde{v})) &= \left(\frac{p_{H1}}{p_{H0}} - \frac{p_{H1}^A}{p_{H0}^A} \right) \left(2 \frac{u_{1,H1}}{T_{H0}} Q(\xi E(\tilde{v}), E(\tilde{v})) \right. \\
 &+ \frac{T_{H1}}{T_{H0}} Q(|\tilde{v}|^2 E(\tilde{v}), E(\tilde{v})) \\
 &+ \left. \frac{1}{p_{H0}} \left(\frac{\partial}{\partial x} T_{H0} \right) Q(\xi A(|\tilde{v}|) E(\tilde{v}), E(\tilde{v})) \right) \\
 &+ \frac{1}{n_{H0} p_{H0}^A} \left(\frac{\partial}{\partial x} p_{H0}^A \right) \left(\frac{p_{H1}}{p_{H0}} Q(E(\tilde{v}), \tilde{\xi} C(|\tilde{v}|) E(\tilde{v})) \right) \\
 &+ 2 \frac{u_{1,H1}}{T_{H0}} Q(\xi E(\tilde{v}), \tilde{\xi} C(|\tilde{v}|) E(\tilde{v})) \\
 &+ \frac{T_{H1}}{T_{H0}} Q(|\tilde{v}|^2 E(\tilde{v}), \tilde{\xi} C(|\tilde{v}|) E(\tilde{v})) \\
 &+ \left. \frac{1}{p_{H0}} \left(\frac{\partial}{\partial x} T_{H0} \right) Q(\xi A(|\tilde{v}|) E(\tilde{v}), \tilde{\xi} C(|\tilde{v}|) E(\tilde{v})) \right).
 \end{aligned}$$

Soit $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ solutions des équations suivantes

$$\begin{aligned}
 Q(E(\tilde{v}), E(\tilde{v})C_1(\tilde{v})) &= Q(\tilde{\xi} E(\tilde{v}), E(\tilde{v})) E(\tilde{v}), \\
 Q(E(\tilde{v}), E(\tilde{v})C_2(\tilde{v})) &= Q(|\tilde{v}|^2 E(\tilde{v}), E(\tilde{v})) E(\tilde{v}), \\
 Q(E(\tilde{v}), E(\tilde{v})C_3(\tilde{v})) &= Q(\xi A(|\tilde{v}|) E(\tilde{v}), E(\tilde{v})) E(\tilde{v}), \\
 Q(E(\tilde{v}), E(\tilde{v})C_4(\tilde{v})) &= Q(\xi E(\tilde{v}), \tilde{\xi} C(|\tilde{v}|) E(\tilde{v})) E(\tilde{v}), \\
 Q(E(\tilde{v}), E(\tilde{v})C_5(\tilde{v})) &= Q(|\tilde{v}|^2 E(\tilde{v}), \tilde{\xi} C(|\tilde{v}|) E(\tilde{v})) E(\tilde{v}), \\
 Q(E(\tilde{v}), E(\tilde{v})C_6(\tilde{v})) &= Q(\xi A(|\tilde{v}|) E(\tilde{v}), \tilde{\xi} C(|\tilde{v}|) E(\tilde{v})) E(\tilde{v}),
 \end{aligned}$$

leur existence étant garantie par le lemme 3.5.91 et l'alternative de Fredholm.

φ_{H2}^{A1} s'écrit alors

$$\begin{aligned}
 \varphi_{H2}^{A1} &= \left(\frac{p_{H1}}{p_{H0}} - \frac{p_{H1}^A}{p_{H0}^A} \right) \left(2 \frac{u_{1,H1}}{\sqrt{T_{H0}}} C_1(\tilde{v}) + \frac{T_{H1}}{T_{H0}} C_2(\tilde{v}) + \frac{\sqrt{T_{H0}}}{p_{H0}} \left(\frac{\partial}{\partial x} T_{H0} \right) C_3(\tilde{v}) \right) \\
 &+ \frac{\frac{\partial}{\partial x} p_{H0}^A}{n_{H0} p_{H0}^A} \left(\frac{p_{H1}}{p_{H0}} \tilde{\xi} C(|\tilde{v}|) E(\tilde{v}) + \frac{T_{H1}}{T_{H0}} C_4(\tilde{v}) + \frac{\sqrt{T_{H0}}}{p_{H0}} \left(\frac{\partial}{\partial x} T_{H0} \right) C_5(\tilde{v}) \right).
 \end{aligned}$$

On résout maintenant (3.5.92). D'après les expressions de f_{H1} et de f_{H1}^A ,

$$\begin{aligned}
& \frac{T_{H0}^3}{n_{H0}} \left(\frac{\xi}{n_{H0}^A} \xi \frac{\partial}{\partial x} f_{H1}^A - \frac{\xi}{n_{H0}} \xi \frac{\partial}{\partial x} f_{H1} \right) \\
&= \frac{T_{H0}^3}{n_{H0} n_{H0}^A} \left(\xi \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p_{H1}^A}{p_{H0}^A} f_{H0}^A \right) \right) + \frac{T_{H0}^3}{n_{H0} n_{H0}^A} \left(\xi \frac{\partial}{\partial x} \left(2\xi \frac{u_{1,H1}}{T_{H0}} f_{H0}^A - \frac{\tilde{\xi} C(|\tilde{v}|)}{n_{H0} p_{H0}^A} f_{H0}^A \right) \right) \\
&\quad + \frac{T_{H0}^3}{n_{H0}} \left(\frac{\xi}{n_{H0}^A} \frac{\partial}{\partial x} \left((|\tilde{v}|^2 - \frac{5}{2}) \frac{T_{H1}}{T_{H0}} f_{H0}^A \right) - \frac{\xi}{n_{H0}} \frac{\partial}{\partial x} \left((|\tilde{v}|^2 - \frac{5}{2}) \frac{T_{H1}}{T_{H0}} f_{H0} \right) \right) \\
&\quad + \frac{T_{H0}^3}{n_{H0}} \left(\frac{\xi}{n_{H0}^A} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\tilde{\xi} A(|\tilde{v}|)}{p_{H0}} \frac{\partial T_{H0}}{\partial x} f_{H0}^A \right) + \frac{\xi}{n_{H0}} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\tilde{\xi} A(|\tilde{v}|)}{p_{H0}} \frac{\partial T_{H0}}{\partial x} f_{H0} \right) \right) \\
&\quad - \frac{T_{H0}^3}{n_{H0}^2} \xi \frac{\partial}{\partial x} \left(2\xi \frac{u_{1,H1}}{T_{H0}} f_{H0} \right).
\end{aligned}$$

Par ailleurs, le second membre de l'égalité précédente peut être simplifié. Les trois derniers termes se traitent par un simple calcul de la façon suivante

$$\begin{aligned}
& \frac{T_{H0}^3}{n_{H0} n_{H0}^A} \xi \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tilde{\xi} A(|\tilde{v}|)}{p_{H0}} \frac{\partial T_{H0}}{\partial x} f_{H0} \right) - \frac{T_{H0}^3}{n_{H0}^2} \xi \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tilde{\xi} A(|\tilde{v}|)}{p_{H0}} \frac{\partial T_{H0}}{\partial x} f_{H0}^A \right) \\
&= \frac{1}{n_{H0}^2 n_{H0}^A} \left(\frac{\partial}{\partial x} T_{H0} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} p_{H0}^A \right) |\tilde{\xi}|^2 A(|\tilde{v}|) E(\tilde{v}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{T_{H0}^3}{n_{H0} n_{H0}^A} \xi \frac{\partial}{\partial x} \left((|\tilde{v}|^2 - \frac{5}{2}) \frac{T_{H1}}{T_{H0}} f_{H0}^A \right) - \frac{T_{H0}^3}{n_{H0}^2} \xi \frac{\partial}{\partial x} \left((|\tilde{v}|^2 - \frac{5}{2}) \frac{T_{H1}}{T_{H0}} f_{H0} \right) \\
&= \frac{T_{H1}}{p_{H0} n_{H0}^A} \frac{\partial}{\partial x} p_{H0}^A |\tilde{\xi}|^2 (|\tilde{v}|^2 - \frac{5}{2}) E(\tilde{v}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
- \frac{T_{H0}^3}{n_{H0}^2} \xi \frac{\partial}{\partial x} \left(2\xi \frac{u_{1,H1}}{T_{H0}} f_{H0} \right) &= - \frac{T_{H0}^3}{n_{H0}} \left(\frac{\partial}{\partial x} T_{H0} \right) u_{1,H1} |\tilde{\xi}|^2 (|\tilde{v}|^2 - \frac{5}{2}) \frac{E(\tilde{v})}{T_{H0}^{\frac{1}{2}}} \\
&= -2 \left(\frac{\partial}{\partial x} T_{H0} \right) \frac{u_{1,H1}}{n_{H0} \sqrt{T_{H0}}} (|\tilde{\xi}|^2 |\tilde{v}|^2 - \frac{5}{2}) E(\tilde{v}).
\end{aligned}$$

Le premier terme se calcule de la manière suivante:

$$\xi \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p_{H1}^A}{p_{H0}^A} f_{H0}^A \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x} p_{H1}^A \right) \frac{\tilde{\xi} E(\tilde{v})}{T_{H0}^3} + p_{H1}^A \left(\frac{\partial}{\partial x} T_{H0} \right) \tilde{\xi} (|\tilde{v}|^2 - \frac{5}{2}) \frac{E(\tilde{v})}{T_{H0}^3}$$

On simplifie maintenant le second terme. En tenant compte de l'équation (3.3.57),

$$\begin{aligned}
 & \frac{T_{H0}^3}{n_{H0}n_{H0}^A} \xi \frac{\partial}{\partial x} \left(2\xi \frac{u_{1,H1}}{T_{H0}} f_{H0}^A - \frac{\tilde{\xi} C(|\tilde{v}|)}{n_{H0} p_{H0}^A} f_{H0}^A \right) \\
 &= \left(2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{|\tilde{\xi}|^2 E(\tilde{v})}{T_{H0}^{\frac{3}{2}}} \right) (n_{H0}^A u_{1,H1}) + \left(\frac{2|\tilde{\xi}|^2 E(\tilde{v})}{T_{H0}^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{\partial}{\partial x} (n_{H0}^A u_{1,H1}) \right) \\
 & \quad - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{|\tilde{\xi}|^2 C(|\tilde{v}|) E(\tilde{v})}{T_{H0}^{\frac{3}{2}}} \right) \left(\frac{\sqrt{T_{H0}} \frac{\partial}{\partial x} p_{H0}^A}{p_{H0}} \right) \\
 & \quad - \frac{|\tilde{\xi}|^2 C(|\tilde{v}|) E(\tilde{v})}{T_{H0}^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\sqrt{T_{H0}}}{p_{H0}} \frac{\partial}{\partial x} p_{H0}^A \right). \tag{3.5.93}
 \end{aligned}$$

On va alors calculer le second membre de l'égalité (3.5.93) en regroupant les termes 2 par 2, à savoir le premier avec le troisième et le second avec le quatrième. Or, d'après les équations (3.3.55) et (3.3.57), on a la relation

$$\frac{\partial}{\partial x} (n_{H0}^A u_{1,H1}) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\gamma_c \frac{\sqrt{T_{H0}}}{p_{H0}} \frac{\partial}{\partial x} p_{H0}^A \right)$$

Ce qui entraîne que

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{2|\tilde{\xi}|^2 E(\tilde{v})}{T_{H0}^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{\partial}{\partial x} (n_{H0}^A u_{1,H1}) - \frac{|\tilde{\xi}|^2 C(|\tilde{v}|) E(\tilde{v})}{T_{H0}^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\sqrt{T_{H0}}}{p_{H0}} \frac{\partial}{\partial x} p_{H0}^A \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\sqrt{T_{H0}}}{p_{H0}} \frac{\partial}{\partial x} p_{H0}^A \right) \left(2|\tilde{\xi}|^2 \gamma_c - |\tilde{\xi}|^2 C(|\tilde{v}|) \right) \frac{E(\tilde{v})}{T_{H0}^{\frac{3}{2}}}.
 \end{aligned}$$

De plus, le premier terme et le troisième terme peuvent être réécrits

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2|\tilde{\xi}|^2 E(\tilde{v})}{T_{H0}^{\frac{3}{2}}} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x} T_{H0} \right) |\tilde{\xi}|^2 \left(|\tilde{v}|^2 - \frac{5}{2} \right) \frac{E(\tilde{v})}{T_{H0}^{\frac{7}{2}}}$$

et

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} \left(|\tilde{\xi}|^2 C(|\tilde{v}|) \frac{E(\tilde{v})}{T_{H0}^{\frac{3}{2}}} \right) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} T_{H0} \right) \left(\left(\frac{v^2}{T_{H0}} - \frac{5}{2} \right) |\tilde{\xi}|^2 C(|\tilde{v}|) E(\tilde{v}) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{2} \tilde{v} \cdot \nabla_{\tilde{v}} C(|\tilde{v}|) \right) \frac{E(\tilde{v})}{T_{H0}^{\frac{7}{2}}}.
 \end{aligned}$$

Soient D_1, D_2, D_3, D_4 et D_5 solutions des équations

$$\begin{aligned}
Q(E(\tilde{v}), E(\tilde{v})D_1(\tilde{v})) &= |\tilde{\xi}|^2 A(|\tilde{v}|)E(\tilde{v}), \\
Q(E(\tilde{v}), E(\tilde{v})D_2(\tilde{v})) &= |\tilde{\xi}|^2 (|\tilde{v}|^2 - \frac{5}{2})E(\tilde{v}), \\
Q(E(\tilde{v}), E(\tilde{v})D_3(\tilde{v})) &= (2|\tilde{\xi}|^2 \gamma_c - |\tilde{\xi}|^2 C(|\tilde{v}|))E(\tilde{v}), \\
Q(E(\tilde{v}), E(\tilde{v})D_4(\tilde{v})) &= \left(|\tilde{\xi}|^2 (|\tilde{v}|^2 - \frac{5}{2}) + \left(\frac{v^2}{T_{H0}} - \frac{5}{2} \right) |\tilde{\xi}|^2 C(|\tilde{v}|) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \tilde{v} \cdot \nabla_{\tilde{v}} C(|\tilde{v}|) \right) \frac{E(\tilde{v})}{T_{H0}^{\frac{3}{2}}}, \\
Q(E(\tilde{v}), E(\tilde{v})D_5(\tilde{v})) &= \tilde{\xi}(\tilde{v}^2 - \frac{5}{2})E(\tilde{v}),
\end{aligned}$$

leur existence étant assurée par le lemme 3.5.91 et l'alternative de Fredholm. φ_{H2}^{A2} s'écrit alors

$$\begin{aligned}
\varphi_{H2}^{A2} &= \frac{1}{n_{H0} n_{H0}^A} \left(\frac{\partial}{\partial x} T_{H0} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} p_{H0}^A \right) D_1(\tilde{v}) \\
&+ \left(\frac{T_{H1}}{p_{H0} n_{H0}^A} \frac{\partial}{\partial x} p_{H0}^A + 2 \left(\frac{\partial}{\partial x} T_{H0} \right) \frac{u_{1,H1}}{n_{H0} \sqrt{T_{H0}}} \right) D_2(\tilde{v}) \\
&+ \left(\frac{\partial}{\partial x} T_{H0} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\sqrt{T_{H0}}}{p_{H0}} \frac{\partial}{\partial x} p_{H0}^A \right) \frac{D_3(\tilde{v})}{T_{H0}^{\frac{3}{2}}} \\
&+ \left(\frac{\partial}{\partial x} T_{H0} \right) \left(\frac{\sqrt{T_{H0}}}{p_{H0}} \frac{\partial}{\partial x} p_{H0}^A \right) \frac{D_4(\tilde{v})}{T_{H0}^{\frac{7}{2}}} + \left(\frac{\partial}{\partial x} p_{H1}^A \right) \tilde{\xi} C(|\tilde{v}|) \frac{E(\tilde{v})}{T_{H0}^3} \\
&+ p_{H1}^A \left(\frac{\partial}{\partial x} T_{H0}^A \right) D_5(\tilde{v}) \frac{E(\tilde{v})}{T_{H0}^3}. \tag{3.5.94}
\end{aligned}$$

3.5.3 Equations fluides à l'ordre 2.

Comme pour l'ordre 1, on intègre l'équation (3.3.10), selon 1, ξ , v^2 et on considère les termes d'ordre 2.

La première équation s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial x} (n_{H0} u_{H2} + n_{H1} u_{1,H1}) = 0.$$

La troisième équation entraîne d'après ([22]),

$$\begin{aligned} n_{H0}u_{1,H1}\frac{\partial}{\partial x}T_{H1} + (n_{H0}u_{1,H2} + n_{H1}u_{1,H1})\frac{\partial}{\partial x}T_{H0} \\ = -p_{H0}\frac{\partial}{\partial x}u_{1,H1} + \frac{5}{4}\gamma_2\frac{\partial}{\partial x}\left(T_{H0}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial x}T_{H1}\right). \end{aligned}$$

D'autre part, en multipliant l'équation (3.5.89) par ξ , en intégrant par rapport à v et en utilisant le fait que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \xi\psi_{H2}dv = 0,$$

on obtient

$$n_{H0}^A u_{1,H2}^A + n_{H1}^A u_{1,H1}^A = n_{H0}^A u_{1,H2} + n_{H0}^A \frac{n_{H1}}{n_{H0}} u_{1,H1} + \int_{\mathbb{R}^3} \xi f_{H0}^A \varphi_{H2}^A dv.$$

Or, étant donné que $u_{1,H1}^B = 0$ et que $u_{1,H2}^B = 0$, on a

$$n_{H0}^A u_{1,H2}^A + n_{H1}^A u_{1,H1}^A = n_{H0} u_{1,H2} + n_{H1} u_{1,H1}.$$

En posant

$$\varphi^A = \int_{\mathbb{R}^3} \xi f_{H0}^A \varphi_{H2}^A dv = \int_{\mathbb{R}^3} \xi f_{H0}^A \varphi_{H2}^{A1} dv + \int_{\mathbb{R}^3} \xi f_{H0}^A \varphi_{H2}^{A2} dv,$$

on obtient la relation

$$u_{1,H2} = \frac{\varphi^A}{n_{H0}^B} - \frac{n_{H1}}{n_{H0}} u_{1,H1}.$$

Déterminons φ^A . En posant

$$\begin{aligned} \delta_1 = \int_{\mathbb{R}^3} \xi C_1(v) dv, \quad \delta_2 = \int_{\mathbb{R}^3} \xi C_2(v) dv, \quad \delta_3 = \int_{\mathbb{R}^3} \xi C_3(v) dv, \\ \delta_4 = \int_{\mathbb{R}^3} \xi C_4(v) dv, \quad \delta_5 = \int_{\mathbb{R}^3} \xi C_5(v) dv, \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \xi f_{H0}^A \varphi_{H2}^{A1} dv &= n_{H0}^A \left(\frac{p_{H1}}{p_{H0}} - \frac{p_{H1}^A}{p_{H0}^A} \right) \left(2\delta_1 u_{1,H1} + \frac{T_{H1}}{\sqrt{T_{H0}}} \delta_2 + \left(\frac{\partial}{\partial x} T_{H0} \right) \frac{\delta_3}{n_{H0}} \right) \\ &+ \frac{\frac{\partial}{\partial x} p_{H0}^A}{p_{H0}} \left(\frac{p_{H1}}{n_{H0} \sqrt{T_{H0}}} \gamma_c + \frac{T_{H1}}{\sqrt{T_{H0}}} \delta_4 + \left(\frac{\partial}{\partial x} T_{H0} \right) \frac{\delta_5}{n_{H0}} \right). \end{aligned}$$

et en posant

$$\begin{aligned} d_1 &= \int_{\mathbb{R}^3} \xi D_1(v) dv, & d_2 &= \int_{\mathbb{R}^3} \xi D_2(v) dv, & d_3 &= \int_{\mathbb{R}^3} \xi D_3(v) dv, \\ d_4 &= \int_{\mathbb{R}^3} \xi D_4(v) dv, & d_5 &= \int_{\mathbb{R}^3} \xi D_5(v) dv, \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \xi f_{H0}^A \varphi_{H2}^{A2} dv &= \frac{\sqrt{T_{H0}}}{n_{H0}} \left(\frac{\partial}{\partial x} T_{H0} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} p_{H0}^A \right) d_1 \\ &+ \left(\frac{T_{H1} \sqrt{T_{H0}}}{n_{H0}} \left(\frac{\partial}{\partial x} p_{H0}^A \right) + 2 \frac{n_{H0}^A u_{1,H1}}{n_{H0}} \left(\frac{\partial}{\partial x} T_{H0} \right) \right) d_2 \\ &+ n_{H0}^A \sqrt{T_{H0}} \left(\frac{\partial}{\partial x} T_{H0} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\sqrt{T_{H0}}}{p_{H0}} \frac{\partial}{\partial x} p_{H0}^A \right) d_3 \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial x} T_{H0} \right) \frac{n_{H0}^A}{p_{H0} T_{H0}^{\frac{5}{2}}} \left(\frac{\partial}{\partial x} p_{H0}^A \right) d_4 \\ &+ \frac{n_{H0}^A}{T_{H0}^{\frac{5}{2}}} \left(\frac{\partial}{\partial x} p_{H1}^A \right) \gamma_c + \frac{p_{H1}^A n_{H0}^A}{T_{H0}^{\frac{5}{2}}} \left(\frac{\partial}{\partial x} T_{H0} \right) d_5. \end{aligned}$$

On rappelle que γ_c a été défini en (3.3.53). Par un raisonnement analogue, on obtient

$$u_{1,H2} = \frac{\varphi^B}{n_{H0}^B} - \frac{n_{H1}}{n_{H0}} u_{1,H1},$$

avec

$$\begin{aligned}
\varphi^B &= n_{H0}^B \left(\frac{p_{H1}}{p_{H0}} - \frac{p_{H1}^B}{p_{H0}^B} \right) \left(2\delta_1 u_{1,H1} + \frac{T_{H1}}{\sqrt{T_{H0}}} \delta_2 + \left(\frac{\partial}{\partial x} T_{H0} \right) \frac{\delta_3}{n_{H0}} \right) \\
&+ \frac{\frac{\partial}{\partial x} p_{H0}^B}{p_{H0}} \left(\frac{p_{H1}}{n_{H0} \sqrt{T_{H0}}} \gamma_c + \frac{T_{H1}}{\sqrt{T_{H0}}} \delta_4 + \left(\frac{\partial}{\partial x} T_{H0} \right) \frac{\delta_5}{n_{H0}} \right) \\
&+ \frac{\sqrt{T_{H0}}}{n_{H0}} \left(\frac{\partial}{\partial x} T_{H0} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} p_{H0}^B \right) d_1 \\
&+ \left(\frac{T_{H1} \sqrt{T_{H0}}}{n_{H0}} \left(\frac{\partial}{\partial x} p_{H0}^B \right) + 2 \frac{n_{H0}^B u_{1,H1}}{n_{H0}} \frac{\partial}{\partial x} T_{H0} \right) d_2 \\
&+ n_{H0}^B \sqrt{T_{H0}} \left(\frac{\partial}{\partial x} T_{H0} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\sqrt{T_{H0}}}{p_{H0}} \frac{\partial}{\partial x} p_{H0}^B \right) d_3 \\
&+ \left(\frac{\partial}{\partial x} T_{H0} \right) n_{H0}^B \left(\frac{\partial}{\partial x} p_{H0}^B \right) d_4 + \frac{n_{H0}^B}{T_{H0}^{\frac{5}{2}}} \left(\frac{\partial}{\partial x} p_{H1}^B \right) \gamma_c + \frac{p_{H1}^B n_{H0}^B}{T_{H0}^{\frac{5}{2}}} \left(\frac{\partial}{\partial x} T_{H0} \right) d_5.
\end{aligned} \tag{3.5.95}$$

On a alors le système fluide suivant:

$$\frac{\partial}{\partial x} p_{H1} = 0, \tag{3.5.96}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (n_{H1} u_{1,H1} + n_{H0} u_{1,H2}) = 0, \tag{3.5.97}$$

$$\begin{aligned}
&n_{H0} u_{1,H1} \frac{\partial}{\partial x} T_{H1} + (n_{H0} u_{1,H2} + n_{H1} u_{1,H1}) \frac{\partial}{\partial x} T_{H0} \\
&= -p_{H0} \frac{\partial}{\partial x} u_{1,H1} + \frac{5}{4} \gamma_2 \frac{\partial}{\partial x} \left(T_{H0}^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x} T_{H1} \right),
\end{aligned} \tag{3.5.98}$$

$$u_{1,H2} = \frac{\varphi^A}{n_{H0}^B} - \frac{n_{H1}}{n_{H0}} u_{1,H1}, \tag{3.5.99}$$

$$\varphi^B = \varphi^A, \tag{3.5.100}$$

$$u_{1,H2}^B = 0, \tag{3.5.101}$$

avec

$$\begin{aligned}
\varphi^A &= n_{H0}^A \left(\frac{p_{H1}}{p_{H0}} - \frac{p_{H1}^A}{p_{H0}^A} \right) \left(2\delta_1 u_{1,H1} + \frac{T_{H1}}{\sqrt{T_{H0}}} \delta_2 + \left(\frac{\partial}{\partial x} T_{H0} \right) \frac{\delta_3}{n_{H0}} \right) \\
&+ \frac{\partial_x p_{H0}^A}{p_{H0}} \left(\frac{p_{H1}}{n_{H0} \sqrt{T_{H0}}} \gamma_c + \frac{T_{H1}}{\sqrt{T_{H0}}} \delta_4 + \left(\frac{\partial}{\partial x} T_{H0} \right) \frac{\delta_5}{n_{H0}} \right) \\
&+ \frac{\sqrt{T_{H0}}}{n_{H0}} \left(\frac{\partial}{\partial x} T_{H0} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} p_{H0}^A \right) d_1 + \frac{T_{H1} \sqrt{T_{H0}}}{n_{H0}} \frac{\partial}{\partial x} p_{H0}^A d_2 \\
&+ 2 \frac{n_{H0}^A u_{1,H1}}{n_{H0}} \left(\frac{\partial}{\partial x} T_{H0} \right) d_2 + n_{H0}^A \sqrt{T_{H0}} \left(\frac{\partial}{\partial x} T_{H0} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\sqrt{T_{H0}}}{p_{H0}} \frac{\partial}{\partial x} p_{H0}^A \right) d_3 \\
&+ \left(\frac{\partial}{\partial x} T_{H0} \right) n_{H0}^A \left(\frac{\partial}{\partial x} p_{H0}^A \right) d_4 + \frac{n_{H0}^A}{T_{H0}^{\frac{5}{2}}} \left(\frac{\partial}{\partial x} p_{H1}^A \right) \gamma_c + \frac{p_{H1}^A n_{H0}^A}{T_{H0}^{\frac{5}{2}}} \left(\frac{\partial}{\partial x} T_{H0} \right) d_5.
\end{aligned}$$

et φ^B défini par (3.5.95) où les inconnues sont $p_{H1}, u_{1,H2}^A, u_{1,H2}^B, T_{H1}, n_{H1}$.

3.5.4 Résolution du système fluide d'ordre 2.

De la même manière que pour la résolution du système (3.3.54, 3.3.55, 3.3.56, 3.3.57, 3.3.58), on a le lemme suivant pour le système (3.5.96, 3.5.97, 3.5.98, 3.5.99, 3.5.100).

Lemme 3.5.4. *Il existe $\tau_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $\tau \in \mathbb{R}^*$ satisfaisant $\tau < \tau_0$, le système (3.5.96, 3.5.97, 3.5.98, 3.5.99, 3.5.100) possède une solution vérifiant les conditions de bord:*

$$\begin{aligned}
T_{H1}(-1) &= 2u_{1,H1}(-1)d_{1,\infty,4}^- + b_{1,\infty,4}, \\
T_{H1}(1) &= \frac{T_{II}}{T_I} \left(2u_{1,H1}(1)d_{1,\infty,4}^+ + \frac{T_{II}}{T_I} b_{1,\infty,4} \right), \\
n_{H1}^A(-1) &= \frac{3}{2} T_{H1}(-1) + 2u_{1,H1}(-1)d_{1,\infty,0}^- + b_{1,\infty,4}, \\
n_{H1}^A(1) &= \left(\frac{n_{II}}{n_I} \right) \left(\frac{3}{2} T_{H1}(1) + 2u_{1,H1}(1)d_{1,\infty,4}^+ + \frac{T_{II}}{T_I} b_{1,\infty,4} \right)
\end{aligned}$$

et la contrainte sur n_{H1}^B

$$\int_{-1}^1 n_{H1}^B dx = \tau.$$

De plus, on a l'estimation suivante: pour tout $x \in [-1,1]$,

$$|T_{H1}(x)| \leq \tau. \tag{3.5.102}$$

La preuve du lemme 3.5.4 n'est pas donnée en détail, car elle est tout à fait analogue à celle du lemme 3.4.2. La dernière estimation (3.5.102) s'obtient en calculant T_{H_1} de façon explicite.

Remarque 14. *L'estimation (3.5.102) sera utilisée lors de la preuve du lemme 3.7.1.*

3.5.5 Couche de Knudsen à l'ordre 2.

On rappelle que

$$x' = \frac{1+x}{\varepsilon}, \quad x'' = \frac{1-x}{\varepsilon}.$$

$f_{H_2}^A$ et $f_{H_2}^B$ définis en (3.5.89) et (3.5.90) ne pouvant pas vérifier les conditions aux limites $f_{H_2}^A(-1,v) = f_{H_2}^A(1,v) = 0$ et $f_{H_2}^B(-1,v) = f_{H_2}^B(1,v) = 0$, on rajoute des termes de Knudsen pour chacun des deux bords. On requiert de plus pour ces termes qu'ils aient une limite nulle pour x' et x'' tendant vers l'infini.

De même que pour l'ordre 1, on écrit f_2 , f_2^A et f_2^B sous la forme

$$f_2(x,v) = f_{H_2}(x,v) + f_{K_2}^-(\frac{1+x}{\varepsilon},v) + f_{K_2}^+(\frac{1-x}{\varepsilon},v), \quad (3.5.103)$$

$$f_2^A(x,v) = f_{H_2}^A(x,v) + f_{K_2}^{A-}(\frac{1+x}{\varepsilon},v) + f_{K_2}^{A+}(\frac{1-x}{\varepsilon},v), \quad (3.5.104)$$

$$f_2^B(x,v) = f_{H_2}^B(x,v) + f_{K_2}^{B-}(\frac{1+x}{\varepsilon},v) + f_{K_2}^{B+}(\frac{1-x}{\varepsilon},v). \quad (3.5.105)$$

Proposition 2. *Il existe des conditions de bord en -1 pour les termes de Hilbert du second ordre $f_{H_2}^A$ et $f_{H_2}^B$ définis respectivement par (3.3.47) et (3.3.48) et des termes de Knudsen $f_{K_2}^{A-}(x',v)$ et $f_{K_2}^{B-}(x',v)$, tels que*

$$\begin{aligned} \xi \frac{\partial}{\partial x'} f_{K_2}^{A-}(x',v) &= Q(M^A(-1,v), f_{K_2}^{A-}(x',v)) + Q(f_{K_2}^{A-}(x',v), M(-1,v)) \\ &+ Q(f_{K_1}^{A-}(x',v), f_{K_1}^{A-}(x',v)) + Q(f_{K_1}^{A-}(x',v), \Delta^- M) \\ &+ Q(\Delta^- M^A, f_{K_1}^{A-}(x',v)), \\ \xi \frac{\partial}{\partial x'} f_{K_2}^{B-}(x',v) &= Q(M^B(-1,v), f_{K_2}^{B-}(x',v)) + Q(f_{K_2}^{B-}(x',v), M(-1,v)) \\ &+ Q(f_{K_1}^{B-}(x',v), f_{K_1}^{B-}(x',v)) + Q(f_{K_1}^{B-}(x',v), \Delta^- M) \\ &+ Q(\Delta^- M^B, f_{K_1}^{B-}(x',v)), \end{aligned} \quad (3.5.106)$$

où $f_{K2}^- = f_{K2}^{A-} + f_{K2}^{B-}$ et

$$\begin{aligned} \Delta^- M &= \frac{M - M(-1, v)}{\varepsilon}, \quad \Delta^- M^A = \frac{M^A - M^A(-1, v)}{\varepsilon}, \\ \Delta^- M^B &= \frac{M^B - M^B(-1, v)}{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (3.5.107)$$

De plus, on a la propriété asymptotique suivante: f_{K2}^{A-} et f_{K2}^{B-} peuvent s'écrire sous la forme:

$$\begin{aligned} f_{K2}^{A-}(x', v) &= M^A(-1, v) b_2^{A-}(x', v), \\ f_{K2}^{B-}(x', v) &= M^B(-1, v) b_2^{B-}(x', v), \end{aligned}$$

où pour x' tendant vers $+\infty$, b_2^{A-} et b_2^{B-} convergent exponentiellement vers 0 de la façon suivante:

$$\begin{aligned} \|(1 + |v|)^{\frac{1}{2}} b_2^{A-}(x', v)\|_{\mathcal{H}} &\leq \exp(-\sigma x'), \\ \|(1 + |v|)^{\frac{1}{2}} b_2^{B-}(x', v)\|_{\mathcal{H}} &\leq \exp(-\sigma x') \end{aligned} \quad (3.5.108)$$

pp $x' > 0$ avec $\sigma < 2\gamma_1$, où ν_1 est définie en (3.6.36).

Remarque 15. $\Delta M = \frac{M - M(-1, v)}{\varepsilon}$ vue comme une fonction de x' est bornée sur les intervalles compacts uniformément en ε . D'après le théorème des accroissements finis, il existe x^* tel que

$$\Delta M = \left[\frac{\partial}{\partial x} \ln(n_{H0}) + \frac{\partial}{\partial x} T_{H0} \left(\frac{1}{T_{H0}^2} - \frac{3}{2} \right) \right] (x^*) M(-1, v) x'.$$

Soit

$$|\Delta^- M| \leq \tau |x'| M(-1, v). \quad (3.5.109)$$

Le même résultat est valable pour $\Delta^- M^A$, $\Delta^- M^B$.

Preuve de la proposition 2.

On va appliquer une méthode analogue à celle développée dans le cas d'une seule composante de gaz dans ([6], [5]). D'après ([2]), il existe (b_2^{A-}, b_2^{B-}) et

(d_2^{A-}, d_2^{B-}) solutions uniques de

$$\begin{aligned} \xi \frac{\partial}{\partial x'} b_2^{A-}(x', v) &= \frac{1}{M^A(-1, v)} \left(Q(M^A(-1, v) b_2^{A-}(x', v), M(-1, v)) \right. \\ &+ Q(M^A(-1, v), M(-1, v) b_2^-(x', v)) \\ &+ Q(f_{K1}^{A-}(x', v), f_{K1}^-(x', v)) + Q(f_{K1}^{A-}(x', v), \Delta^- M) \\ &\left. + Q(\Delta^- M^A, f_{K1}^-(x', v)) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi \frac{\partial}{\partial x'} b_2^{B-}(x', v) &= \frac{1}{M^B(-1, v)} \left(Q(M^B(-1, v) b_2^{B-}(x', v), M(-1, v)) \right. \\ &+ Q(M^B(-1, v), M(-1, v) b_2^-(x', v)) \\ &+ Q(f_{K1}^{B-}(x', v), f_{K1}^-(x', v)) + Q(f_{K1}^{B-}(x', v), \Delta^- M) \\ &\left. + Q(\Delta^- M^B, f_{K1}^-(x', v)) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_2^{A-}(0, v) &= -\Psi_{H2}^A(-1, v), \quad \xi > 0, \\ b_2^{B-}(0, v) &= -\Psi_{H2}^B(-1, v), \quad \xi > 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \xi M^A(-1, v) b_2^{A-}(x', v) dv &= 0, \\ \int_{\mathbb{R}^3} \xi M^B(-1, v) b_2^{B-}(x', v) dv &= 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \xi \frac{\partial}{\partial x'} d_2^{A-}(x', v) &= \frac{1}{M^A(-1, v)} \left(Q(M(-1, v) d_2^-(x', v), M^A(-1, v)) \right. \\ &\left. + Q(M(-1, v), M^A(-1, v) d_2^{A-}(x', v)) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi \frac{\partial}{\partial x'} d_2^{B-}(x', v) &= \frac{1}{M^B(-1, v)} \left(Q(M^A(-1, v), M(-1, v) d_2^-(x', v)) \right. \\ &\left. + Q(M^B(-1, v) d_2^{B-}(x', v), M(-1, v)) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_2^{A-}(0, v) &= 0, \quad \xi > 0, \\ d_2^{B-}(0, v) &= 0, \quad \xi > 0, \end{aligned}$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \xi M^A(-1, v) d_2^{A-}(x', v) dv = 1,$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \xi M^B(-1, v) d_2^{B-}(x', v) dv = 1,$$

avec $b_2^- = b_2^{A-} + b_2^{B-}$ et $d_2^- = d_2^{A-} + d_2^{B-}$.

De plus,

$$\begin{aligned} \lim_{x' \rightarrow +\infty} b_2^{A-}(x', v) &= b_{2,\infty,0}^{A-} + b_{2,\infty,4}^- v^2, \\ \lim_{x' \rightarrow +\infty} b_2^{B-}(x', v) &= b_{2,\infty,0}^{B-} + b_{2,\infty,4}^- v^2, \\ \lim_{x' \rightarrow +\infty} d_2^{A-}(x', v) &= d_{2,\infty,0}^{A-} + \xi + d_{2,\infty,4}^- v^2, \\ \lim_{x' \rightarrow +\infty} d_2^{B-}(x', v) &= d_{2,\infty,0}^{B-} + \xi + d_{2,\infty,4}^- v^2, \end{aligned}$$

où $b_{2,\infty,0}^{A-}$, $b_{2,\infty,0}^{B-}$, $b_{2,\infty,4}^-$, $d_{2,\infty,0}^{A-}$, $d_{2,\infty,0}^{B-}$ et $d_{2,\infty,4}^-$ désignent des constantes.

On choisit alors les conditions de bord en -1 pour p_{H2}^A et T_{H2} de la manière suivante:

$$\begin{aligned} T_{H2}(-1) &= 2(u_{1,H2}(-1) + (n_{H1}u_{1,H1})(-1))d_{2,\infty,4}^- + b_{2,\infty,4}^- \\ &\quad - (n_{H1}T_{H1})(-1) - \frac{2}{3}u_{1,H1}^2(-1), \\ p_{H2}^A(-1) &= \frac{5}{2}T_{H2}(-1) + 2(u_{1,H2}(-1) + (u_{1,H1}n_{H1})(-1))d_{2,\infty,0}^{A-} + b_{2,\infty,0}^{A-} \\ &\quad - (n_{H1}^A T_{H1}^A)(-1) - u_{1,H1}^2(-1). \end{aligned}$$

Ainsi, $(f_{K2}^{A-}, f_{K2}^{B-})$ définis par:

$$\begin{aligned} f_{K2}^{A-} &= (2(u_{1,H2}(-1) + (n_{H1}u_{1,H1})(-1))(d_2^{A-} - d_{2,\infty,0}^{A-} - \xi - d_{2,\infty,4}^- v^2) \\ &\quad + (b_2^{A-} - b_{2,\infty,0}^{A-} - b_{2,\infty,4}^- v^2))f_{H0}^A, \\ f_{K2}^{B-} &= (2(u_{1,H2}(-1) + (n_{H1}u_{1,H1})(-1))(d_2^{B-} - d_{2,\infty,0}^{B-} - \xi - d_{2,\infty,4}^- v^2) \\ &\quad + (b_2^{B-} - b_{2,\infty,0}^{B-} - b_{2,\infty,4}^- v^2))f_{H0}^B, \end{aligned}$$

satisfont les équations (3.5.106) et la propriété (3.5.108). \square

Afin de satisfaire les conditions de bord en 1 , on raisonne de manière ana-

logue en choisissant $p_{H_2}^A(1)$ et $T_{H_2}(1)$ de la manière suivante:

$$\begin{aligned} T_{H_2}(1) &= T_{H_0}(1) \left(2(u_{1,H_2}(1) + \left(\frac{n_{H_1}}{n_{H_0}} u_{1,H_1} \right) (1)) d_{2,\infty,4}^+ \right. \\ &\quad \left. + T_{H_0}(1) b_{2,\infty,4}^+ - \frac{n_{H_1}}{n_{H_0}} T_{H_1}(1) \right), \\ p_{H_2}^A(1) &= p_{H_0}^A(1) \left(\frac{5}{2} \left(\frac{T_{H_2}^A}{T_{H_0}}(1) + \left(\frac{n_{H_1}^A}{n_{H_0}} \frac{T_{H_1}^A}{T_{H_0}} \right) (1) \right) + \frac{u_{1,H_1}^2}{T_{H_0}}(1) \right. \\ &\quad \left. - 2 \left(\frac{u_{1,H_2}}{T_{H_0}}(1) + \frac{n_{H_1}}{n_{H_0}} \frac{u_{1,H_1}}{T_{H_0}}(1) \right) d_{2,\infty,0}^{A+} + b_{2,\infty,0}^{A+} \right), \end{aligned}$$

où $f_{K_2}^{A+}$ et $f_{K_2}^{B+}$ sont définis de manière analogue à $f_{K_2}^{A-}$ et $f_{K_2}^{B-}$. De même que précédemment, on pose

$$\begin{aligned} \gamma_{2,\varepsilon}^{A-} &= f_{K_2}^{A+} \left(\frac{2}{\varepsilon}, v \right), \quad \gamma_{2,\varepsilon}^{A+} = f_{K_2}^{A+} \left(\frac{2}{\varepsilon}, v \right), \quad \gamma_{2,\varepsilon}^{B-} = f_{K_2}^{B-} \left(\frac{2}{\varepsilon}, v \right), \\ \gamma_{2,\varepsilon}^{B+} &= f_{K_2}^{B+} \left(\frac{2}{\varepsilon}, v \right), \quad \gamma_{2,\varepsilon}^- = \gamma_{2,\varepsilon}^{A-} + \gamma_{2,\varepsilon}^{B-}, \quad \gamma_{2,\varepsilon}^+ = \gamma_{2,\varepsilon}^{A+} + \gamma_{2,\varepsilon}^{B+}. \end{aligned} \quad (3.5.110)$$

et

$$\begin{aligned} \Delta^+ M &= \frac{M - M(1,v)}{\varepsilon}, \quad \Delta^+ M^A = \frac{M^A - M^A(1,v)}{\varepsilon}, \\ \Delta^+ M^B &= \frac{M^B - M^B(1,v)}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

3.6 Etude du terme reste.

3.6.1 Le terme reste.

Dans ([10]) (resp [14], [15]), les auteurs résolvent l'équation de Boltzmann d'évolution en décomposant la fonction de distribution selon un développement asymptotique et d'un reste, et contrôlent le terme reste. Dans notre cas, on adapte la preuve exposée dans ([14], [15]) à la situation d'un gaz à deux composantes. Le terme reste $\varepsilon^3 f_R^A$ (resp. $\varepsilon^3 f_R^B$) pour f^A (resp. f^B) est défini comme la différence de f^A (resp. f^B) et de son développement asymptotique,

de la façon suivante:

$$\begin{aligned}
f^A(x,v) &= M^A + \varepsilon(f_{H1}^A(x,v) + f_{K1}^{A-}(\frac{1+x}{\varepsilon},v) + f_{K1}^{A+}(\frac{1-x}{\varepsilon},v)) \\
&+ \varepsilon^2(f_{H2}^A(x,v) + f_{K2}^{A-}(\frac{1+x}{\varepsilon},v) + f_{K2}^{A+}(\frac{1-x}{\varepsilon},v)) \\
&+ \varepsilon^3 f_R^A(x,v),
\end{aligned} \tag{3.6.1}$$

$$\begin{aligned}
f^B(x,v) &= M^B + \varepsilon\left(f_{H1}^B(x,v) + f_{K1}^{B-}(\frac{1+x}{\varepsilon},v) + f_{K1}^{B+}(\frac{1-x}{\varepsilon},v)\right) \\
&+ \varepsilon^2(f_{H2}^B(x,v) + f_{K2}^{B-}(\frac{1+x}{\varepsilon},v) + f_{K2}^{B+}(\frac{1-x}{\varepsilon},v)) \\
&+ \varepsilon^3 f_R^B(x,v).
\end{aligned} \tag{3.6.2}$$

En injectant les expressions précédentes dans l'équation (3.2.1) et en tenant compte de (3.5.87, 3.5.88, 3.4.78, 3.3.42, 3.3.43, 3.5.106), on obtient les équations à satisfaire par f_R^A (resp. f_R^B).

$$\begin{aligned}
\xi \frac{\partial}{\partial x} f_R^A &= \frac{1}{\varepsilon} \left(Q(M^A, f_R) + Q(f_R^A, M) \right) + Q(f_1^A + \varepsilon f_2^A, f_R) \\
&+ Q(f_R^A, f_1 + \varepsilon f_2) + \varepsilon^2 Q(f_R^A, f_R) + \varepsilon^3 A,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\xi \frac{\partial}{\partial x} f_R^B &= \frac{1}{\varepsilon} \left(Q(M^B, f_R) + Q(f_R^B, M) \right) + Q(f_1^B + \varepsilon f_2^B, f_R) \\
&+ Q(f_R^B, f_1 + \varepsilon f_2) + \varepsilon^2 Q(f_R^B, f_R) + \varepsilon^3 B,
\end{aligned}$$

avec

$$f_R = f_R^A + f_R^B,$$

et

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{\varepsilon} \left(-\xi \frac{\partial}{\partial x} f_{H2}^A + Q(f_1^A, f_2) + Q(f_2^A, f_1) + \varepsilon Q(f_2^A f_2) \right. \\
&+ Q(f_{K2}^{A-}(x',v), \Delta^+ M) + Q(\Delta^+ M^A, f_{K2}^-(x',v)) \\
&+ Q(f_{K2}^{A+}(x'',v), \Delta^- M) + Q(\Delta^- M^A, f_{K2}^+(x'',v)) \\
&\left. + \frac{1}{\varepsilon} \left(Q(f_{K1}^{A+}(x'',v), f_{K1}^-(x',v)) + Q(f_{K1}^{A-}(x',v), f_{K1}^+(x'',v)) \right) \right),
\end{aligned} \tag{3.6.3}$$

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{1}{\varepsilon} \left(-\xi \frac{\partial}{\partial x} f_{H2}^B + Q(f_1^B, f_2) + Q(f_2^B, f_1) + \varepsilon Q(f_2^B, f_2) \right. \\
 &+ \frac{1}{\varepsilon} \left(Q(f_{K2}^{B-}(x', v) \Delta^+ M) + Q(\Delta^+ M^B, f_{K2}^-(x', v)) \right. \\
 &+ \left. \left. Q(f_{K2}^{B+}(x'', v), \Delta^- M) + Q(\Delta^- M^B, f_{K2}^+(x'', v)) \right) \right) \\
 &+ \frac{1}{\varepsilon} \left(Q(f_{K1}^{B+}(x'', v), f_{K1}^-(x', v)) + Q(f_{K1}^{B-}(x', v), f_{K1}^+(x'', v)) \right)
 \end{aligned} \tag{3.6.4}$$

On rappelle que les quantités f_1 , f_1^A , f_1^B , f_2 , f_2^A , f_2^B sont définies respectivement par les équations (3.6.35, 3.4.76, 3.4.77, 3.5.103, 3.5.104, 3.5.105). Par ailleurs, f_R^A et f_R^B vérifient des conditions de bord suivantes:

$$\begin{aligned}
 f_R^A(-1, v) &= -\frac{\gamma_{1,\varepsilon}^{A,-} + \varepsilon \gamma_{2,\varepsilon}^{A,-}}{\varepsilon^2}, \quad \xi > 0, \\
 f_R^A(1, v) &= -\frac{\gamma_{1,\varepsilon}^{A,+} + \varepsilon \gamma_{2,\varepsilon}^{A,+}}{\varepsilon^2}, \quad \xi < 0, \\
 f_R^B(-1, v) &= \alpha_{R^B}^- M_-(v) - \frac{\gamma_{1,\varepsilon}^{B,-} + \varepsilon \gamma_{2,\varepsilon}^{B,-}}{\varepsilon^2}, \quad \xi > 0, \\
 f_R^B(1, v) &= \alpha_{R^B}^+ M_+(v) - \frac{\gamma_{1,\varepsilon}^{B,+} + \varepsilon \gamma_{2,\varepsilon}^{B,+}}{\varepsilon^2}, \quad \xi < 0,
 \end{aligned}$$

où $\alpha_{R^B}^-$ et $\alpha_{R^B}^+$ sont donnés dans ce qui suit par les formules (3.6.11) et (3.6.13). On rappelle que les termes $\gamma_{1,\varepsilon}^-$, $\gamma_{1,\varepsilon}^+$, $\gamma_{1,\varepsilon}^{A,-}$, $\gamma_{1,\varepsilon}^{A,+}$, $\gamma_{1,\varepsilon}^{B,-}$, $\gamma_{1,\varepsilon}^{B,+}$, $\gamma_{2,\varepsilon}^-$, $\gamma_{2,\varepsilon}^+$, $\gamma_{2,\varepsilon}^{A,-}$, $\gamma_{2,\varepsilon}^{A,+}$, $\gamma_{2,\varepsilon}^{B,-}$, $\gamma_{2,\varepsilon}^{B,+}$ sont définis par (3.4.82, 3.5.110).

Afin de simplifier l'étude de f_R^B , on change d'inconnue en utilisant la décomposition en somme directe: $L^2 = \mathbb{R}M^B \oplus (\mathbb{R}M^B)^\perp$. Pour toute $f_R^B \in L^2$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$f_R^B = \lambda M^B + R^B.$$

La condition

$$\int_{-1}^1 \int_{\mathbb{R}^3} f_R^B dv dx = 0$$

détermine

$$\lambda = -\frac{1}{m} \int R^B dx dv. \tag{3.6.5}$$

Pour toute fonction $R(x,v)$, on définit $I(R)$ par

$$I(R) = -\frac{1}{m} \int R dx dv.$$

On effectue ensuite le changement d'inconnues suivant:

$$\begin{aligned} f_R^A &= R^A, \\ f_R^B &= I(R^B)M^B + R^B. \end{aligned}$$

de telle sorte que R^A , R^B et $R = R^A + R^B$ sont solutions des équations suivantes:

$$\begin{aligned} \xi \frac{\partial}{\partial x} R^A &= \frac{1}{\varepsilon} (Q(M^A, R) + Q(R^A, M)) + \mathcal{N}_A(R) + \tilde{\mathcal{N}}_{A*}(R^A, R^B) \\ &+ \varepsilon^2 \left(Q(R^A, R) + I(R^B)Q(R^A, M^B) + \varepsilon A \right), \end{aligned} \quad (3.6.6)$$

$$\begin{aligned} \xi \frac{\partial}{\partial x} R^B &= \frac{1}{\varepsilon} (Q(M^B, R) + Q(R^B, M)) + \mathcal{N}_B(R, R^B) \\ &+ \varepsilon^2 \left(I(R^B)(Q(M^B, R) + Q(R^B, M^B)) + Q(R^B, R) + \varepsilon B \right) \end{aligned} \quad (3.6.7)$$

où

$$\mathcal{N}_A(R) = Q(f_1^A + \varepsilon f_2^A, R), \quad (3.6.8)$$

$$\tilde{\mathcal{N}}_{A*}(R^A, R^B) = Q(R^A, f_1 + \varepsilon f_2) + I(R^B)Q(f_1^A + \varepsilon f_2^A, M^B), \quad (3.6.9)$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_B(R^B, R) &= Q(f_1^B + \varepsilon f_2^B, R) + Q(R^B, f_1 + \varepsilon f_2) \\ &+ I(R^B) \left[Q(f_1^B + \varepsilon f_2^B, M^B) + Q(M^B, f_1 + \varepsilon f_2) - \xi \frac{\partial}{\partial x} M^B \right]. \end{aligned} \quad (3.6.10)$$

On choisit alors

$$\alpha_{R^B}^- = I(R^B)\sqrt{\pi} \quad (3.6.11)$$

et les conditions de bord pour R , R^A et R^B s'écrivent:

$$\begin{aligned} R^A(-1,v) &= \zeta^{A-}, \quad \xi > 0, & R^A(1,v) &= \zeta^{A+}, \quad \xi < 0, \\ R^B(-1,v) &= \zeta^{B-}, \quad \xi > 0, & R^B(1,v) &= \beta_{RB} M_+ + \zeta^{B+}, \quad \xi < 0, \end{aligned} \quad (3.6.12)$$

avec

$$\beta_{RB} = \alpha_{RB}^+ - \alpha_{RB}^- \left(\frac{T_{II}}{T_I} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{n_{II}}{n_I} \right) \quad (3.6.13)$$

et

$$\begin{aligned} \zeta^{A-} &= -\frac{\gamma_{1,\varepsilon}^{A-} + \varepsilon\gamma_{2,\varepsilon}^{A-}}{\varepsilon^2}, & \zeta^{A+} &= -\frac{\gamma_{1,\varepsilon}^{A+} + \varepsilon\gamma_{2,\varepsilon}^{A+}}{\varepsilon^2}, \\ \zeta^{B-} &= -\frac{\gamma_{1,\varepsilon}^{B-} + \varepsilon\gamma_{2,\varepsilon}^{B-}}{\varepsilon^2}, & \zeta^{B+} &= -\frac{\gamma_{1,\varepsilon}^{B+} + \varepsilon\gamma_{2,\varepsilon}^{B+}}{\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

La condition

$$\int_{\mathbb{R}^3} \xi R^B(1,v) dv = 0$$

détermine

$$\beta_{RB} = \int_{\xi > 0} \xi R^B(1,v) dv + \int_{\xi < 0} \xi \zeta^+ dv$$

et par conséquent α_{RB}^+ .

3.6.2 Un problème linéarisé.

Les solutions (R^A, R^B) des équations (3.6.6, 3.6.7) vont être construites comme les limites respectives d'une suite d'itérations. Dans un premier temps, on considère les problèmes linéarisés suivants:

$$\xi \frac{\partial}{\partial x} R^A = \frac{1}{\varepsilon} \left(Q(M^A, R) + Q(R^A, M) \right) + \mathcal{N}_A(R) + \tilde{\mathcal{N}}_{A*}(R^A, R^B) + \varepsilon^2 D^A, \quad (3.6.14)$$

$$\xi \frac{\partial}{\partial x} R^B = \frac{1}{\varepsilon} \left(Q(M^B, R) + Q(R^B, M) \right) + \mathcal{N}_B(R^B, R) + \varepsilon^2 D^B, \quad (3.6.15)$$

satisfaisant les conditions de bord (3.6.12). On rappelle que les quantités $\mathcal{N}_A(R)$, $\tilde{\mathcal{N}}_{A^*}(R^A, R^B)$, $\mathcal{N}_B(R^B, R)$ sont définies respectivement par (3.6.8, 3.6.9, 3.6.10). On va estimer les termes R , R^A , R^B en fonction de (D, D^A, D^B) et des conditions aux limites (3.6.12). Ensuite on traitera le cas non linéaire.

3.6.3 Décomposition du terme reste.

L'étude de l'équation de Boltzmann linéarisée s'effectue par un changement d'inconnue afin de transformer l'opérateur $f \mapsto Q(M, f)$ en l'opérateur $f \mapsto -\frac{2}{M}Q(M, M^{-\frac{1}{2}}f)$. Cependant, lorsque la Maxwellienne M dépend des variables x et t , ce procédé rajoute un terme supplémentaire $M^{-\frac{1}{2}}\xi \frac{\partial}{\partial x}(M^{\frac{1}{2}}f)$ qui se comporte comme $|v|^3f$ et ne possède pas de signe. Pour pallier cette difficulté, on cherche comme dans ([10], [14], [15], [12]) R , R^A et R^B sous la forme:

$$R = \sqrt{M}g + \sqrt{M_*}h, \quad (3.6.16)$$

$$R^A = \sqrt{M^A}g^A + \sqrt{M_*}h^A, \quad (3.6.17)$$

$$R^B = \sqrt{M^B}g^B + \sqrt{M_*}h^B, \quad (3.6.18)$$

où M_* est la Maxwellienne globale suivante:

$$M_*(v) = \frac{1}{(\pi T_*)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{v^2}{T_*}\right),$$

avec $T_* > \sup_{x \in [-1, 1]} T_{H0}(x)$. De ce fait, il existe $c > 0$ tel que pour tout $(x, v) \in [-1, 1] \times \mathbb{R}^3$,

$$M_* \geq cM, \quad M_* \geq cM^A, \quad M_* \geq cM^B.$$

Comme $R = R^A + R^B$,

$$\begin{aligned} g &= \frac{\sqrt{n^A}}{\sqrt{n}}g^A + \frac{\sqrt{n^B}}{\sqrt{n}}g^B, \\ h &= h^A + h^B. \end{aligned} \quad (3.6.19)$$

En utilisant les relations (3.6.16, 3.6.17, 3.6.18), les équations (3.6.14) et (3.6.15) peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} & \left(\xi \frac{\partial}{\partial x} g^A \right) \sqrt{M^A} + \frac{\xi}{2\sqrt{M^A}} \left(\frac{\partial}{\partial x} M^A \right) g^A + \left(\xi \frac{\partial}{\partial x} h^A \right) \sqrt{M_*} \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \left(Q(\sqrt{M^A} g^A, M) + Q(M, \sqrt{M} g) + Q(\sqrt{M_*} h^A, M) + Q(M^A, \sqrt{M_*} h) \right) \\ & \quad + Q(\sqrt{M^A} g^A + \sqrt{M_*} h^A, f_1 + \varepsilon f_2) + Q(f_1^A + \varepsilon f_2^A, \sqrt{M} g + \sqrt{M_*} h) \\ & \quad + I(\sqrt{M^B} g^B + \sqrt{M_*} h^B) Q(f_1^A + \varepsilon f_2^A, M^B) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \left(\xi \frac{\partial}{\partial x} g^B \right) \sqrt{M^B} + \frac{\xi}{2\sqrt{M^B}} \left(\frac{\partial}{\partial x} M^B \right) g^B + \left(\xi \frac{\partial}{\partial x} h^B \right) \sqrt{M_*} \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \left(Q(\sqrt{M^B} g^B, M) + Q(M, \sqrt{M} g) + Q(\sqrt{M_*} h^B, M) + Q(M^B, \sqrt{M_*} h) \right) \\ & \quad + Q(\sqrt{M^B} g^B + \sqrt{M_*} h^B, f_1 + \varepsilon f_2) + Q(f_1^B + \varepsilon f_2^B, \sqrt{M} g + \sqrt{M_*} h) \\ & + I(\sqrt{M^B} g^B + \sqrt{M_*} h^B) \left(Q(M^B, f_1^B + \varepsilon f_2^B) + Q(f_1^B + \varepsilon f_2^B, M^B) - \xi \frac{\partial}{\partial x} M^B \right). \end{aligned}$$

On considère la norme suivante:

$$\|f\| = \left(\int_{[-1,1] \times \mathbb{R}^3} (1 + |v|) f^2(x, v) dx dv \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.6.20)$$

et le système orthogonal pour le produit scalaire issu de la norme $\| \cdot \|$, ψ_0 , ψ_1 , ψ_4 défini par:

$$\psi_0 = \sqrt{M}, \quad \psi_1 = \xi \sqrt{M} \quad \text{et} \quad \psi_4 = \left(v^2 - \frac{3}{2} T \right) \sqrt{M}.$$

Cette norme s'étend aux termes de bord, h_-^A , h_+^A , h_-^A et h_+^A . Si f_- est l'un de ces termes

$$\|f_-\| = \left(\int_{\mathbb{R}^3} (1 + |v|) f_-^2 dv \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On décompose ensuite g selon ses parties hydrodynamique $\hat{g} + g_1$ et non hydrodynamique \bar{g} . \hat{g} peut s'écrire selon la formule:

$$\hat{g} = p_0(x) \psi_0 + p_4(x) \psi_4. \quad (3.6.21)$$

Pour les composantes A et B , on définit de même les systèmes orthogonaux suivants:

$$\begin{aligned}\psi_0^A &= \sqrt{M^A}, & \psi_1^A &= \xi\sqrt{M^A} & \text{et} & & \psi_4^A &= (v^2 - \frac{3}{2}T)\sqrt{M^A}, \\ \psi_0^B &= \sqrt{M^B}, & \psi_1^B &= \xi\sqrt{M^B} & \text{et} & & \psi_4^B &= (v^2 - \frac{3}{2}T)\sqrt{M^B}.\end{aligned}$$

g^A et g^B s'écrivent alors selon leurs parties hydrodynamiques $\hat{g}^A + g_1^A$ et $\hat{g}^B + g_1^B$ et non-hydrodynamique \bar{g}^A et \bar{g}^B , avec \hat{g}^A et \hat{g}^B qui se décomposent selon:

$$\begin{aligned}\hat{g}^A &= p_0^A\psi_0^A + p_4^A\psi_4^A, \\ \hat{g}^B &= p_0^B\psi_0^B + p_4^B\psi_4^B\end{aligned}\tag{3.6.22}$$

et

$$g_1^A = p_1^A\psi_1^A, \quad g_1^B = p_1^B\psi_1^B.\tag{3.6.23}$$

Remarque 16. *D'après l'expression du noyau de l'opérateur de Boltzmann linéarisé pour un gaz à deux composantes, on a: $p_1^A = p_1^B$ et $p_4^A = p_4^B$. Ces deux égalités interviennent de façon décisive dans la preuve de la propriété 4 qui permet de contrôler le terme reste d'un problème linéarisé pour une norme L^2 à poids.*

Par unicité de la décomposition de g ,

$$\hat{g} = \frac{\sqrt{n^A}}{\sqrt{n}}\hat{g}^A + \frac{\sqrt{n^B}}{\sqrt{n}}\hat{g}^B, \quad g_1 = \frac{\sqrt{n^A}}{\sqrt{n}}g_1^A + \frac{\sqrt{n^B}}{\sqrt{n}}g_1^B, \quad \bar{g} = \frac{\sqrt{n^A}}{\sqrt{n}}\bar{g}^A + \frac{\sqrt{n^B}}{\sqrt{n}}\bar{g}^B.$$

Les couples (g^A, h^A) et (g^B, h^B) sont définis comme étant les solutions des systèmes:

$$\begin{aligned}\xi \frac{\partial}{\partial x} g^A + \mu^A \hat{g}^A &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{M^A}} (Q(\sqrt{M^A} g^A, M) + Q(M^A, \sqrt{M} g)) \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \chi_\gamma \sigma_A^{-1} (K_*^A(h) + K_*^1(h^A)) + L_A^1(\hat{g}, \hat{g}^A) + \tilde{L}_A^1(\hat{g}^B),\end{aligned}\tag{3.6.24}$$

$$\begin{aligned}\xi \frac{\partial}{\partial x} h^A + \mu^A \sigma^A (\bar{g}^A + g_1^A) &= \frac{1}{\varepsilon} \bar{\chi}_\gamma K_*^A(h) + \frac{1}{\varepsilon} (-\nu + \bar{\chi}_\gamma K_*^1) h^A \\ &+ N_{A*}(\sigma(g_1 + \bar{g}) + h) \\ &+ \tilde{N}_{A*}(\sigma^A(\bar{g}^A + g_1^A) + h^A, \sigma^B(\bar{g}^B + g_1^B) + h^B) \\ &+ \varepsilon^2 d^A.\end{aligned}\tag{3.6.25}$$

et

$$\begin{aligned} \xi \frac{\partial}{\partial x} g^B + \mu^B \hat{g}^B &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{M^B}} (Q(M, \sqrt{M^B} g^B) + Q(\sqrt{M} g, M^B)) \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \chi_\gamma \sigma_B^{-1} (K_*^B(h) + K_*^1(h^B)) + L_B^1(\hat{g}, \hat{g}^B), \end{aligned} \quad (3.6.26)$$

$$\begin{aligned} \xi \frac{\partial}{\partial x} h^B + \mu^B \sigma^B (\bar{g}^B + g_1^B) &= \frac{1}{\varepsilon} \bar{\chi}_\gamma K_*^B(h) + \frac{1}{\varepsilon} (-\nu + \bar{\chi}_\gamma K_*^1) h^B \\ &+ N_{B*}(\sigma(\bar{g} + g_1) + h) \\ &+ \tilde{N}_*^B(\sigma^B(\bar{g}^B + g_1^B) + h^B) + \varepsilon^2 d^B, \end{aligned} \quad (3.6.27)$$

où

$$d^A = M_*^{-\frac{1}{2}} D^A, \quad d^B = M_*^{-\frac{1}{2}} D^B,$$

$$\chi_\gamma(v) = 1, \quad |v| \leq \gamma,$$

$$\chi_\gamma(v) = 0, \quad |v| \geq \gamma,$$

et

$$\bar{\chi}_\gamma = 1 - \chi_\gamma,$$

$$K_*^A(f) = \frac{1}{\sqrt{M_*}} Q(M^A, \sqrt{M_*} f),$$

$$K_*^B(f) = \frac{1}{\sqrt{M_*}} Q(M^B, \sqrt{M_*} f),$$

$$\begin{aligned} L_B^1(\hat{g}, \hat{g}^B) &= \frac{1}{\sqrt{M^B}} (Q(f_1^B + \varepsilon f_2^B, \sqrt{M} \hat{g}) + Q(\sqrt{M^B} \hat{g}^B, f_1 + \varepsilon f_2)) \\ &- \frac{1}{m} \frac{1}{\sqrt{M^B}} \left(\int \sqrt{M^B} \hat{g}^B dv dx \right) (Q(f_1^B + \varepsilon f_2^B, M^B) \\ &+ Q(M^B, f_1 + \varepsilon f_2) - \xi \frac{\partial}{\partial x} M^B), \end{aligned} \quad (3.6.28)$$

$$L_A^1(\hat{g}, \hat{g}^A) = \frac{1}{\sqrt{M^A}} \left(Q(\sqrt{M^A} \hat{g}^A, f_1 + \varepsilon f_2) + Q(f_1^A + \varepsilon f_2^A, \sqrt{M} \hat{g}) \right), \quad (3.6.29)$$

$$\tilde{L}_A^1(\hat{g}^B) = -\frac{1}{m} \frac{1}{\sqrt{M^A}} Q(f_1^A + \varepsilon f_2^A, M^B) \left(\int \sqrt{M^B} \hat{g}^B dv dx \right), \quad (3.6.30)$$

$$N_{A^*}(f) = \frac{1}{\sqrt{M_*}} Q(f_1^A + \varepsilon f_2^A, \sqrt{M_*} f), \quad (3.6.31)$$

$$N_{B^*}(f) = \frac{1}{\sqrt{M_*}} Q(f_1^B + \varepsilon f_2^B, \sqrt{M_*} f), \quad (3.6.32)$$

$$\begin{aligned} \tilde{N}_*^A(f^A, f^B) &= \frac{1}{\sqrt{M_*}} Q(\sqrt{M_*} f^A, f_1 + \varepsilon f_2) \\ &\quad - \frac{1}{m} \frac{1}{\sqrt{M_*}} Q(f_1^A + \varepsilon f_2^A, M^B) \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 \sqrt{M_*} f^B dv dx, \end{aligned} \quad (3.6.33)$$

$$\begin{aligned} \tilde{N}_*^B(f^B) &= \frac{1}{\sqrt{M_*}} Q(\sqrt{M_*} f^B, f_1 + \varepsilon f_2) \\ &\quad - \frac{1}{m} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 \sqrt{M_*} f^B dv dx \right) \left(Q(f_1^B + \varepsilon f_2^B, M^B) \right. \\ &\quad \left. + Q(M^B, f_1 + \varepsilon f_2) - \xi \frac{\partial}{\partial x} M^B \right) \end{aligned} \quad (3.6.34)$$

et $Q(M, \sqrt{M_*} h^A)$ se décompose selon

$$\frac{1}{\sqrt{M_*}} Q(M, \sqrt{M_*} h^A) = (-\nu + K_*^1) h^A, \quad (3.6.35)$$

où ν , qui est appelée fréquence de collision, est définie par:

$$\nu(x, v) = \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} \langle v_* - v, \omega \rangle M(x, v_*) dv_* dx.$$

Remarque 17. Dans le cas des sphères dures, il existe deux constantes ν_0 et ν_1 telles que

$$\nu_0(1 + |v|) \leq \nu(x, v) \leq \nu_1(1 + |v|). \quad (3.6.36)$$

De plus, on demande à g^A , h^A , g^B , h^B de vérifier les conditions de bord suivantes

$$\begin{aligned} g^A(-1, v) &= 0, \quad \xi > 0, \\ g^A(1, v) &= 0, \quad \xi < 0, \\ h^A(-1, v) &= \zeta^{A-} M_*^{-\frac{1}{2}}, \quad \xi > 0, \\ h^A(1, v) &= \zeta^{A+} M_*^{-\frac{1}{2}}, \quad \xi < 0 \end{aligned} \quad (3.6.37)$$

et

$$\begin{aligned}
g^B(-1, v) &= 0, \quad \xi > 0, \\
g^B(1, v) &= \beta_{g^B} M_+(v) (M^B)^{-\frac{1}{2}}(1, v), \quad \xi < 0, \\
h^B(-1, v) &= M_*^{-\frac{1}{2}} \zeta^{B-}, \quad \xi > 0, \\
h^B(1, v) &= M_*^{-\frac{1}{2}} (\beta_{h^B} M_+ + \zeta^{B+}), \quad \xi < 0,
\end{aligned} \tag{3.6.38}$$

avec les notations suivantes ([14], [15]):

$$\beta_{g^B} = \int_{\xi > 0} \xi \sqrt{M^B} g^B(1, v) dv, \tag{3.6.39}$$

$$\beta_{h^B} = \int_{\xi > 0} \xi \sqrt{M_*} h^B(1, v) dv + \int_{\xi < 0} \xi \zeta^+ dv, \tag{3.6.40}$$

$$\begin{aligned}
\mu^A &= \xi \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\ln(M^A)), \quad \sigma^A = \sqrt{\frac{M^A}{M_*}}, \\
\mu^B &= \xi \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\ln(M^B)), \quad \sigma^B = \sqrt{\frac{M^B}{M_*}}.
\end{aligned}$$

On définit également les fonctions h_-^A , h_+^A , h_-^B et h_+^B de la manière suivante

$$\begin{aligned}
h_-^A &= M_*^{-\frac{1}{2}} \zeta^{A-}, \quad \xi > 0, \quad h_-^A = 0, \quad \xi < 0, \\
h_+^A &= M_*^{-\frac{1}{2}} \zeta^{A+}, \quad \xi < 0, \quad h_+^A = 0, \quad \xi > 0, \\
h_-^B &= M_*^{-\frac{1}{2}} \zeta^{B-}, \quad \xi > 0, \quad h_-^B = 0, \quad \xi < 0, \\
h_+^B &= M_*^{-\frac{1}{2}} \zeta^{B+}, \quad \xi < 0, \quad h_+^B = 0, \quad \xi > 0.
\end{aligned}$$

Les termes restes R^A et R^B vont être contrôlés en utilisant la norme suivante:

$$|f|_{r, \beta_0} = \sup_{x \in [-1, 1]} \sup_{v \in \mathbb{R}^3} (1 + |v|)^r |f(x, v)| \exp(\beta_0 v^2), \tag{3.6.41}$$

pour un β_0 convenablement choisi. On utilisera la même notation pour les fonctions ne dépendant que de la variable v .

Dans un premier temps, on établit l'estimation suivante sur les solutions (R^A, R^B) du système linéarisé (3.6.14, 3.6.15), avec (3.6.12).

Proposition 3. *Pour tout $r \geq 3$, il existe c, ε_0, η_0 et β_0 tels que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$ et $\eta < \eta_0$, R^A et R^B satisfont les estimations:*

$$\begin{aligned} |R^A|_{r,\beta_0} + |R^B|_{r,\beta_0} &\leq c\varepsilon^{\frac{1}{2}}(|D^A|_{r-1,\beta_0} + |D^B|_{r-1,\beta_0}) \\ &+ \frac{c}{\varepsilon^2}(|\zeta^{A-}|_{r,\beta_0} + |\zeta^{B-}|_{r,\beta_0} + |\zeta^{A+}|_{r,\beta_0} + |\zeta^{B+}|_{r,\beta_0}). \end{aligned}$$

Ensuite, on en déduit le principal résultat de ce chapitre:

Théorème 3.6.1. *Pour n_{II} assez proche de n_I , pour certains T_{II} assez proche de T_I et ε assez petit, il existe une solution (f^A, f^B) du système (3.2.1, 3.2.3, 3.2.4, 3.2.5, 3.2.6) de la forme*

$$(f^A, f^B) = (f_{H0}^A + \varepsilon f_1^A + \varepsilon^2 f_2^A + \varepsilon^3 f_R^A, f_{H0}^B + \varepsilon f_1^B + \varepsilon^2 f_2^B + \varepsilon^3 f_R^B)$$

où

$$\|f_R^A\|_\infty + \|f_R^B\|_\infty \leq c\varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$

Remarque 18. *Les hypothèses du théorème sont obtenues dès que les hypothèses des lemmes (3.4.2) et (3.5.4) sont satisfaites.*

3.6.4 Forme exponentielle.

Afin d'estimer les termes restes, on utilise la forme exponentielle des équations (3.6.24, 3.6.25, 3.6.26, 3.6.27). On considère f solution de

$$\xi \frac{\partial}{\partial x} f + \frac{1}{\varepsilon} \nu f = \frac{1}{\varepsilon} G, \quad (3.6.42)$$

vérifiant les conditions de bord

$$f(-1, v) = f_-, \quad \xi > 0, \quad f(1, v) = f_+, \quad \xi < 0. \quad (3.6.43)$$

Dans la suite de notre étude, on utilisera les notations suivantes ([14]),

$$\phi_{x,x'} = \int_{x'}^x \nu(z, v) dz,$$

$$U_\varepsilon G(x, v) = \frac{1}{\varepsilon \xi} \int_{-1}^x G(x', v) \exp\left(-\frac{\phi_{x,x'}}{\varepsilon \xi}\right) dx', \quad \xi > 0,$$

$$U_\varepsilon G(x, v) = -\frac{1}{\varepsilon \xi} \int_x^1 G(x', v) \exp\left(-\frac{\phi_{x, x'}}{\varepsilon \xi}\right) dx', \quad \xi < 0,$$

$$V_\varepsilon^- f^- = \chi_{\{\xi > 0\}} f^- \exp\left(-\frac{\phi_{x, -1}}{\varepsilon \xi}\right)$$

et

$$V_\varepsilon^+ f^+ = \chi_{\{\xi < 0\}} f^+ \exp\left(\frac{\phi_{1, x}}{\varepsilon \xi}\right).$$

D'après la forme exponentielle de l'équation (3.6.42, 3.6.43), sa solution peut s'écrire sous la forme:

$$f = V_\varepsilon^+ f^+ + V_\varepsilon^- f^- + U_\varepsilon G.$$

Les équations (3.6.24, 3.6.25, 3.6.26, 3.6.27) peuvent s'écrire sous la forme (3.6.42). En effet, l'équation (3.6.24) peut s'écrire:

$$\xi \frac{\partial}{\partial x} g^A + \frac{\nu}{\varepsilon} g^A = \frac{1}{\varepsilon} (K g^A + S^A), \quad (3.6.44)$$

avec

$$\begin{aligned} S^A &= \frac{1}{\sqrt{M^A}} Q(M^A, \sqrt{M} g) + \chi_\gamma \sigma_A^{-1} (K_*^A h + K_*^1 h^A) - \varepsilon \mu^A \hat{g}^A \\ &+ \varepsilon L_A^1(\hat{g}, \hat{g}^A) + \varepsilon L_A^1(\hat{g}^B) \end{aligned} \quad (3.6.45)$$

L'équation (3.6.25) peut s'écrire:

$$\xi \frac{\partial}{\partial x} h^A + \frac{1}{\varepsilon} \nu h^A = \frac{1}{\varepsilon} (\bar{\chi}_\gamma K_*^1 h^A + Z^A), \quad (3.6.46)$$

avec

$$\begin{aligned} Z^A &= -\varepsilon \mu^A \sigma^A (\bar{g}^A + g_1^A) + \bar{\chi}_\gamma K_*^A h + \varepsilon N_{A*} (\sigma (\bar{g} + g_1) + h) \\ &+ \varepsilon \tilde{N}_*^A (\sigma^A (\bar{g}^A + g_1^A) + h^A, \sigma^B \bar{g}^B + h^B) + \varepsilon^3 d^A. \end{aligned} \quad (3.6.47)$$

L'équation (3.6.26) peut s'écrire

$$\xi \frac{\partial}{\partial x} g^B + \frac{\nu}{\varepsilon} g^B = \frac{1}{\varepsilon} (K g^B + S^B), \quad (3.6.48)$$

avec

$$S^B = \frac{1}{\sqrt{M^B}} Q(M^B, \sqrt{M}g) + \chi_\gamma \sigma_B^{-1} (K_*^B h + K_*^1 h^B) - \varepsilon \mu^B \hat{g}^B + \varepsilon L_B^1(\hat{g}, \hat{g}^B). \quad (3.6.49)$$

L'équation (3.6.27) peut s'écrire:

$$\xi \frac{\partial}{\partial x} h^B + \frac{1}{\varepsilon} \nu h^B = \frac{1}{\varepsilon} (\bar{\chi}_\gamma K_*^1 h^B + Z^B), \quad (3.6.50)$$

avec

$$\begin{aligned} Z^B &= -\varepsilon \mu^B \sigma^B (\bar{g}^B + g_1^B) + \bar{\chi}_\gamma K_*^B h + \varepsilon N_{B*} (\sigma(\bar{g} + g_1) + h) \\ &+ \varepsilon \tilde{N}_*^B (\sigma^B (\bar{g}^B + g_1^B) + h^B) + \varepsilon^3 d^B. \end{aligned} \quad (3.6.51)$$

On multiplie l'équation (3.6.24) par $\sqrt{M^A}$ et (3.6.26) par $\sqrt{M^B}$ et on ajoute les deux équations obtenues puis on ajoute les équations (3.6.25) et (3.6.27). On obtient alors compte tenu des relations (3.6.19) que g et h sont solutions des équations

$$\xi \frac{\partial}{\partial x} g + \frac{1}{\varepsilon} \nu g = \frac{1}{\varepsilon} (Kg + S), \quad (3.6.52)$$

avec

$$S = \chi_\gamma \sigma^{-1} K_* h - \varepsilon \mu \hat{g} + \varepsilon L^1(\hat{g}^B, \hat{g}), \quad (3.6.53)$$

$$\tilde{L} = K - \nu,$$

$$\begin{aligned} L^1(\hat{g}^B, \hat{g}) &= \frac{1}{\sqrt{M}} (Q(f_1 + \varepsilon f_2, \sqrt{M} \hat{g}) + Q(\sqrt{M} \hat{g}, f_1 + \varepsilon f_2)) \\ &- \frac{1}{m} \frac{1}{\sqrt{M}} \left(\int \sqrt{M^B} \hat{g}^B dv dx \right) \left(Q(f_1 + \varepsilon f_2, M^B) \right. \\ &\left. + Q(M^B, f_1 + \varepsilon f_2) - \xi \frac{\partial}{\partial x} M^B \right), \end{aligned} \quad (3.6.54)$$

et

$$\xi \frac{\partial}{\partial x} h + \frac{1}{\varepsilon} \nu h = \frac{1}{\varepsilon} (\bar{\chi}_\gamma K_* h + Z), \quad (3.6.55)$$

avec

$$Z = -\varepsilon\mu\sigma(\bar{g} + g_1) + \varepsilon N_*(\sigma(\bar{g} + g_1) + h, \sigma^B(\bar{g}^B + g_1^B) + h^B) + \varepsilon^3 d, \quad (3.6.56)$$

$$\begin{aligned} N_*(f, f^B) &= \frac{1}{\sqrt{M_*}} \left(Q(f_1 + \varepsilon f_2, \sqrt{M_*} f) + Q(\sqrt{M_*} f, f_1 + \varepsilon f_2) \right) \\ &\quad - \frac{1}{m} \left(\int M_*^{\frac{1}{2}} f^B dv dx \right) \left(Q(f_1 + \varepsilon f_2, M^B) \right. \\ &\quad \left. + Q(M^B, f_1 + \varepsilon f_2) - \xi \frac{\partial}{\partial x} M^B \right). \end{aligned} \quad (3.6.57)$$

3.7 Contrôle du terme reste.

3.7.1 Estimations L^2 sur le terme reste.

On rappelle que la norme $\| \cdot \|$ a été définie en (3.6.20) et que τ a été défini au paragraphe 3.4 et qu'il désigne un petit paramètre.

Lemme 3.7.1. *Pour τ défini dans les lemmes 3.4.2 et 3.5.4 les opérateurs L^1 , N_* , L_B^1 , L_A^1 , \tilde{L}_A^1 , N_{A*} , N_{B*} , \tilde{N}_*^A , \tilde{N}_*^B définis par (3.6.54), (3.6.57), (3.6.28), (3.6.29), (3.6.30), (3.6.31), (3.6.32), (3.6.33), (3.6.34) satisfont respectivement les estimations suivantes:*

$$\begin{aligned} \|(1 + |v|)^{-1} L^1(f, f^B)\| &\leq \tau(\|f\| + \|f^B\|), \\ \|(1 + |v|)^{-1} L_B^1(f, f^B)\| &\leq \tau(\|f\| + \|f^B\|), \\ \|(1 + |v|)^{-1} L_A^1(f, f^A)\| &\leq \tau(\|f\| + \|f^A\|), \\ \|(1 + |v|)^{-1} \tilde{L}_A^1(f^B)\| &\leq \tau\|f^B\|, \\ \|(1 + |v|)^{-1} N_*(f, f^B)\| &\leq \tau(\|f\| + \|f^B\|), \\ \|(1 + |v|)^{-1} N_{A*}(f)\| &\leq \tau\|f\|, \\ \|(1 + |v|)^{-1} N_{B*}(f)\| &\leq \tau\|f\|, \\ \|(1 + |v|)^{-1} \tilde{N}_*^A(f^A, f^B)\| &\leq \tau(\|f^A\| + \|f^B\|), \\ \|(1 + |v|)^{-1} \tilde{N}_*^B(f^B)\| &\leq \tau\|f^B\|. \end{aligned}$$

Preuve de la première inégalité du lemme 3.7.1.

D'après la propriété ([14], [16]): pour toutes fonctions telles que $(1 + |v|)^{\frac{1}{2}}\varphi \in L^2$ et $(1 + |v|)^{\frac{1}{2}}\psi \in L^2$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|Q(\sqrt{M}\varphi, \sqrt{M}\psi)|^2}{(1 + |v|)M} dv \leq \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |v|)|\varphi|^2 dv \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |v|)|\psi|^2 dv,$$

on a

$$\|(1 + |v|)^{-1} L^1(f, f^B)\| \leq (\|f_1\| + \epsilon \|f_2\|)(\|f\| + \|f^B\|) + c \|\xi \frac{\partial}{\partial x} M\| \|f^B\|.$$

En premier lieu, le lemme 3.4.2 entraîne qu'il existe $c > 0$ tel que

$$\|\xi \frac{\partial}{\partial x} M\| \leq c\tau.$$

Estimons maintenant $\|f_1\|$. f_1 se décomposant de la manière suivante,

$$f_1(x, v) = f_{H1}(x, v) + f_{K1}^-(x', v) + f_{K1}^+(x'', v),$$

on est ramené à estimer chacun des trois termes du membre de droite. Montrons dans un premier temps que

$$\|f_{H1}\| \leq c\tau. \quad (3.7.1)$$

Soit \mathcal{L} défini par

$$\mathcal{L}(\phi) = Q(f_{H0}\phi, f_{H0}) + Q(f_{H0}, f_{H0}\phi)$$

D'après (3.3.30), la fonction ϕ_{H1} défini par $f_{H1} = \phi_{H1} f_{H0}$ est solution de l'équation

$$\mathcal{L}(\phi_{H1}) = \xi \frac{\partial}{\partial x} M.$$

Or la restriction de \mathcal{L} à l'orthogonal de son noyau est inversible et telle que $\|\mathcal{L}^{-1}\| = c$. Donc d'après ([14]), il existe $c > 0$ tel que

$$\|\mathcal{L}^{-1}(\xi \frac{\partial}{\partial x} M)\| \leq c \|\xi \frac{\partial}{\partial x} M\|.$$

D'où, en utilisant le lemme (3.4.2), on peut majorer la partie non hydrodynamique de ϕ_{H1} notée ψ_{H1} de la manière suivante

$$\|\psi_{H1}\| \leq \tau.$$

Il s'agit maintenant de contrôler la partie hydrodynamique de ϕ_{H1} . On rappelle qu'elle est égale à (3.3.41)

$$\left(\frac{n_{H1}}{n_{H0}} + 2 \frac{u_{1,H1}}{T_{H0}} \xi + \left(\frac{v^2}{T_{H0}} - \frac{3}{2} \right) \frac{T_{H1}}{T_{H0}} \right).$$

D'après le lemme (3.4.2), pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$\left| \frac{u_{1,H1}}{T_{H0}}(x) \right| \leq c\tau$$

et d'après le lemme 3.5.4, on a pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$\left| \frac{n_{H1}}{n_{H0}}(x) \right| \leq c\tau \quad \text{et} \quad \left| \frac{T_{H1}}{T_{H0}}(x) \right| \leq c\tau.$$

Finalement, $\|\phi_{H1}\| \leq c\tau$, ce qui entraîne l'estimation (3.7.1) sur f_{H1} . On rappelle que f_{K1}^- s'écrit:

$$\begin{aligned} f_{K1}^-(x', v) &= \left(2u_{1,H1}(-1)(d_1^-(x', v) - d_{1,\infty,0}^- - \xi - d_{1,\infty,4}^- v^2) \right. \\ &\quad \left. + b_1^-(x', v) - b_{1,\infty,0}^- - b_{1,\infty,4}^- v^2 \right) f_{H0}. \end{aligned}$$

Montrons un résultat analogue pour f_{K1}^- , c'est à dire qu'il existe $c > 0$, tel que pour tout $x' \in [0, \frac{2}{\varepsilon}]$ et tout $v \in \mathbb{R}^3$,

$$\|f_{K1}^-(x', v)\| \leq c\tau.$$

D'après ([7]), étant donné que

$$d_1^-(0, v) = 0, \quad \text{pour } \xi > 0 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^3} \xi d_1^-(0, v) dv = 1,$$

on a

$$|d_1^-(x', v)| \leq (\nu_0 - \gamma)e^{-2\gamma x'} \quad \text{et} \quad |d_{1,\infty,0}^-| + |d_{1,\infty,4}^-| \leq 1,$$

pour tout $\gamma \in]0, \nu_0[$. D'après ce qui précède, $|u_{1,H1}(-1)| \leq \tau$, donc:

$$\|2u_{1,H1}(-1)(d_1^-(x', v) - d_{1,\infty,0}^- - \xi - d_{1,\infty,4}^-) f_{H0}\| \leq c\tau.$$

Egalement, d'après ([7]), étant donné que

$$b_1^-(0, v) = \psi_{H1}(0, v), \quad \xi > 0, \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^3} \xi d_1^-(0, v) dv = 0,$$

on a

$$|b_1^-(x', v)| \leq \tau(\nu_0 - \gamma)e^{-2\gamma x'} \quad \text{et} \quad |b_{1,\infty,0}^-| + |b_{1,\infty,4}^-| \leq \tau,$$

pour tout $\gamma \in]0, \nu_0[$. Ce qui entraîne la majoration souhaitée sur $f_{K_1}^-$. Par un raisonnement similaire, on obtient la même majoration sur $f_{K_1}^+$. Par un raisonnement analogue, on montre que $\|f_2\| \leq c$ pour $c > 0$. \square

Proposition 4. *Il existe $\varepsilon_0 > 0$, τ_0 et $c > 0$ tels que pour $\varepsilon < \varepsilon_0$ et $\tau < \tau_0$, les solutions de (3.6.24, 3.6.25, 3.6.26, 3.6.27, 3.6.37, 3.6.38) satisfont les estimations suivantes:*

$$\begin{aligned} \|h^A\| + \|h^B\| &\leq c\varepsilon^3 \left(\left\| \frac{d^A}{(1+|v|)} \right\| + \left\| \frac{d^B}{(1+|v|)} \right\| \right) \\ &+ c\sqrt{\varepsilon} (\|h_-^A\| + \|h_+^A\| + \|h_-^B\| + \|h_+^B\|), \end{aligned} \quad (3.7.2)$$

$$\begin{aligned} \|\hat{g}^A\| + \|\hat{g}^B\| &\leq c\varepsilon \left(\left\| \frac{d^A}{(1+|v|)} \right\| + \left\| \frac{d^B}{(1+|v|)} \right\| \right) \\ &+ \frac{c}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}} (\|h_-^A\| + \|h_+^A\| + \|h_-^B\| + \|h_+^B\|), \end{aligned} \quad (3.7.3)$$

$$\begin{aligned} \|g_1^A\| + \|g_1^B\| + \|\bar{g}^A\| + \|\bar{g}^B\| &\leq c\varepsilon^2 \left(\left\| \frac{d^A}{(1+|v|)} \right\| + \left\| \frac{d^B}{(1+|v|)} \right\| \right) \\ &+ \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} (\|h_-^A\| + \|h_+^A\| + \|h_-^B\| + \|h_+^B\|). \end{aligned} \quad (3.7.4)$$

On rappelle que τ_0 est défini au lemme 3.4.2.

Remarque 19. *L'inégalité (3.7.4) fournit un contrôle pour la partie en grande vitesse du terme reste. On remarque que les parties non hydrodynamiques ainsi que les composantes radiales (termes d'indice 1) des parties hydrodynamiques de la partie en petite vitesse du terme reste gagnent un ordre en ε par rapport aux composantes de masse et d'énergie (termes indicés par 0 et 4) de ces mêmes parties hydrodynamiques.*

Remarque 20. *Dans le cadre d'une seule composante de gaz ([14], [15]), les auteurs obtiennent pour le terme g_1 le même ordre en ε que pour la partie en grande vitesse. On en verra une explication au cours de la démonstration de la proposition 4, lors du contrôle de g_1^A et de g_1^B . Cela provient du fait que dans le cas d'un gaz à une composante, le flux $\int \xi \bar{g} dv$ est nul tandis que pour un gaz à deux composantes, $\int_{\mathbb{R}^3} \xi \bar{g}^A dv$ et $\int_{\mathbb{R}^3} \xi \bar{g}^B dv$ ne sont pas nécessairement nuls.*

Preuve de la proposition 4.

La preuve consiste à majorer dans un premier temps $\|\bar{g}^A\|$, $\|\bar{g}^B\|$, $\|g_1^A\|$, $\|g_1^B\|$, $\|\hat{g}^A\|$ et $\|\hat{g}^B\|$ par $\|h^A\|$ et $\|h^B\|$ puis à contrôler $\|h^A\|$ et $\|h^B\|$.

Première estimation de $\|\bar{g}^A\|$ et de $\|\bar{g}^B\|$.

Considérons Λ défini par

$$\Lambda : (g^A, g^B) \mapsto (\mathcal{L}_1(g^A, g^B), \mathcal{L}_2(g^A, g^B)),$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(g^A, g^B) &= \frac{1}{\sqrt{M^A}} Q(\sqrt{M^A} g^A, M) + \frac{1}{\sqrt{M^A}} Q(M^A, \sqrt{M^A} g^A + \sqrt{M^B} g^B), \\ \mathcal{L}_2(g^A, g^B) &= \frac{1}{\sqrt{M^B}} Q(\sqrt{M^B} g^B, M) + \frac{1}{\sqrt{M^B}} Q(M^B, \sqrt{M^A} g^A + \sqrt{M^B} g^B). \end{aligned}$$

On considère ensuite le produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et défini par:

$$\langle (f^A, f^B), (g^A, g^B) \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} f^A(v) g^A(v) dv + \int_{\mathbb{R}^3} f^B(v) g^B(v) dv.$$

On multiplie (3.6.24) par εg^A , (3.6.26) par εg^B , on ajoute les deux équations obtenues et on intègre sur $[-1, 1] \times \mathbb{R}^3$. D'où,

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathcal{I}_{g^A} + \mathcal{I}_{g^B}) &- \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 \mathcal{L}_1(g^A, g^B) g^A dv dx - \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 \mathcal{L}_2(g^A, g^B) g^B dv dx \\ &= \varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 (\mu^A (\hat{g}^A)^2 + \mu^B (\hat{g}^B)^2) dx dv \\ &+ \varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 (\mu^A \hat{g}^A \bar{g}^A + \mu^B \hat{g}^B \bar{g}^B) dx dv \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 \chi_\gamma \sigma_A^{-1} (K_*^1 h^A + K_*^A h) g^A dv dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 \chi_\gamma \sigma_B^{-1} (K_*^1 h^B + K_*^B h) g^B dv dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 \varepsilon (\tilde{L}_A^1(\hat{g}^B) + L_A^1(\hat{g}, \hat{g}^A)) g^A dv dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 \varepsilon L_B^1(\hat{g}, \hat{g}^B) g^B dv dx, \end{aligned} \tag{3.7.5}$$

avec

$$\mathcal{I}_{g^A} = \int_{\mathbb{R}^3} \xi(g^A(1,v))^2 dv - \int_{\mathbb{R}^3} \xi(g^A(-1,v))^2 dv$$

et

$$\mathcal{I}_{g^B} = \int_{\mathbb{R}^3} \xi(g^B(1,v))^2 dv - \int_{\mathbb{R}^3} \xi(g^B(-1,v))^2 dv.$$

En décomposant \hat{g}^A selon (3.6.22), on obtient que $\mu^A(\hat{g}^A)^2$ s'écrit comme la somme des termes

$$\frac{1}{2} \xi \frac{\partial}{\partial x} (\ln(M^A)) p_i^A(x) p_j^A(x) \psi_i^A(v) \psi_j^A(v),$$

pour $(i,j) \in \{0,4\}^2$. Or, ces fonctions étant impaires selon la variable ξ , on a:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mu^A(\hat{g}^A)^2 dv = 0.$$

Par une démarche analogue, on montre que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mu^B(\hat{g}^B)^2 dv = 0.$$

D'après l'expression de μ^A et μ^B , on a

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 (\mu^A \hat{g}^A \bar{g}^A + \mu^B \hat{g}^B \bar{g}^B) dx dv \right| \leq c\tau (\|\hat{g}^A\| \|\bar{g}^A\| + \|\hat{g}^B\| \|\bar{g}^B\|).$$

Par ailleurs, d'après ([2]), on a l'inégalité spectrale suivante:

$$\langle \Lambda(g^A, g^B), (g^A, g^B) \rangle \leq -(\gamma_1 \|\bar{g}^A\|^2 + \gamma_1 \|\bar{g}^B\|^2).$$

Remarque 21. *L'inégalité précédente est la généralisation de l'inégalité spectrale pour un gaz à deux composantes ([7], [17]).*

L'inégalité (3.7.5) devient donc,

$$\begin{aligned}
 & \varepsilon(\mathcal{I}_{g^A} + \mathcal{I}_{g^B}) + \frac{\gamma_1}{2}(\|\bar{g}^A\|^2 + \|\bar{g}^B\|^2) \\
 & \leq c_T \varepsilon(\|\hat{g}^A\| \|\bar{g}^A\| + \|\hat{g}^B\| \|\bar{g}^B\|) \\
 & + \left| \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 \chi_\gamma \sigma_A^{-1}(K_*^1 h^A + K_*^A h) g^A dv dx \right| \\
 & + \left| \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 \chi_\gamma \sigma_B^{-1}(K_*^1 h^B + K_*^B h) g^B dv dx \right| \\
 & + \left| \int_{\mathbb{R}^3} L_A^1(\hat{g}, \hat{g}^A) + \tilde{L}_A^1(\hat{g}^B) g^A dv \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^3} L_B^1(\hat{g}, \hat{g}^B) g^B dv \right|.
 \end{aligned} \tag{3.7.6}$$

Montrons alors que

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}^3} L_A^1(\hat{g}, \hat{g}^A) + \tilde{L}_A^1(\hat{g}^B) (g_1^A + \hat{g}^A) dv + \int_{\mathbb{R}^3} L_B^1(\hat{g}, \hat{g}^B) (g_1^B + \hat{g}^B) dv \\
 & = \frac{1}{m} \left(\int \sqrt{M^B} \hat{g}^B dv dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^3} g_1^B \left(\xi \frac{\partial}{\partial x} M^B \right) dv \right).
 \end{aligned} \tag{3.7.7}$$

Par définition de L_A^1 , \tilde{L}_A^1 et de L_B^1 ,

$$\int_{\mathbb{R}^3} (L_A^1(\hat{g}, \hat{g}^A) + \tilde{L}_A^1(\hat{g}^B)) g_0^A dv + \int_{\mathbb{R}^3} L_B^1(\hat{g}, \hat{g}^B) g_0^B dv = 0$$

Il reste donc à prouver que

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}^3} (L_A^1(\hat{g}, \hat{g}^A) + \tilde{L}_A^1(\hat{g}^B)) (g_1^A + g_4^A) dv + \int_{\mathbb{R}^3} L_B^1(\hat{g}, \hat{g}^B) (g_1^B + g_4^B) dv \\
 & = \frac{1}{m} \left(\int \sqrt{M^B} \hat{g}^B dv dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^3} g_1^B \left(\xi \frac{\partial}{\partial x} M^B \right) dv \right).
 \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^3} (L_A^1(\hat{g}, \hat{g}^A) + \tilde{L}_A^1(\hat{g}^B))(g_1^A + g_4^A) dv + \int_{\mathbb{R}^3} L_B^1(\hat{g}, \hat{g}^B)(g_1^B + g_4^B) dv \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \left(Q(\sqrt{M^A} \hat{g}^A, f_1 + \varepsilon f_2) + Q(f_1^A + \varepsilon f_2^A, \sqrt{M} \hat{g}) \right) \left(\frac{g_1^A + g_4^A}{\sqrt{M^A}} \right) dv \\
&+ \int_{\mathbb{R}^3} \left(Q(\sqrt{M^B} \hat{g}^B, f_1 + \varepsilon f_2) + Q(f_1^B + \varepsilon f_2^B, \sqrt{M} \hat{g}) \right) \left(\frac{g_1^B + g_4^B}{\sqrt{M^B}} \right) dv \\
&\quad - \frac{1}{m} \left(\int \hat{g}^B dv dx \right) \int_{\mathbb{R}^3} \left(Q(f_1^A + \varepsilon f_2^A, M^B) \left(\frac{g_1^A + g_4^A}{\sqrt{M^A}} \right) \right. \\
&\quad \left. + (Q(f_1^B + \varepsilon f_2^B, M^B) + Q(M^B, f_1 + \varepsilon f_2)) \left(\frac{g_1^B + g_4^B}{\sqrt{M^B}} \right) \right) dv \\
&\quad + \frac{1}{m} \left(\int \sqrt{M^B} \hat{g}^B dv dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^3} g_1^B \left(\xi \frac{\partial}{\partial x} M^B \right) dv \right).
\end{aligned}$$

Etant donné que

$$\frac{g_1^A}{\sqrt{M^A}} = \frac{g_1^B}{\sqrt{M^B}} = \xi p_1^A = \xi p_1^B$$

et

$$\frac{g_4^A}{\sqrt{M^A}} = \frac{g_4^B}{\sqrt{M^B}} = (v^2 - \frac{3}{2}) p_4^A = (v^2 - \frac{3}{2}) p_4^B,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^3} \left(Q(\sqrt{M^A} \hat{g}^A, f_1 + \varepsilon f_2) + Q(f_1^A + \varepsilon f_2^A, \sqrt{M} \hat{g}) \right) \left(\frac{g_1^A + g_4^A}{\sqrt{M^A}} \right) dv \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^3} \left(Q(\sqrt{M^B} \hat{g}^B, f_1 + \varepsilon f_2) + Q(f_1^B + \varepsilon f_2^B, \sqrt{M} \hat{g}) \right) \left(\frac{g_1^B + g_4^B}{\sqrt{M^B}} \right) dv \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \left(Q(f_1 + \varepsilon f_2, \sqrt{M} \hat{g}) + Q(\sqrt{M} \hat{g}, f_1 + \varepsilon f_2) \right) \left(\frac{g_1^A + g_4^A}{\sqrt{M^A}} \right) dv = 0
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^3} \left(Q(f_1^A + \varepsilon f_2^A, M^B) \left(\frac{g_1^A + g_4^A}{\sqrt{M^A}} \right) + (Q(f_1^B + \varepsilon f_2^B, M^B) \right. \\
&\quad \left. + Q(M^B, f_1 + \varepsilon f_2)) \left(\frac{g_1^B + g_4^B}{\sqrt{M^B}} \right) \right) dv \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \left(Q(M^B, f_1 + \varepsilon f_2) + Q(f_1 + \varepsilon f_2, M^B) \right) \left(\frac{g_1^A + g_4^A}{\sqrt{M^A}} \right) dv = 0.
\end{aligned}$$

Ce qui entraîne la formule (3.7.7). Ainsi, en appliquant le lemme 3.7.1, on obtient l'estimation suivante:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 \left(L_A^1(\hat{g}, \hat{g}^A) + \tilde{L}_A^1(\hat{g}^B) \right) g^A + L_B^1(\hat{g}, \hat{g}^B) g^B \, dv dx \right| \leq c\tau \left(\|\hat{g}^B\| \|g_1^B\| + (\|\hat{g}^A\| + \|\hat{g}^B\|) (\|\bar{g}^A\| + \|\bar{g}^B\|) \right).$$

D'après l'expression de μ^A et μ^B , on a

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 (\mu^A \hat{g}^A \bar{g}^A + \mu^B \hat{g}^B \bar{g}^B) \, dx dv \right| \leq c\tau (\|\hat{g}^A\| \|\bar{g}^A\| + \|\hat{g}^B\| \|\bar{g}^B\|).$$

Ainsi, en revenant à l'inégalité (3.7.6),

$$\begin{aligned} & \varepsilon(\mathcal{I}_{g^A} + \mathcal{I}_{g^B}) + \frac{\gamma_1}{2} (\|\bar{g}^A\|^2 + \|\bar{g}^B\|^2) \\ & \leq c\tau\varepsilon (\|\hat{g}^A\| \|\bar{g}^A\| + \|\hat{g}^B\| \|\bar{g}^B\|) \\ & + \left| \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 \chi_\gamma \sigma_A^{-1} (K_*^1 h^A + K_*^A h) g^A \, dv dx \right| \\ & + \left| \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 \chi_\gamma \sigma_B^{-1} (K_*^1 h^B + K_*^B h) g^B \, dv dx \right| \\ & + c\tau\varepsilon \left(\|\hat{g}^B\| \|g_1^B\| + (\|\hat{g}^A\| + \|\hat{g}^B\|) (\|\bar{g}^A\| + \|\bar{g}^B\|) \right). \end{aligned} \tag{3.7.8}$$

Afin de traiter les termes

$$\tau\varepsilon \left(\|\hat{g}^B\| \|g_1^B\| + (\|\hat{g}^A\| + \|\hat{g}^B\|) (\|\bar{g}^A\| + \|\bar{g}^B\|) \right),$$

et

$$c\tau\varepsilon (\|\hat{g}^A\| \|\bar{g}^A\| + \|\hat{g}^B\| \|\bar{g}^B\|),$$

on applique la propriété suivante: (pour tout $\sigma > 0$),

$$|ab| \leq \sigma a^2 + \frac{b^2}{4\sigma}. \tag{3.7.9}$$

Ce qui implique que pour tout $\sigma > 0$,

$$\begin{aligned} & \tau\varepsilon \left(\|\hat{g}^B\| \|g_1^B\| + (\|\hat{g}^A\| + \|\hat{g}^B\|) (\|\bar{g}^A\| + \|\bar{g}^B\|) \right) \\ & \leq \sigma (\|g_1^B\|^2 + \|\bar{g}^A\|^2 + \|\bar{g}^B\|^2) + \frac{\tau^2 \varepsilon^2}{4\sigma} (\|\hat{g}^A\|^2 + \|\hat{g}^B\|^2). \end{aligned}$$

L'inégalité (3.7.8) devient donc

$$\begin{aligned}
& \varepsilon(\mathcal{I}_{g^A} + \mathcal{I}_{g^B}) + \frac{\gamma_1}{2}(\|\bar{g}^A\|^2 + \|\bar{g}^B\|^2) \\
& + \left| \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 \chi_\gamma \sigma_A^{-1} (K_*^1 h^A + K_*^A h) g^A dv dx \right| \\
& + \left| \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 \chi_\gamma \sigma_B^{-1} (K_*^1 h^B + K_*^B h) g^B dv dx \right| \\
& + \sigma \|g_1^B\|^2 + \frac{\tau^2 \varepsilon^2}{4\sigma} (\|\hat{g}^A\|^2 + \|\hat{g}^B\|^2).
\end{aligned}$$

Par continuité des opérateurs K_*^1 , K_*^A et K_*^B , on obtient:

$$\begin{aligned}
& \varepsilon(\mathcal{I}_{g^A} + \mathcal{I}_{g^B}) + \frac{\gamma_1}{4}(\|\bar{g}^A\|^2 + \|\bar{g}^B\|^2) \\
& \leq c(\|h^A\| + \|h^B\|)(\|g^A\| + \|g^B\|) \\
& + \sigma \|g_1^B\|^2 + c\tau \varepsilon^2 (\|\hat{g}^A\|^2 + \|\hat{g}^B\|^2). \tag{3.7.10}
\end{aligned}$$

D'après les conditions de bord (3.6.37) satisfaites par g^A , $\mathcal{I}_{g^A} \geq 0$. Il reste à montrer que $\mathcal{I}_{g^B} \geq 0$.

$$\int_{\mathbb{R}^3} \xi (g^B(1,v))^2 dv = \int_{\xi>0} \xi (g^B(1,v))^2 dv - (\beta_{g^B})^2 \int_{\xi<0} |\xi| \frac{M_+^2(v)}{M^B(1,v)} dv$$

où,

$$\beta_{g^B} = \int_{\xi>0} \xi \sqrt{M^B(1,v)} g^B(1,v) dv.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne

$$\beta_{g^B}^2 \leq \left(\int_{\xi>0} \xi M^B(1,v) dv \right) \left(\int_{\xi>0} \xi (g^B)^2(1,v) dv \right).$$

Donc, étant donné que

$$\left(\int_{\xi>0} \xi M^B(1,v) dv \right) \left(\int_{\xi<0} |\xi| \frac{M_+^2(v)}{M^B(1,v)} dv \right) = 1,$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \xi (g^B(1,v))^2 dv \geq 0.$$

Pour achever le contrôle de $\|\bar{g}^A\|$ et $\|\bar{g}^B\|$, on a besoin d'estimer $\|g_1^A\|$, $\|g_1^B\|$, $\|\hat{g}^A\|$ et $\|\hat{g}^B\|$.

Estimation de $\|g_1^A\|$ et de $\|g_1^B\|$.
D'après ce qui précède,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \xi R^B(x, v) dv = 0.$$

En décomposant R^B et en utilisant le fait que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \xi \hat{g}^B dv = 0,$$

on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(\xi^2 \sqrt{M^B} p_1^B + \xi \sqrt{M^B} \bar{g}^B(x, v) + \xi \sqrt{M_*} h^B \right) dv = 0.$$

D'où,

$$c p_1^B = - \int_{\mathbb{R}^3} \xi \sqrt{M^B} \bar{g}^B dv - \int_{\mathbb{R}^3} \xi \sqrt{M_*} h^B dv.$$

Ce qui entraîne la majoration

$$\|g_1^B\| \leq c(\|\bar{g}^B\| + \|h^B\|). \quad (3.7.11)$$

Or, d'après l'expression du noyau de l'opérateur de Boltzmann linéarisé pour un gaz à deux composantes ([2]), on a la relation suivante

$$p_1^A = p_1^B.$$

Donc,

$$\|g_1^A\| \leq c(\|\bar{g}^B\| + \|h^B\|). \quad (3.7.12)$$

Première estimation de $\|\hat{g}^A\|$ et de $\|\hat{g}^B\|$.

On multiplie (3.6.24) par $\xi\psi_i^A$ et on intègre sur $[-1,1] \times \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^x \int_{\mathbb{R}^3} \xi^2 \left(\frac{\partial g^A}{\partial x} \right) \psi_i^A dv dy &= - \int_{-1}^x \int_{\mathbb{R}^3} \mu^A \hat{g}^A \xi \psi_i^A dv dy \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \int_{-1}^x \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\sqrt{M^A}} (Q(\sqrt{M^A} \bar{g}^A, M) \\ &+ Q(M^A, \sqrt{M} \bar{g})) \xi \psi_i^A dv dy \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \int_{-1}^x \int_{\mathbb{R}^3} \chi_\gamma \sigma_A^{-1} [K_*^A h + K_*^1 h^A] \xi \psi_i^A dv dy \\ &+ \int_{-1}^x \int_{\mathbb{R}^3} (L_A^1(\hat{g}, \hat{g}^A) + \tilde{L}_A^1(\hat{g}^B)) \xi \psi_i^A dv dy. \end{aligned}$$

Posons,

$$\phi_i^A(x) = \int_{-1}^x \int_{\mathbb{R}^3} \xi^2 g^A \psi_i^A dv dy.$$

D'après la formule de Green appliquée à l'équation précédente,

$$\begin{aligned} \phi_i^A(x) &= \phi_i^A(-1) - \int_{-1}^x \int_{\mathbb{R}^3} g^A(y, v) \left(\xi^2 \frac{\partial}{\partial y} \psi_i^A(y, v) \right) dv dy \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \int_{-1}^x \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\sqrt{M_A}} \left(Q(\sqrt{M^A} \bar{g}^A, M) + Q(M^A, \sqrt{M} \bar{g}) \right) \xi \psi_i^A dv dy \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \int_{-1}^x \int_{\mathbb{R}^3} \chi_\gamma \sigma_A^{-1} [K_*^A h + K_*^1 h^A] \xi \psi_i^A dv dy \\ &+ \int_{-1}^x \int_{\mathbb{R}^3} (L_A^1(\hat{g}, \hat{g}^A) + \tilde{L}_A^1(\hat{g}^B)) \xi \psi_i^A dv dy. \end{aligned}$$

Pour contrôler le terme $\phi_i^A(-1)$, on applique l'inégalité de Cauchy-Schwartz. Ce qui entraîne:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^3} \xi^2 g^A(-1, v) \psi_i^A(-1, v) dv \right| \\ & \leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} \xi (g^A(-1, v))^2 dv \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^3 (\psi_i^A)^2(-1, v) dv \right)^{\frac{1}{2}}, \\ & \leq c \left(\int_{\mathbb{R}^3} \xi (g^A(-1, v))^2 dv \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

On obtient donc pour $i \in \{0,4\}$,

$$|\phi_i^A(-1)| \leq (\mathcal{I}_{g^A})^{1/2}.$$

De même on a, pour $i \in \{0,4\}$,

$$|\phi_i^B(-1)| \leq (\mathcal{I}_{g^B})^{1/2}.$$

Donc, pour $i \in \{0,4\}$

$$\begin{aligned} |\phi_i^A(x)| &\leq (\mathcal{I}_{g^A})^{1/2} + \tau \|g^A\| + \frac{c}{\varepsilon} \|\bar{g}^A\| + \frac{c}{\varepsilon} \|\bar{g}^B\| + \frac{c}{\varepsilon} \|h^A\| + \frac{c}{\varepsilon} \|h^B\| \\ &\quad + c\tau(\|\hat{g}^A\| + \|\hat{g}^B\|). \end{aligned} \quad (3.7.13)$$

De même, pour $i \in \{0,4\}$,

$$\begin{aligned} |\phi_i^B(x)| &\leq (\mathcal{I}_{g^B})^{1/2} + \tau \|g^B\| + \frac{c}{\varepsilon} \|\bar{g}^B\| + \frac{c}{\varepsilon} \|\bar{g}^A\| + \frac{c}{\varepsilon} \|h^A\| + \frac{c}{\varepsilon} \|h^B\| \\ &\quad + c\tau(\|\hat{g}^A\| + \|\hat{g}^B\|). \end{aligned} \quad (3.7.14)$$

Ces deux inégalités permettent alors de contrôler les termes $\phi_i^A(x)$ et $\phi_i^B(x)$ pour $i \in \{0,4\}$. Montrons par exemple que cela permet de contrôler les termes $p_0^A(x)$ et $p_4^A(x)$. ϕ_0^A et ϕ_4^A vérifient le système suivant:

$$\begin{aligned} \phi_0^A &= p_0^A D_{00}^A + p_1^A D_{01}^A + p_4^A D_{04}^A + \int_{\mathbb{R}^3} \xi^2 \bar{g}^A \psi_0^A dv, \\ \phi_4^A &= p_0^A D_{40}^A + p_1^A D_{41}^A + p_4^A D_{44}^A + \int_{\mathbb{R}^3} \xi^2 \bar{g}^A \psi_4^A dv, \end{aligned} \quad (3.7.15)$$

avec

$$D_{ij}^A = \int_{\mathbb{R}^3} \xi^2 \psi_i^A \psi_j^A dv.$$

Or, par raison d'imparité, $D_{0,1}^A = D_{4,1}^A = 0$. Donc, en inversant le système (3.7.15), on a

$$p_i^A = \frac{1}{D_{i0}^A} \left(\phi_0^A - \int_{\mathbb{R}^3} \xi^2 \psi_0^A \bar{g}^A dv \right) + \frac{1}{D_{i4}^A} \left(\phi_4^A - \int_{\mathbb{R}^3} \xi^2 \psi_4^A \bar{g}^A dv \right). \quad (3.7.16)$$

Or, d'après (3.6.22) et par orthogonalité du système ψ_0^A, ψ_4^A ,

$$\|\hat{g}^A\|^2 \leq c \int_{-1}^1 (|p_0^A(x)|^2 + |p_4^A(x)|^2) dx.$$

Soit d'après (3.7.16),

$$\|\hat{g}^A\|^2 \leq c \int_{-1}^1 (|\phi_0^A|^2 + |\phi_4^A|^2) dx + c\|\bar{g}^A\|^2.$$

D'après (3.7.13),

$$\begin{aligned} \|\hat{g}^A\|^2 &\leq \mathcal{I}_{g^A} + c\tau\|\hat{g}^A\|^2 + \frac{c}{\varepsilon^2} (\|\bar{g}^A\|^2 + \|\bar{g}^B\|^2 + \|h^A\|^2 + \|h^B\|^2) \\ &\quad + c\tau(\|\hat{g}^A\|^2 + \|\hat{g}^B\|^2). \end{aligned}$$

Par une démarche analogue, on obtient que \hat{g}^B vérifie

$$\begin{aligned} \|\hat{g}^B\|^2 &\leq \mathcal{I}_{g^B} + c\tau\|\hat{g}^B\|^2 + \frac{c}{\varepsilon^2} (\|\bar{g}^A\|^2 + \|\bar{g}^B\|^2 + \|h^A\|^2 + \|h^B\|^2) \\ &\quad + c\tau(\|\hat{g}^A\|^2 + \|\hat{g}^B\|^2). \end{aligned}$$

En ajoutant les deux dernières inégalités et en choisissant ε et τ suffisamment petits,

$$\|\hat{g}^A\|^2 + \|\hat{g}^B\|^2 \leq \mathcal{I}_{g^A} + \mathcal{I}_{g^B} + \frac{c}{\varepsilon^2} (\|\bar{g}^A\|^2 + \|\bar{g}^B\|^2 + \|h^A\|^2 + \|h^B\|^2).$$

En majorant $\mathcal{I}_{g^A} + \mathcal{I}_{g^B}$ par l'inégalité (3.7.10) et en choisissant ε suffisamment petit, on obtient

$$\begin{aligned} \|\hat{g}^A\|^2 + \|\hat{g}^B\|^2 &\leq \frac{\sigma}{\varepsilon} \|g_1^B\|^2 + \frac{c}{\varepsilon} (\|h^A\| + \|h^B\|) (\|g^A\| + \|g^B\|) \\ &\quad + \frac{c}{\varepsilon^2} (\|\bar{g}^A\|^2 + \|\bar{g}^B\|^2 + \|h^A\|^2 + \|h^B\|^2). \end{aligned}$$

D'après l'inégalité (3.7.11) et en décomposant g^A et g^B selon $g^A = g_1^A + \hat{g}^A + \bar{g}^A$ et $g^B = g_1^B + \hat{g}^B + \bar{g}^B$, on a

$$\begin{aligned} \|\hat{g}^A\|^2 + \|\hat{g}^B\|^2 &\leq \frac{c}{\varepsilon} (\|h^A\| + \|h^B\|) (\|\hat{g}^A\| + \|\hat{g}^B\|) \\ &\quad + \frac{c}{\varepsilon} (\|h^A\| + \|h^B\|) (\|g_1^A\| + \|g_1^B\| + \|\bar{g}^A\| + \|\bar{g}^B\|) \\ &\quad + \frac{c}{\varepsilon^2} (\|\bar{g}^A\|^2 + \|\bar{g}^B\|^2 + \|h^A\|^2 + \|h^B\|^2). \end{aligned}$$

En utilisant à nouveau les inégalités (3.7.10, 3.7.11, 3.7.12) et en choisissant τ suffisamment petit,

$$\begin{aligned} \|\hat{g}^A\|^2 + \|\hat{g}^B\|^2 &\leq \frac{c}{\varepsilon} (\|h^A\| + \|h^B\|) (\|\hat{g}^A\| + \|\hat{g}^B\|) + c\tau(\|\bar{g}^A\|^2 + \|\bar{g}^B\|^2) \\ &\quad + \frac{c}{\varepsilon^2} (\|\bar{g}^A\|^2 + \|\bar{g}^B\|^2 + \|h^A\|^2 + \|h^B\|^2). \end{aligned} \quad (3.7.17)$$

Afin de majorer le terme $\frac{c}{\varepsilon}(\|h^A\| + \|h^B\|)(\|\hat{g}^A\| + \|\hat{g}^B\|)$, on applique à nouveau la propriété 3.7.9. Ce qui entraîne, pour tout $\sigma > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{c}{\varepsilon}(\|h^A\| + \|h^B\|)(\|\hat{g}^A\| + \|\hat{g}^B\|) &\leq \sigma(\|\hat{g}^A\|^2 + \|\hat{g}^B\|^2) \\ &+ \frac{c}{4\sigma\varepsilon^2}(\|h^A\|^2 + \|h^B\|^2). \end{aligned}$$

En choisissant σ suffisamment petit et en revenant à l'inégalité (3.7.17), on obtient

$$\|\hat{g}^A\| + \|\hat{g}^B\| \leq \frac{c}{\varepsilon}(\|\bar{g}^A\| + \|\bar{g}^B\| + \|h^A\| + \|h^B\|). \quad (3.7.18)$$

On va maintenant majorer $\|\bar{g}^A\| + \|\bar{g}^B\|$ en fonction de $\|h^A\|$ et de $\|h^B\|$. En utilisant l'inégalité (3.7.18), on a:

$$\begin{aligned} (\|h^A\| + \|h^B\|)(\|\hat{g}^A\| + \|\hat{g}^B\|) &\leq \frac{c}{\varepsilon}(\|h^A\| + \|h^B\|)(\|\bar{g}^A\| + \|\bar{g}^B\|) \\ &+ \frac{c}{\varepsilon}(\|h^A\| + \|h^B\|)^2. \end{aligned}$$

Il reste à contrôler le terme de (3.7.10)

$$\frac{c}{\varepsilon}(\|h^A\| + \|h^B\|)(\|\bar{g}^A\| + \|\bar{g}^B\| + \|g_1^A\| + \|g_1^B\|).$$

D'après (3.7.11) et (3.7.12),

$$\begin{aligned} &\frac{c}{\varepsilon}(\|h^A\| + \|h^B\|)(\|\bar{g}^A\| + \|\bar{g}^B\| + \|g_1^A\| + \|g_1^B\|) \\ &\leq \frac{c}{\varepsilon}(\|h^A\| + \|h^B\|)(\|\bar{g}^A\| + \|\bar{g}^B\| + \|h^A\| + \|h^B\|). \end{aligned}$$

On applique ensuite l'inégalité (3.7.9). Ce qui entraîne pour tout $\sigma > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{c}{\varepsilon}(\|h^A\| + \|h^B\|)(\|\bar{g}^A\| + \|\bar{g}^B\|) &\leq \frac{c}{4\sigma\varepsilon^2}(\|h^A\|^2 + \|h^B\|^2) \\ &+ \sigma(\|\bar{g}^A\|^2 + \|\bar{g}^B\|^2) \end{aligned}$$

D'où, (3.7.10) implique que

$$\|\bar{g}^A\| + \|\bar{g}^B\| \leq \frac{c}{\varepsilon}(\|h^A\| + \|h^B\|). \quad (3.7.19)$$

Ce qui entraîne d'après (3.7.18),

$$\|\hat{g}^A\| + \|\hat{g}^B\| \leq \frac{c}{\varepsilon^2}(\|h^A\| + \|h^B\|). \quad (3.7.20)$$

Contrôle de $\|h^A\|$.

On multiplie (3.6.25) par εh^A et on intègre sur $\mathbb{R}^3 \times [-1,1]$. D'où, en posant

$$\mathcal{I}_{h^A} = \int_{\mathbb{R}^3} \xi(h^A(1,v))^2 dv - \int_{\mathbb{R}^3} \xi(h^A(-1,v))^2 dv,$$

on a

$$\begin{aligned} \varepsilon \mathcal{I}_{h^A} + \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 \nu(h^A)^2 dx dv &= -\varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 \mu^A \sigma^A (\bar{g}^A + g_1^A) h^A dv dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 ((\bar{\chi}_\gamma K_*^A) h) h^A dv dx + \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 ((\bar{\chi}_\gamma K_*^1) h^A) h^A dv dx \\ &+ \varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 N_{A*} (\sigma (\bar{g} + g_1) + h) h^A dv dx \\ &+ \varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 \tilde{N}_*^A (\sigma^A (\bar{g}^A + g_1^A) + h^A, \sigma^B (\bar{g}^B + g_1^B) + h^B) h^A dv dx \\ &+ \varepsilon^3 \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 (d^A h^A) dv dx. \end{aligned}$$

D'après (3.6.36), le lemme 3.7.1 et la continuité des opérateurs K_*^1, K_*^A, K_*^B ,

$$\begin{aligned} \varepsilon \mathcal{I}_{h^A} + \nu_0 \|h^A\|^2 &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 (\bar{\chi}_\gamma K_*^1 h^A) h^A dv dx \right| \\ &+ \left| \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 (\bar{\chi}_\gamma K_*^A h^A) h^A dv dx \right| \\ &+ c\tau \varepsilon (\|\bar{g}^A\| + \|g_1^A\| + \|h^A\| + \|\bar{g}^B\| + \|g_1^B\| + \|h^B\|) \|h^A\| \\ &+ \varepsilon^3 \|d^A\| \|h^A\|. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{\mathbb{R}^3} (\bar{\chi}_\gamma K_*^1 h^A) h^A dv dx &\leq \|h^A\| \left(\int_{-1}^1 \int_{\mathbb{R}^3} (\bar{\chi}_\gamma K_*^1 h^A)^2 (1+|v|)^{-1} dv dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{\|h^A\|^2}{(1+\gamma)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

De même, on a

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 (\bar{\chi}_\gamma K_*^A h) h^A dv dx \right| \leq \frac{\|h^A\| \|h\|}{(1+\gamma)^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{\|h^A\| (\|h^A\| + \|h^B\|)}{(1+\gamma)^{\frac{1}{2}}}.$$

De plus, d'après les conditions de bord (3.6.37) vérifiées par h^A ,

$$\mathcal{I}_{h^A} \geq -c(\|h_-^A\|^2 + \|h_+^A\|^2).$$

Donc,

$$\begin{aligned} \|h^A\|^2 &\leq \frac{c}{(1+\gamma)^{\frac{1}{2}}}(\|h^A\|^2 + \|h^B\|^2) + c\varepsilon(\|h_-^A\|^2 + \|h_+^A\|^2) \\ &+ c\tau\varepsilon(\|\bar{g}^A\| + \|g_1^A\| + \|\bar{g}^B\| + \|g_1^B\| + \|h^A\| + \|h^B\|)\|h^A\| \\ &+ \varepsilon^3\|h^A\| \left\| \frac{d^A}{1+|v|} \right\|. \end{aligned}$$

Ce qui entraîne finalement, en choisissant τ et ε suffisamment petits et γ suffisamment grand et en utilisant l'estimation (3.7.19),

$$\|h^A\|^2 \leq \varepsilon(\|h_-^A\|^2 + \|h_+^A\|^2) + \varepsilon^6 \left\| \frac{d^A}{1+|v|} \right\|^2 + c \left(\frac{1}{(1+\gamma)^{\frac{1}{2}}} + \tau \right) \|h^B\|^2. \quad (3.7.21)$$

Estimation de $\|h^B\|$.

De même que pour \mathcal{I}_{h^A} , on définit \mathcal{I}_{h^B} , par

$$\mathcal{I}_{h^B} = \int_{\mathbb{R}^3} \xi(h^B(1,v))^2 dv - \int_{\mathbb{R}^3} \xi(h^B(-1,v))^2 dv.$$

En multipliant (3.6.27), par εh^B et par intégration sur $[-1,1] \times \mathbb{R}^3$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 \nu(h^B)^2 dx dv &= -\varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 \mu^B \sigma^B (\bar{g}^B + g_1^B) h^B dv dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 ((\bar{\chi}_\gamma K_*^B) h) h^B dv dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 ((\bar{\chi}_\gamma K_*^1) h^B) h^B dv dx \\ &+ \varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 N_{B^*} (\sigma(\bar{g} + g_1) + h) h^B dv dx \\ &+ \varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 \tilde{N}_*^B (\sigma^B (\bar{g}^B + g_1^B) + h^B) h^B dv dx \\ &+ \varepsilon^3 \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 (d^B h^B) dv dx - \varepsilon \mathcal{I}_{h^B}. \end{aligned}$$

Par continuité des opérateurs K_*^1, K_*^B , on a:

$$\begin{aligned} \|h^B\|^2 &\leq c\tau\varepsilon(\|\bar{g}^B\| + \|g_1^B\|)\|h^B\| + c\left(\frac{\|h\|\|h^B\|}{(1+\gamma)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\|h^B\|^2}{(1+\gamma)^{\frac{1}{2}}}\right) \\ &+ c\tau\varepsilon(\|\bar{g}^A\| + \|g_1^A\| + \|\bar{g}^B\| + \|g_1^B\| + \|h^A\| + \|h^B\|)\|h^B\| \\ &+ \varepsilon^3\left\|\frac{d^B}{1+|v|}\right\|\|h^B\| - \varepsilon\mathcal{I}_{h^B}. \end{aligned}$$

D'où, en appliquant la propriété 3.7.9, en choisissant τ et ε suffisamment petits et γ suffisamment grand et en utilisant les estimations (3.7.19, 3.7.12, 3.7.11),

$$\|h^B\|^2 \leq c\left(\frac{1}{(1+\gamma)^{\frac{1}{2}}} + \tau\right)\|h^A\|^2 + \varepsilon^6\left\|\frac{d^B}{(1+|v|)}\right\|^2 - \varepsilon\mathcal{I}_{h^B}.$$

D'après (3.6.38) et par définition de \mathcal{I}_{h^B} ,

$$\mathcal{I}_{h^B} \geq -c(|\beta_{h^B}|^2 + \|h_-^B\|^2 + \|h_+^B\|^2).$$

Il reste à majorer $|\beta_{h^B}|$. Par définition de β_{h^B} ,

$$|\beta_{h^B}| \leq \left(\int_{\xi>0} \xi(M_*)^{\frac{1}{2}} h^B(1,v) dv\right) + \|h_+^B\|.$$

D'après l'équation (3.6.49) mise sous forme exponentielle, on obtient pour $\xi > 0$,

$$h^B(1,v) = V_\varepsilon^-(h_-^B) \exp\left(-\frac{\phi_{1,-1}}{\varepsilon\xi}\right) + \frac{1}{\xi\varepsilon} \int_{-1}^1 (\bar{\chi}_\gamma K_*^1 h^B + Z^B) \exp\left(-\frac{\phi_{1,x}}{\varepsilon\xi}\right) dx.$$

Ce qui entraîne,

$$|\beta_{h^B}| \leq \frac{1}{\xi\varepsilon} \int_{\xi>0} \int_{-1}^1 (\bar{\chi}_\gamma K_*^1 h^B + Z^B) \exp\left(-\frac{\phi_{1,x}}{\varepsilon\xi}\right) dx dv + \|h_-^B\| + \|h_+^B\|.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz,

$$\begin{aligned} &\left(\int_{-1}^1 (\bar{\chi}_\gamma K_*^1 h^B + Z^B) \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}\sqrt{\xi}} \exp\left(-\frac{\phi_{1,x}}{\varepsilon\xi}\right) dx\right) \\ &\leq \left(\int_{-1}^1 |\bar{\chi}_\gamma K_*^1 h^B + Z^B|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-1}^1 \frac{1}{\xi\varepsilon} \exp\left(-\frac{2\phi_{1,x}}{\varepsilon\xi}\right) dx\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Finalement, étant donné que

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\xi \varepsilon} \exp\left(-\frac{2\phi_{1,x}}{\varepsilon \xi}\right) dx < c,$$

$$|\beta_{h^B}| \leq \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} (\|\bar{\chi}_\gamma K_*^1 h^B\| + \|\nu^{-1} Z^B\|) + (\|h_-^B\| + \|h_+^B\|). \quad (3.7.22)$$

De plus, par définition de Z^B (3.6.51) et en utilisant le lemme 3.7.1,

$$\begin{aligned} \|\nu^{-1} Z^B\| &\leq c\tau\varepsilon(\|\bar{g}^B\| + \|g_1^B\|) + \|\bar{\chi}_\gamma K_*^B h\| \\ &+ c\tau\varepsilon(\|\bar{g}^A\| + \|g_1^A\| + \|h^A\| + \|\bar{g}^B\| + \|g_1^B\| + \|h^B\|) \\ &+ \varepsilon^6 \left\| \frac{d^B}{(1+|v|)} \right\|^2. \end{aligned} \quad (3.7.23)$$

D'après (3.7.19) et (3.7.11) ainsi que l'inégalité

$$\|\bar{\chi}_\gamma K_*^B h\| \leq \frac{c}{(1+\gamma)^{\frac{1}{2}}} (\|h^A\| + \|h^B\|),$$

on obtient en choisissant ε et τ suffisamment petits et γ suffisamment grand,

$$\|h^B\|^2 \leq \varepsilon(\|h_-^B\|^2 + \|h_+^B\|^2) + c\left(\frac{1}{(1+\gamma)^{\frac{1}{2}}} + \tau\right)\|h^A\|^2 + \varepsilon^6 \left\| \frac{d^B}{(1+|v|)} \right\|^2. \quad (3.7.24)$$

En ajoutant les équations (3.7.21) et (3.7.24) et en choisissant ε et τ suffisamment petits et γ suffisamment grand,

$$\begin{aligned} \|h^B\| + \|h^A\| &\leq c\sqrt{\varepsilon} (\|h_-^A\| + \|h_+^A\| + \|h_-^B\| + \|h_+^B\|) \\ &+ c\varepsilon^3 \left(\left\| \frac{d^A}{1+|v|} \right\| + \left\| \frac{d^B}{1+|v|} \right\| \right). \end{aligned}$$

En revenant aux estimations (3.7.18, 3.7.19, 3.7.12, 3.7.11), on obtient les inégalités (3.7.3) et (3.7.4). \square

3.7.2 Estimations L^∞ à poids sur le terme reste.

Pour le contrôle dans L^∞ à poids du terme de reste, on utilise les normes suivantes:

$$\begin{aligned} |f|_r &= \sup_{x \in [-1,1]} \sup_{v \in \mathbb{R}^3} (1+|v|)^r |f(x,v)|, \quad r \geq 0, \\ N(f) &= \sup_{x \in [-1,1]} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |f(x,v)|^2 dv \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Le but de ce paragraphe est de contrôler g^A, g^B, h^A, h^B en norme $|\cdot|_r$. Enonçons en premier lieu les deux propositions suivantes dont la preuve figure dans ([14]),

Proposition 5. *Pour tout $r \geq 0$, il existe une constante c telle que pour toute fonction G telle que $(1 + |v|)^r G \in L^\infty$, U_ε satisfait l'inégalité suivante:*

$$|U_\varepsilon G|_r \leq c \left| \frac{G}{\nu} \right|_r.$$

Proposition 6. *Pour toute fonction G telle que $(1 + |v|)^r G \in L^\infty$ et $\delta > 0$ et pour tout $r \geq 2$, il existe C_δ tel que*

$$N(U_\varepsilon G) \leq \frac{C_\delta}{\sqrt{\varepsilon}} \|\nu^{-\frac{1}{2}} G\| + \delta |G|_r.$$

Il s'agit maintenant de contrôler $|g^A|_r$ et $|g^B|_r$. Cela nécessite dans un premier temps une majoration sur $|g|_r$.

Proposition 7. *Pour tout $r \geq 1$, il existe des constantes c et H_γ strictement positives telles que*

$$\begin{aligned} |g|_r &\leq c(N(g^A) + N(g^B)) + H_\gamma(N(h^A) + N(h^B)) \\ &+ c\sqrt{\varepsilon} \left(\left\| \frac{d^A}{(1 + |v|)} \right\| + \left\| \frac{d^B}{(1 + |v|)} \right\| \right) \\ &+ \frac{c}{\varepsilon^2} (\|h_-^A\| + \|h_+^A\| + \|h_-^B\| + \|h_+^B\|). \end{aligned}$$

Preuve de la proposition 7.

D'après l'équation (3.6.52) mise sous forme exponentielle,

$$g = V_\varepsilon^+(g^{B+}) + U_\varepsilon(Kg + S), \quad (3.7.25)$$

avec

$$g^{B+} = \beta_{g^B} M_+(M^B(1, v))^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.7.26)$$

D'après la proposition 5 appliquée à l'équation (3.6.52), on a

$$|g|_r \leq c |\nu^{-1} Kg|_r + c |\nu^{-1} S|_r + c |\beta_{g^B}|. \quad (3.7.27)$$

Or, par continuité de K , on a pour tout $r \geq 1$ ([14]),

$$|\nu^{-1} Kg|_r \leq c \sup_{x \in [-1, 1]} \sup_{v \in \mathbb{R}^3} (1 + |v|)^{r-1} |g(x, v)| = c |g|_{r-1} \quad (3.7.28)$$

et

$$|\nu^{-1}Kg|_0^2 \leq c \sup_{x \in [-1,1]} \int_{\mathbb{R}^3} g^2(x,v)dv = c(N(g))^2. \quad (3.7.29)$$

Donc, en revenant à (3.7.27) on a

$$|g|_r \leq c|g|_{r-1} + c|S|_r + c|\beta_{g^B}|.$$

Ainsi, d'après (3.7.29) et une récurrence immédiate, on a

$$|g|_r \leq cN(g) + c \sum_{k=0}^r |S|_k + c|\beta_{g^B}| \leq cN(g) + c|S|_r + c|\beta_{g^B}|. \quad (3.7.30)$$

Majorons $|S|_r$. Par définition de S (3.6.53),

$$|S|_r \leq |\chi_\gamma \sigma^{-1} K_* h|_r + \varepsilon(|\mu \hat{g}|_r + |L^1(\hat{g}^B, \hat{g})|_r). \quad (3.7.31)$$

Or, par continuité de K_* ,

$$\begin{aligned} |\chi_\gamma \sigma^{-1} K_* h|_r &\leq \sup_{x \in [-1,1]} \sup_{v \in \mathbb{R}^3} |(1+|v|)^r \chi_\gamma \sigma^{-1}| \sup_{x \in [-1,1]} \sup_{v \in \mathbb{R}^3} |K_* h| \\ &\leq H_\gamma N(h). \end{aligned}$$

Par ailleurs, d'après ([10]) on a,

$$|L^1(\hat{g}^B, \hat{g})|_r \leq c(|\hat{g}^B|_r + |\hat{g}|_r) \leq c(N(\hat{g}^A) + N(\hat{g}^B)).$$

De plus, les fonctions $(1+|v|)^r \psi_i(v)$ étant bornées sur \mathbb{R}^3 pour tout $i \in \{0,4\}$, on a

$$|\hat{g}|_r \leq c \sup_{x \in [-1,1]} (|p_0(x)| + |p_4(x)|) \leq cN(\hat{g}).$$

D'où, en revenant à (3.7.31)

$$|S|_r \leq c\varepsilon (N(\hat{g}^A) + N(\hat{g}^B)) + H_\gamma (N(h^A) + N(h^B)). \quad (3.7.32)$$

Il vient donc en appliquant l'inégalité (3.7.32) au second membre de (3.7.30),

$$|g|_r \leq cN(g) + c\varepsilon (N(\hat{g}^A) + N(\hat{g}^B)) + H_\gamma (N(h^A) + N(h^B)) + c|\beta_{g^B}|.$$

On recherche maintenant une majoration sur $N(g)$. D'après la proposition 6 appliquée à l'équation (3.6.52), on a pour tout $\delta > 0$,

$$N(g) \leq \frac{C_\delta}{\sqrt{\varepsilon}} \|\nu^{-1}Kg\| + \delta |Kg|_r + \frac{C_\delta}{\sqrt{\varepsilon}} \|\nu^{-1}S\| + \delta |S|_r + c|\beta_{g^B}|. \quad (3.7.33)$$

Or, d'après (3.7.28, 3.7.31) ainsi que l'inégalité précédente,

$$|Kg|_r \leq cN(g) + c\varepsilon(N(\hat{g}^A) + N(\hat{g}^B)) + H_\gamma(N(h^A) + N(h^B)) + c|\beta_{g^B}|.$$

Donc, en utilisant l'inégalité précédente dans (3.7.33) et en choisissant δ suffisamment petit, il vient

$$\begin{aligned} N(g) &\leq \frac{C_\delta}{\sqrt{\varepsilon}} \|\nu^{-1}Kg\| + c\varepsilon(N(\hat{g}^A) + N(\hat{g}^B)) + H_\gamma(N(h^A) + N(h^B)) \\ &\quad + \frac{C_\delta}{\sqrt{\varepsilon}} \|\nu^{-1}S\| + c|\beta_{g^B}|. \end{aligned}$$

Or, par continuité de K ,

$$\|\nu^{-1}Kg\| \leq c\|g\|$$

et par définition de S (3.6.53),

$$\|\nu^{-1}S\| \leq C_\gamma \|h\| + c\tau\varepsilon(\|\hat{g}^A\| + \|\hat{g}^B\|).$$

Donc

$$\begin{aligned} N(g) &\leq \frac{C_\delta}{\sqrt{\varepsilon}} \|g\| + c\varepsilon(N(\hat{g}^A) + N(\hat{g}^B)) + H_\gamma(N(h^A) + N(h^B)) \\ &\quad + \frac{C_\delta}{\sqrt{\varepsilon}} \|h\| + C_\delta\tau\sqrt{\varepsilon}(\|\hat{g}^A\| + \|\hat{g}^B\|) + c|\beta_{g^B}|. \end{aligned}$$

Pour poursuivre le contrôle de $|g|_r$, estimons β_{g^B} . D'après la forme exponentielle de l'équation (3.6.48), on a pour $\xi > 0$,

$$|g^B(1,v)| \leq \frac{1}{\xi\varepsilon} \int_{-1}^1 |(Kg^B + S^B)(x,v)| \exp\left(-\frac{\phi_{1,x}}{\xi\varepsilon}\right) dx.$$

Donc,

$$\begin{aligned} |\beta_{g^B}| &= \left| \int_{\xi>0} \xi(M^B(1,v))^{\frac{1}{2}} g^B(1,v) dv \right| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{\xi>0} \xi^{\frac{1}{2}} M^B(1,v)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-1}^1 |(Kg^B + S^B)| \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\xi}} \exp\left(-\frac{\phi_{1,x}}{\varepsilon\xi}\right) dx \right) dv. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et compte tenu du fait que

$$\int_{\xi>0} \xi M^B(1,v) dv = 1,$$

on a

$$|\beta_{g^B}| \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\int_{\xi>0} \left(\int_{-1}^1 |(Kg^B + S^B)| \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\xi}} \exp\left(-\frac{\phi_{1,x}}{\varepsilon\xi}\right) dx \right)^2 dv \right)^{\frac{1}{2}}.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz par rapport à la variable x , on a

$$\begin{aligned} & \left(\int_{-1}^1 |(Kg^B + S^B)(x,v)| \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}\sqrt{\xi}} \exp\left(-\frac{\phi_{1,x}}{\varepsilon\xi}\right) dx \right)^2 \\ & \leq \left(\int_{-1}^1 |(Kg^B + S^B)(x,v)|^2 dx \right) \left(\int_{-1}^1 \frac{1}{\varepsilon\xi} \exp\left(-\frac{2}{\varepsilon\xi}\phi_{1,x}\right) dx \right). \end{aligned}$$

Or,

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\varepsilon\xi} \exp\left(-\frac{2}{\varepsilon\xi}\phi_{1,x}\right) dx < c.$$

Finalement, on obtient la majoration suivante

$$|\beta_{g^B}| \leq \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} (\|Kg^B\| + \|S^B\|).$$

Ainsi, par continuité de K , par définition de S^B (3.6.49)

$$|\beta_{g^B}| \leq \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \left((\|g^B\| + \|g\| + \|h\| + \|h^B\| + \tau\varepsilon(\|\hat{g}^B\| + \|\hat{g}^B\|)) \right).$$

Et, en utilisant la proposition 4, on obtient

$$\begin{aligned} |\beta_{g^B}| & \leq c\sqrt{\varepsilon} \left(\left\| \frac{d^A}{(1+|v|)} \right\| + \left\| \frac{d^B}{(1+|v|)} \right\| \right) \\ & \quad + \frac{c}{\varepsilon^2} (\|h_-^A\| + \|h_+^A\| + \|h_-^B\| + \|h_+^B\|). \end{aligned}$$

□

Proposition 8. *Pour tout $r \geq 3$, il existe des constantes c et H_γ telles que*

$$\begin{aligned} (|g^A|_r + |g^B|_r) & \leq c\sqrt{\varepsilon} \left(\left\| \frac{d^A}{(1+|v|)} \right\| + \left\| \frac{d^B}{(1+|v|)} \right\| \right) + cH_\gamma (|h^A|_r + |h^B|_r) \\ & \quad + \frac{c}{\varepsilon^2} (|h_-^A|_r + |h_+^A|_r + |h_-^B|_r + |h_+^B|_r). \end{aligned}$$

Preuve de la proposition 8.

On raisonne comme pour la preuve de la proposition 7.

g^A et g^B , solutions des équations (3.6.44) et (3.6.48) peuvent s'écrire sous forme exponentielle de la manière suivante

$$g^A = U_\varepsilon(Kg^A + S^A), \quad (3.7.34)$$

$$g^B = V_\varepsilon^+(g^{B+}) + U_\varepsilon(Kg^B + S^B), \quad (3.7.35)$$

avec g^{B+} défini en (3.7.26). Donc, d'après la proposition 5 appliquée à l'équation (3.7.34),

$$|g^A|_r \leq c|Kg^A|_r + c|S^A|_r.$$

Par continuité de K , on a pour tout $r \geq 1$ ([14]),

$$|Kg^A|_r \leq c \sup_{x \in [-1,1]} \sup_{v \in \mathbb{R}^3} (1 + |v|)^{r-1} |g^A(x,v)| = c|g^A|_{r-1} \quad (3.7.36)$$

et

$$|Kg^A|_0^2 \leq c \sup_{x \in [-1,1]} \int_{\mathbb{R}^3} (g^A)^2(x,v) dv = c(N(g^A))^2. \quad (3.7.37)$$

Donc, pour tout $r \geq 1$,

$$|g^A|_r \leq c|g^A|_{r-1} + c|S^A|_r.$$

Soit d'après (3.7.37) et une récurrence immédiate, il vient

$$|g^A|_r \leq cN(g^A) + c \sum_{k=0}^r |S^A|_k \leq cN(g^A) + c|S^A|_r. \quad (3.7.38)$$

En effectuant la même démarche avec (3.7.35), on montre que

$$|g^B|_r \leq cN(g^B) + \sum_{k=0}^r c|S^B|_k + c|\beta_{g^B}| \leq cN(g^B) + c|S^B|_r + c|\beta_{g^B}|.$$

D'après les définitions de S^A et S^B (3.6.45, 3.6.49) ainsi que l'inégalité

$$\left| \frac{1}{\sqrt{M^A}} Q(\sqrt{M}g, M^A) \right|_r \leq c|g|_r \quad ([19]),$$

on obtient

$$\begin{aligned} |S^A|_r &\leq c|g|_r + (|\chi_\gamma \sigma_A^{-1} K_*^A h|_r + |\chi_\gamma \sigma_A^{-1} K_*^1 h^A|_r) + \tau \varepsilon |\hat{g}^A|_r \\ &\quad + \varepsilon (|L_1^A(\hat{g}, \hat{g}^A)|_r + |L_A^1(\hat{g}^B)|_r) \end{aligned}$$

et

$$|S^B|_r \leq c|g|_r + (|\chi_\gamma \sigma_B^{-1} K_*^B h|_r + |\chi_\gamma \sigma_B^{-1} K_*^1 h^B|_r) + \tau \varepsilon |\hat{g}^B|_r + \varepsilon |L_B^1(\hat{g}, \hat{g}^B)|_r.$$

Or, par continuité de K_*^A , K_*^B et K_*^1 ,

$$\begin{aligned} |\chi_\gamma \sigma_A^{-1} K_*^A h|_r &\leq C_\gamma N(h), & |\chi_\gamma \sigma_A^{-1} K_*^1 h^A|_r &\leq C_\gamma N(h^A), \\ |\chi_\gamma \sigma_B^{-1} K_*^B h|_r &\leq C_\gamma N(h), & |\chi_\gamma \sigma_B^{-1} K_*^1 h^B|_r &\leq C_\gamma N(h^B). \end{aligned}$$

De plus, pour les mêmes raisons que (3.7.17), on a

$$|\hat{g}^A|_r \leq cN(\hat{g}^A), \quad (3.7.39)$$

$$|\hat{g}^B|_r \leq cN(\hat{g}^B). \quad (3.7.40)$$

Par ailleurs, pour toutes fonctions f , f^A et f^B telles que $(1 + |v|)^r f$, $(1 + |v|)^r f^A$, $(1 + |v|)^r f^B \in L^\infty$, on a ([10])

$$\begin{aligned} |\nu^{-1} L_A^1(f, f^A)|_r &\leq c(|f|_r + |f^A|_r), & |\nu^{-1} L_A^1(f^B)|_r &\leq c|f^B|_r, \\ |\nu^{-1} L_B^1(f, f^B)|_r &\leq c(|f|_r + |f^B|_r). \end{aligned}$$

Ces inégalités entraînent alors, compte tenu de (3.7.39), (3.7.40) et de la proposition 7

$$\begin{aligned} |L_A^1(\hat{g}, \hat{g}^A)|_r &\leq c(|\hat{g}|_{r+1} + |\hat{g}^A|_{r+1}) \leq c(N(\hat{g}^A) + N(\hat{g}^B)), \\ |L_1^A(\hat{g}^B)|_r &\leq c|\hat{g}^B|_{r+1} \leq cN(\hat{g}^B), \\ |L_B^1(\hat{g}, \hat{g}^B)|_r &\leq c(|\hat{g}|_{r+1} + |\hat{g}^B|_{r+1}) \leq c(N(\hat{g}^A) + N(\hat{g}^B)). \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} |S^A|_r &\leq c|g|_r + C_\gamma (N(h^A) + N(h^B)) + c\varepsilon (N(\hat{g}^A) + N(\hat{g}^B)), \\ |S^B|_r &\leq c|g|_r + C_\gamma (N(h^A) + N(h^B)) + c\varepsilon (N(\hat{g}^A) + N(\hat{g}^B)). \end{aligned}$$

Ainsi, en majorant $|g|_r$ grâce à la proposition 7,

$$\begin{aligned} |S^A|_r &\leq c(N(g^A) + N(g^B)) + H_\gamma(N(h^A) + N(h^B)) \\ &\quad + c\sqrt{\varepsilon} \left(\left\| \frac{d^A}{(1 + |v|)} \right\| + \left\| \frac{d^B}{(1 + |v|)} \right\| \right) \\ &\quad + \frac{c}{\varepsilon^2} (\|h_-^A\| + \|h_+^A\| + \|h_-^B\| + \|h_+^B\|) \end{aligned} \quad (3.7.41)$$

et

$$\begin{aligned}
|S^B|_r &\leq c(N(g^A) + N(g^B)) + H_\gamma(N(h^A) + N(h^B)) \\
&+ c\sqrt{\varepsilon}(\|\frac{d^A}{(1+|v|)}\| + \|\frac{d^B}{(1+|v|)}\|) \\
&+ \frac{c}{\varepsilon^2}(\|h_-^A\| + \|h_+^A\| + \|h_-^B\| + \|h_+^B\|)
\end{aligned} \tag{3.7.42}$$

D'où, d'après (3.7.38, 3.7.39, 3.7.41, 3.7.42) ainsi que la proposition 7,

$$\begin{aligned}
|g^A|_r + |g^B|_r &\leq c(N(g^A) + N(g^B)) + cH_\gamma(N(h^A) + N(h^B)) \\
&+ c\sqrt{\varepsilon}(\|\frac{d^A}{(1+|v|)}\| + \|\frac{d^B}{(1+|v|)}\|) \\
&+ \frac{c}{\varepsilon^2}(\|h_-^A\| + \|h_+^A\| + \|h_-^B\| + \|h_+^B\|).
\end{aligned} \tag{3.7.43}$$

Pour poursuivre le contrôle de $|g^A|_r$ et de $|g^B|_r$, il est alors nécessaire d'estimer $N(g^A) + N(g^B)$.

Estimation de $N(g^A) + N(g^B)$.

D'après la proposition 6, on a pour tout $\delta > 0$,

$$\begin{aligned}
N(g^A) + N(g^B) &\leq N(U_\varepsilon(Kg^A + S^A)) + N(U_\varepsilon(Kg^B + S^B)) \\
&+ N(V_\varepsilon^+(\beta_{g^B}M_+(M^B(1,v))^{-\frac{1}{2}})). \\
&\leq \frac{C_\delta}{\sqrt{\varepsilon}}(\|\nu^{-1}Kg^A\| + \|\nu^{-1}Kg^B\|) + \delta(|Kg^A|_r + |Kg^B|_r) \\
&+ \frac{C_\delta}{\sqrt{\varepsilon}}(\|\nu^{-1}S^A\| + \|\nu^{-1}S^B\|) + \delta(|S^A|_r + |S^B|_r). \\
&+ |\beta_{g^B}|N(M_+(M^B(1,v))^{-\frac{1}{2}}),
\end{aligned} \tag{3.7.44}$$

car comme $\frac{\phi_{1,x}}{\varepsilon\xi} < 0$ pour $\xi < 0$,

$$V_\varepsilon^+(M_+(M^B(1,v))^{-\frac{1}{2}}) \leq M_+(M^B(1,v))^{-\frac{1}{2}}.$$

Or, par continuité de K ([14]),

$$\begin{aligned}
|Kg^A|_r &\leq c|g^A|_{r-1} \leq cN(g^A) + c|S^A|_r, \\
|Kg^B|_r &\leq c|g^B|_{r-1} \leq cN(g^B) + c|S^B|_r.
\end{aligned}$$

D'après (3.6.45) et (3.6.49), on obtient finalement pour tout $\delta > 0$,

$$\begin{aligned}
N(g^A) + N(g^B) &\leq \frac{C_\delta}{\sqrt{\varepsilon}} (\|\nu^{-1}Kg^A\| + \|\nu^{-1}Kg^B\| + \|\nu^{-1}S^A\| + \|\nu^{-1}S^B\|) \\
&+ \delta(N(g^A) + N(g^B)) + H_\gamma(N(h^A) + N(h^B)) \\
&+ c\sqrt{\varepsilon} \left(\left\| \frac{d^A}{(1+|v|)} \right\| + \left\| \frac{d^B}{(1+|v|)} \right\| \right) \\
&+ \frac{c}{\varepsilon^2} (\|h_-^A\| + \|h_+^A\| + \|h_-^B\| + \|h_+^B\|).
\end{aligned}$$

Soit, en choisissant δ suffisamment petit,

$$\begin{aligned}
N(g^A) + N(g^B) &\leq \frac{C_\delta}{\sqrt{\varepsilon}} (\|\nu^{-1}Kg^A\| + \|\nu^{-1}Kg^B\| + \|\nu^{-1}S^A\| + \|\nu^{-1}S^B\|) \\
&+ H_\gamma(N(h^A) + N(h^B)) + c\sqrt{\varepsilon} \left(\left\| \frac{d^A}{(1+|v|)} \right\| + \left\| \frac{d^B}{(1+|v|)} \right\| \right) \\
&+ \frac{c}{\varepsilon^2} (\|h_-^A\| + \|h_+^A\| + \|h_-^B\| + \|h_+^B\|). \tag{3.7.45}
\end{aligned}$$

Par continuité de K et d'après la proposition 4,

$$\begin{aligned}
\|Kg^A\| + \|Kg^B\| &\leq c\varepsilon \left(\left\| \frac{d^A}{(1+|v|)} \right\| + \left\| \frac{d^B}{(1+|v|)} \right\| \right) \\
&+ \frac{c}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}} (\|h_-^A\| + \|h_+^A\| + \|h_-^B\| + \|h_+^B\|).
\end{aligned}$$

Egalement, par définitions de S^A et S^B (3.6.45, 3.6.49) et la proposition 4,

$$\begin{aligned}
\|\nu^{-1}S^A\| + \|\nu^{-1}S^B\| &\leq c\varepsilon \left(\left\| \frac{d^A}{(1+|v|)} \right\| + \left\| \frac{d^B}{(1+|v|)} \right\| \right) \\
&+ \frac{c}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}} (\|h_-^A\| + \|h_+^A\| + \|h_-^B\| + \|h_+^B\|).
\end{aligned}$$

Ainsi, en revenant à l'inégalité (3.7.45), on obtient pour tout $\delta > 0$,

$$\begin{aligned}
N(g^A) + N(g^B) &\leq \delta(|g^A|_r + |g^B|_r) + \sqrt{\varepsilon} \left(\left\| \frac{d^A}{(1+|v|)} \right\| + \left\| \frac{d^B}{(1+|v|)} \right\| \right) \\
&+ \frac{c}{\varepsilon^2} (\|h_-^A\| + \|h_+^A\| + \|h_-^B\| + \|h_+^B\|) \\
&+ H_\gamma(N(h^A) + N(h^B)). \tag{3.7.46}
\end{aligned}$$

Fin de la preuve de la proposition 8.

D'après les inégalités (3.7.43, 3.7.46), on a pour tout $\delta > 0$ suffisamment petit,

$$\begin{aligned} |g^A|_r + |g^B|_r &\leq \delta(|g^A|_r + |g^B|_r) + c\sqrt{\varepsilon}(\|\frac{d^A}{(1+|v|)}\| + \|\frac{d^B}{(1+|v|)}\|) \\ &\quad + \frac{c}{\varepsilon^2}(\|h_-^A\| + \|h_+^A\| + \|h_-^B\| + \|h_+^B\|) \\ &\quad + H_\gamma(N(h^A) + N(h^B)). \end{aligned}$$

Ainsi en choisissant δ suffisamment petit,

$$\begin{aligned} |g^A|_r + |g^B|_r &\leq c\sqrt{\varepsilon}(\|\frac{d^A}{(1+|v|)}\| + \|\frac{d^B}{(1+|v|)}\|) \\ &\quad + \frac{c}{\varepsilon^2}(\|h_-^A\| + \|h_+^A\| + \|h_-^B\| + \|h_+^B\|) \\ &\quad + H_\gamma(N(h^A) + N(h^B)). \end{aligned}$$

Or, pour toute fonction f telle que $(1+|v|)^r f \in L^\infty$, on a pour $r \geq 1$,

$$[N(f)]^2 \leq \sup_{x \in [-1,1]} \sup_{v \in \mathbb{R}^3} (f^2(x,v)(1+|v|)^{2r}) \int_{\mathbb{R}^3} \frac{dv}{(1+|v|)^{2r}} \leq |f|_r^2.$$

Donc, pour tout $r \geq 1$,

$$N(h^A) + N(h^B) \leq c(|h^A|_r + |h^B|_r). \quad (3.7.47)$$

De plus, pour toute fonction f telle que $(1+|v|)f \in L^2$ et $(1+|v|)^3 f \in L^\infty$, on a $\|f\| \leq |f|_3$. D'où, pour $r \geq 3$,

$$\begin{aligned} |g^A|_r + |g^B|_r &\leq c\sqrt{\varepsilon}(\|\frac{d^A}{(1+|v|)}\| + \|\frac{d^B}{(1+|v|)}\|) \\ &\quad + \frac{c}{\varepsilon^2}(|h_-^A|_r + |h_+^A|_r + |h_-^B|_r + |h_+^B|_r) + H_\gamma(|h^A|_r + |h^B|_r). \end{aligned}$$

□

Pour achever le contrôle de $|g^A|_r + |g^B|_r$, il reste à estimer $|h^A|_r + |h^B|_r$.

Proposition 9. *Pour tout $r \geq 3$, il existe une constante c telle que,*

$$\begin{aligned} |h^A|_r + |h^B|_r &\leq c\varepsilon^{\frac{3}{2}}(\|\frac{d^A}{(1+|v|)}\| + \|\frac{d^B}{(1+|v|)}\|) \\ &\quad + \varepsilon^3(|\nu^{-1}d^A|_r + |\nu^{-1}d^B|_r) \\ &\quad + \frac{c}{\varepsilon}(|h_-^A|_r + |h_+^A|_r + |h_-^B|_r + |h_+^B|_r). \end{aligned}$$

Preuve de la Proposition 9.

h^A et h^B , solutions des équations (3.6.46, 3.6.50) peuvent s'écrire sous forme exponentielle de la manière suivante,

$$\begin{aligned} h^A &= V_\varepsilon^-(h_-^A) + V_\varepsilon^+(h_+^A) + U_\varepsilon(\bar{\chi}_\gamma K_*^1 h^A + Z^A), \\ h^B &= V_\varepsilon^-(h_-^B) + V_\varepsilon^+(h_+^B + \beta_{h^B} M_+(M_*)^{-\frac{1}{2}}) + U_\varepsilon(\bar{\chi}_\gamma K_*^1 h^B + Z^B). \end{aligned}$$

D'après la proposition 5, par continuité de K_*^1 , K_*^A , K_*^B et compte-tenu du fait que

$$\begin{aligned} |V_\varepsilon^- h_-^A|_r &\leq |h_-^A|_r, \quad |V_\varepsilon^+ h_+^A|_r \leq |h_+^A|_r, \quad |V_\varepsilon^- h_-^B|_r \leq |h_-^B|_r, \\ |V_\varepsilon^+(h_+^B + \beta_{h^B} M_+(M_*)^{-\frac{1}{2}})|_r &\leq |h_+^B|_r + c|\beta_{h^B}|, \end{aligned}$$

on a:

$$\begin{aligned} |h^A|_r &\leq \frac{c}{1+\gamma} |h^A|_r + \frac{c}{1+\gamma} |h|_r \\ &+ \tau\varepsilon(|\bar{g}^B|_r + |g_1^B|_r + |h^B|_r + |\bar{g}^A|_r + |g_1^A|_r + |h^A|_r) \\ &+ \varepsilon^3 |\nu^{-1} d^A|_r + |h_-^A|_r + |h_+^A|_r \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |h^B|_r &\leq \frac{c}{1+\gamma} |h^B|_r + \frac{c}{1+\gamma} |h|_r \\ &+ \tau\varepsilon(|\bar{g}^B|_r + |g_1^B|_r + |h^B|_r + |\bar{g}^A|_r + |g_1^A|_r + |h^A|_r) \\ &+ \varepsilon^3 |\nu^{-1} d^B|_r + |h_-^B|_r + |h_+^B|_r + c|\beta_{h^B}|. \end{aligned}$$

D'après les inégalités (3.7.22, 3.7.23), on a

$$\begin{aligned} |\beta_{h^B}| &\leq \frac{c}{\varepsilon} \left(\|h^B\| + c\tau\varepsilon(\|\bar{g}^B\| + \|g_1^B\| + \|h^A\| + \|h^B\|) \right. \\ &+ c\tau\varepsilon(\|\bar{g}^A\| + \|g_1^A\| + \|h^A\| + \|\bar{g}^B\| + \|g_1^B\| + \|h^B\|) \\ &\left. + \varepsilon^6 \left\| \frac{d^B}{(1+|v|)} \right\| \right). \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant la proposition 4, $|\beta_{h^B}|$ est contrôlé de la manière suivante:

$$\begin{aligned} |\beta_{h^B}| &\leq c(\|h_-^A\| + \|h_+^A\| + \|h_-^B\| + \|h_+^B\|) \\ &+ \varepsilon^{\frac{5}{2}} \left(\left\| \frac{d^A}{(1+|v|)} \right\| + \left\| \frac{d^B}{(1+|v|)} \right\| \right). \end{aligned}$$

De plus, pour toute fonction f telle que $\|f\|$ et $|f|_r$ soient définies, on a $\|f\| \leq |f|_3$. D'où, en choisissant γ suffisamment grand, τ et ε suffisamment petits,

$$\begin{aligned} |h^A|_r + |h^B|_r &\leq \tau\varepsilon(|\bar{g}^B|_r + |g_1^B|_r + |\bar{g}^A|_r + |g_1^A|_r) \\ &\quad + \varepsilon^{\frac{5}{2}}(|\nu^{-1}d^A|_r + |\nu^{-1}d^B|_r) + |h_-^A|_r + |h_+^A|_r + |h_-^B|_r + |h_+^B|_r. \end{aligned} \quad (3.7.48)$$

Afin de contrôler le terme

$$\tau\varepsilon(|\bar{g}^A|_r + |g_1^A|_r + |\bar{g}^B|_r + |g_1^B|_r),$$

on utilise que

$$|\bar{g}^A|_r \leq |g^A|_r + |g_1^A|_r + |\hat{g}^A|_r \quad \text{et} \quad |\bar{g}^B|_r \leq |g^B|_r + |g_1^B|_r + |\hat{g}^B|_r,$$

avec pour tout $i \in \{0; 1; 4\}$,

$$|g_i^A|_r \leq N(g_i^A), \quad \text{et} \quad |g_i^B|_r \leq N(g_i^B).$$

D'où, on obtient

$$\varepsilon\tau(|\bar{g}^A|_r + |g_1^A|_r + |\bar{g}^B|_r + |g_1^B|_r) \leq \varepsilon\tau(|g^A|_r + N(g^A) + |g^B|_r + N(g^B)).$$

La proposition 8 appliquée à l'inégalité (3.7.46) entraîne la majoration suivante sur $N(g^A) + N(g^B)$,

$$\begin{aligned} N(g^A) + N(g^B) &\leq c\sqrt{\varepsilon} \left(\left\| \frac{d^A}{(1+|v|)} \right\| + \left\| \frac{d^B}{(1+|v|)} \right\| \right) + H_\gamma(|h^A|_r + |h^B|_r) \\ &\quad + \frac{c}{\varepsilon^2}(|h_-^A|_r + |h_+^A|_r + |h_-^B|_r + |h_+^B|_r). \end{aligned}$$

L'inégalité (3.7.48) devient donc en choisissant ε et τ suffisamment petits,

$$\begin{aligned} |h^A|_r + |h^B|_r &\leq c\varepsilon^{\frac{3}{2}} \left(\left\| \frac{d^A}{(1+|v|)} \right\| + \left\| \frac{d^B}{(1+|v|)} \right\| \right) \\ &\quad + \varepsilon^{\frac{5}{2}}(|\nu^{-1}d^A|_r + |\nu^{-1}d^B|_r) \\ &\quad + \frac{c}{\varepsilon^2}(|h_-^A|_r + |h_+^A|_r + |h_-^B|_r + |h_+^B|_r). \end{aligned}$$

□

Preuve de la proposition 3.

σ_A et σ_B étant bornés, R^A et R^B vérifient l'inégalité

$$M_*^{-\frac{1}{2}}(|R^A| + |R^B|) \leq (|h^A| + c|g^A| + |h^B| + c|g^B|).$$

On rappelle que

$$M_* = \frac{1}{(\pi T_*)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{v^2}{T_*}\right)$$

avec $T_* > T_{H0}$. Soit $\beta_0 = \frac{1}{2T_*}$.

$$|M_*^{-\frac{1}{2}}R^A|_r + |M_*^{-\frac{1}{2}}R^B|_r \leq (|h^A|_r + c|g^A|_r + |h^B|_r + c|g^B|_r).$$

Les propositions 8 et 9 impliquent alors, pour tout $r \geq 3$,

$$\begin{aligned} |R^A|_{r,\beta_0} + |R^B|_{r,\beta_0} &\leq c\sqrt{\varepsilon}(\|d^A\| + \|d^B\|) + \varepsilon^3 (|\nu^{-1}d^A|_r + |\nu^{-1}d^B|_r) \\ &+ \frac{c}{\varepsilon^2}(|h_-^A|_r + |h_+^A|_r + |h_-^B|_r + |h_+^B|_r). \end{aligned}$$

Or, étant donné que

$$\begin{aligned} h_-^A &= \zeta_-^A M_*^{-\frac{1}{2}}, & h_+^A &= \zeta_+^A M_*^{-\frac{1}{2}}, & h_-^B &= \zeta_-^B M_*^{-\frac{1}{2}}, \\ h_+^B &= \zeta_+^B M_*^{-\frac{1}{2}}, & d^A &= D^A M_*^{-\frac{1}{2}}, & d^B &= D^B M_*^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

en utilisant l'estimation $\|d\| \leq |\frac{d}{\nu}|_3$ ainsi que (3.6.36), on obtient pour tout $r \geq 3$,

$$\begin{aligned} |R^A|_{r,\beta_0} + |R^B|_{r,\beta_0} &\leq c\sqrt{\varepsilon}(|D^A|_{r-1,\beta_0} + |D^B|_{r-1,\beta_0}) \\ &+ \frac{c}{\varepsilon^2}(|\zeta_-^A|_{r,\beta_0} + |\zeta_+^A|_{r,\beta_0} + |\zeta_-^B|_{r,\beta_0} + |\zeta_+^B|_{r,\beta_0}). \end{aligned}$$

□

3.7.3 Convergence du procédé itératif.

Les restes des problèmes linéarisés solutions de (3.6.14, 3.6.15) ayant été contrôlés précédemment, ce paragraphe traite des termes restes des problèmes non linéaires, solutions des équations (3.6.6, 3.6.7). Ils sont construits comme la limite d'une suite d'itérations de termes restes pour des problèmes linéarisés.

Théorème 3.7.1. *Pour tout $r \geq 3$, il existe $c, c', \varepsilon_0, \tau_0$ et β_0 tels que pour tous $\varepsilon < \varepsilon_0$, et $\tau < \tau_0$, le problème (3.6.6, 3.6.7) possède une unique solution (R^A, R^B) satisfaisant l'estimation suivante:*

$$|R^A|_{r, \beta_0} + |R^B|_{r, \beta_0} \leq c \left(\varepsilon^{\frac{3}{2}} (|A|_{r, \beta_0} + |B|_{r, \beta_0}) + \exp\left(-\frac{c'}{\varepsilon}\right) \right).$$

On rappelle que la norme $|\cdot|_{r, \beta_0}$ est définie par la formule (3.6.41).

Preuve du théorème 3.7.1.

On obtient les solutions R^A et R^B aux problèmes, comme les limites des suites R_k^A et R_k^B définies de la façon suivante:

$$R_0^A = R_0^B = 0,$$

et pour tout $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} \xi \frac{\partial}{\partial x} R_k^A &= \frac{1}{\varepsilon} (Q(R_k^A, M) + Q(M^A, R_k)) + \mathcal{N}_A(R_k) + \tilde{\mathcal{N}}_{A^*}(R_k^A, R_k^B) \\ &+ \varepsilon^2 \left(Q(R_{k-1}^A, R_{k-1}) + I(R_{k-1}^B) Q(R_{k-1}^A, M^B) \right) + \varepsilon^3 A, \end{aligned} \quad (3.7.49)$$

$$\begin{aligned} \xi \frac{\partial}{\partial x} R_k^B &= \frac{1}{\varepsilon} (Q(R_k^B, M) + Q(M^B, R_k)) + \mathcal{N}_B(R_k^B, R_k) \\ &+ \varepsilon^2 \left(I(R_{k-1}^B) (Q(M^B, R_{k-1}) + Q(R_{k-1}^B, M^B)) + Q(R_{k-1}^B, R_{k-1}) \right) \\ &+ \varepsilon^3 B, \end{aligned} \quad (3.7.50)$$

satisfaisant les conditions de bord

$$\begin{aligned} R_k^A(-1, v) &= \zeta^{A-}, \quad \xi > 0, \quad R_k^A(1, v) = \zeta^{A+}, \quad \xi < 0, \\ R_k^B(-1, v) &= \zeta^{B-}, \quad \xi > 0, \quad R_k^B(1, v) = \beta_{R_k^B} M_+ + \zeta^{B+}, \quad \xi < 0. \end{aligned} \quad (3.7.51)$$

D'après la proposition 3, appliquée aux équations (3.7.49, 3.7.50, 3.7.51),

$$\begin{aligned} |R_k^A|_{r, \beta_0} + |R_k^B|_{r, \beta_0} &\leq c \varepsilon^{\frac{1}{2}} (|D^A|_{r-1, \beta_0} + |D^B|_{r-1, \beta_0}) \\ &+ \frac{c}{\varepsilon^2} (|\zeta^{A-}|_{r, \beta_0} + |\zeta^{A+}|_{r, \beta_0} + |\zeta^{B-}|_{r, \beta_0} + |\zeta^{B+}|_{r, \beta_0}), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} D^A &= \varepsilon A + Q(R_{k-1}^A, R_{k-1}) + I(R_{k-1}^B) Q(R_{k-1}^A, M^B), \\ D^B &= \varepsilon B + I(R_{k-1}^B) (Q(M^B, R_{k-1}) + Q(R_{k-1}^B, M^B)) + Q(R_{k-1}^B, R_{k-1}). \end{aligned}$$

On rappelle l'inégalité suivante ([14]),

$$|M^{-\frac{1}{2}}Q(R,S)|_{r-1} \leq |M^{-\frac{1}{2}}R|_r |M^{-\frac{1}{2}}S|_r. \quad (3.7.52)$$

qui implique que

$$\begin{aligned} |Q(R_{k-1}^A, R_{k-1}) + I(R_{k-1}^B)Q(R_{k-1}^A, M^B)|_{r-1, \beta_0} \\ \leq (|R_{k-1}|_{r, \beta_0} + |R_{k-1}^B|_{r, \beta_0}) |R_{k-1}^A|_{r, \beta_0}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |I(R_{k-1}^B)(Q(M^B, R_{k-1}) + Q(R_{k-1}^B, M^B)) + Q(R_{k-1}^B, R_{k-1})|_{r-1, \beta_0} \\ \leq |R_{k-1}^B|_{r, \beta_0} |R_{k-1}|_{r, \beta_0} + |R_{k-1}^B|_{r, \beta_0}^2. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} |D^A|_{r-1, \beta_0} &\leq \varepsilon |A|_{r-1, \beta_0} + (|R_{k-1}|_{r, \beta_0} + |R_{k-1}^B|_{r, \beta_0}) |R_{k-1}^A|_{r, \beta_0}, \\ |D^B|_{r-1, \beta_0} &\leq \varepsilon |B|_{r-1, \beta_0} + (|R_{k-1}|_{r, \beta_0} + |R_{k-1}^B|_{r, \beta_0}) |R_{k-1}^B|_{r, \beta_0}. \end{aligned}$$

R_k^A et R_k^B satisfont donc la formule de récurrence suivante

$$\begin{aligned} |R_k^A|_{r, \beta_0} + |R_k^B|_{r, \beta_0} &\leq \varepsilon^{\frac{1}{2}} |R_{k-1}|_{r, \beta_0} (|R_{k-1}^A|_{r, \beta_0} + |R_{k-1}^B|_{r, \beta_0}) \\ &\quad + c\varepsilon^{\frac{3}{2}} (|A|_{r, \beta_0} + |B|_{r, \beta_0}) + \frac{c}{\varepsilon^2} \exp\left(-\frac{c'}{\varepsilon}\right). \end{aligned} \quad (3.7.53)$$

Soit $c_1 > c$.

Montrons alors par récurrence sur k la propriété suivante, pour ε suffisamment petit et pour tout $c'' < c'$,

$$|R_k^A|_{r, \beta_0} + |R_k^B|_{r, \beta_0} \leq c_1 \varepsilon^{\frac{3}{2}} (|A|_{r, \beta_0} + |B|_{r, \beta_0}) + c \exp\left(-\frac{c''}{\varepsilon}\right) \quad (3.7.54)$$

La propriété est vérifiée pour $k = 0$, car $R_0^A = R_0^B = 0$.

Supposons la propriété vraie au rang $k-1$ et montrons-la au rang k . D'après (3.7.53) et la formule (3.7.54) au rang $k-1$,

$$\begin{aligned} |R_k^A|_{r, \beta_0} + |R_k^B|_{r, \beta_0} &\leq 2\varepsilon^{\frac{1}{2}} \left(c_1^2 \varepsilon^3 (|A|_{r, \beta_0} + |B|_{r, \beta_0})^2 + c^2 \exp\left(-\frac{2c''}{\varepsilon}\right) \right) \\ &\quad + c\varepsilon^{\frac{3}{2}} (|A|_{r, \beta_0} + |B|_{r, \beta_0}) + \frac{c}{\varepsilon^2} \exp\left(-\frac{c'}{\varepsilon}\right). \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} |R_k^A|_{r,\beta_0} + |R_k^B|_{r,\beta_0} &\leq \varepsilon^{\frac{3}{2}} (|A|_{r,\beta_0} + |B|_{r,\beta_0}) (2c_1^2 \varepsilon^2 (|A|_{r,\beta_0} + |B|_{r,\beta_0}) + c) \\ &\quad + \exp\left(-\frac{c''}{\varepsilon}\right) \left(2\varepsilon^{\frac{1}{2}} c^2 \exp\left(-\frac{c''}{\varepsilon}\right) + \frac{c^2}{\varepsilon^2} \exp\left(-\frac{c' - c''}{\varepsilon}\right) \right). \end{aligned} \quad (3.7.55)$$

Pour le second terme du membre de droite, en choisissant ε suffisamment petit, on a

$$2\varepsilon^{\frac{1}{2}} c^2 \exp\left(-\frac{c''}{\varepsilon}\right) + \frac{c^2}{\varepsilon^2} \exp\left(-\frac{c' - c''}{\varepsilon}\right) \leq c.$$

Quant au premier terme du membre de droite, le lemme suivant est utilisé
Lemme 3.7.2. *Pour A et B ayant été définis respectivement en (3.6.3) et en (3.6.4),*

$$|A|_{r,\beta_0} + |B|_{r,\beta_0} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

La démonstration du lemme 3.7.2 sera effectuée après la preuve de la proposition 3.7.1. La propriété est alors démontrée alors au rang k . La majoration obtenue étant uniforme en k cela prouve le théorème 3.7.1.

Existence d'une solution pour le problème (3.6.6, 3.6.7).

On pose $W_k^A = R_k^A - R_{k-1}^A$ et $W_k^B = R_k^B - R_{k-1}^B$. D'après (3.7.49, 3.7.50), ils satisfont les équations

$$\begin{aligned} \xi \frac{\partial}{\partial x} W_k^A &= \frac{1}{\varepsilon} (Q(M^A, W_k) + Q(W_k^A, M)) + \mathcal{N}_A(W_k) + \tilde{\mathcal{N}}_{A^*}(W_k^A, W_k^B) \\ &\quad + \varepsilon^2 \left(Q(R_{k-1}^A, W_k) + Q(W_k^A, R_{k-2}) \right) \\ &\quad + I(W_k^B) Q(R_{k-1}^A, M^B) + I(R_{k-2}^B) Q(W_{k-1}^A, M^B) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \xi \frac{\partial}{\partial x} W_k^B &= \frac{1}{\varepsilon} (Q(M^B, W_k) + Q(W_k^B, M)) + \mathcal{N}_B(W_k) \\ &\quad + \varepsilon^2 \left(Q(R_{k-1}^B, W_{k-1}) + Q(W_{k-1}^B, R_{k-2}) + I(W_k^B) Q(R_{k-1}^B, M^B) \right) \\ &\quad + I(R_{k-2}^B) Q(W_{k-1}^B, M^B) \end{aligned}$$

avec les conditions de bord

$$\begin{aligned} W_k^A(-1, v) &= 0, \quad \xi > 0, \quad W_k^A(1, v) = 0, \quad \xi < 0, \\ W_k^B(-1, v) &= 0, \quad \xi > 0, \quad W_k^B(1, v) = \beta_{W_k^B} M_+, \quad \xi < 0. \end{aligned}$$

D'après la proposition 3, on obtient pour (W_k^A, W_k^B) la majoration suivante,

$$|W_k^A|_{r, \beta_0} + |W_k^B|_{r, \beta_0} \leq \sqrt{\varepsilon} (|\tilde{D}^A|_{r, \beta_0} + |\tilde{D}^B|_{r, \beta_0})$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{D}^A &= Q(R_{k-1}^A, W_k) + Q(W_k^A, R_{k-2}) + I(W_k^B)Q(R_{k-1}^A, M^B) \\ &+ I(R_{k-1}^B)Q(W_{k-1}^A, M^B) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{D}^B &= Q(R_{k-1}^B, W_{k-1}) + Q(W_{k-1}^B, R_{k-2}) + I(W_k^B)Q(R_{k-1}^B, M^B) \\ &+ I(W_{k-1}^B)Q(W_{k-1}^B, M^B). \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant l'inégalité (3.7.52) et l'estimation trouvée précédemment sur R_k^A et R_k^B , on obtient

$$\begin{aligned} |W_k^A|_{r, \beta_0} + |W_k^B|_{r, \beta_0} &\leq c\sqrt{\varepsilon}c \left(\varepsilon^{\frac{3}{2}} (|A|_{r, \beta_0} + |B|_{r, \beta_0}) \right. \\ &\quad \left. + \exp\left(-\frac{c'}{\varepsilon}\right) (|W_{k-1}^A|_{r, \beta_0} + |W_{k-1}^B|_{r, \beta_0}) \right). \end{aligned}$$

D'où, d'après le lemme 3.7.2 et en choisissant ε suffisamment petit,

$$|W_k^A|_{r, \beta_0} + |W_k^B|_{r, \beta_0} \leq c\varepsilon (|W_{k-1}^A|_{r, \beta_0} + |W_{k-1}^B|_{r, \beta_0}).$$

Ainsi, en choisissant à nouveau ε suffisamment petit, on montre que la suite $\left((R_k^A, R_k^B) \right)_{k \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans un espace $L^\infty \times L^\infty$ à poids et donc converge.

Unicité de la solution du problème (3.6.6, 3.6.7).

Soient (R_1^A, R_1^B) et (R_2^A, R_2^B) deux solutions du problème (3.6.6, 3.6.7). En considérant les quantités $R_2^A - R_1^A$ et $R_2^B - R_1^B$ et en raisonnant comme pour l'étape de l'existence, on a

$$|R_2^A - R_1^A|_{r, \beta_0} + |R_2^B - R_1^B|_{r, \beta_0} \leq c\varepsilon (|R_2^A - R_1^A|_{r, \beta_0} + |R_2^B - R_1^B|_{r, \beta_0}).$$

Ainsi, en choisissant ε suffisamment petit, on obtient l'unicité de la solution.
□

Preuve du lemme 3.7.2.

Estimons $\frac{1}{\varepsilon}Q(f_{K_1}^-(x',v), f_{K_1}^+(x'',v))$. On rappelle que $x' = \frac{1+x}{\varepsilon}$ et que $x'' = \frac{1-x}{\varepsilon}$. $[-1,1]$ est découpé selon

$$[-1,1] = \Omega_- \cup \Omega \cup \Omega_+,$$

avec η suffisamment petit, où

$$\Omega_- = [-1, -1 + \eta] \times \mathbb{R}^3, \quad \Omega = [-1 - \eta, 1 - \eta] \times \mathbb{R}^3, \quad \Omega_+ = [1 - \eta, 1] \times \mathbb{R}^3.$$

On va alors estimer $(1 + |v|)^{r-1} M_0^{-\frac{1}{2}} Q(f_{K_1}^-(x',v), f_{K_1}^+(x'',v))$ successivement sur Ω_- , Ω et Ω_+ . On rappelle que d'après l'énoncé de la proposition 1,

$$f_{K_1}^- = f_{K_1}^{A-} + f_{K_1}^{B-},$$

avec

$$f_{K_1}^{A-} = M^A(-1,v)b_1^{A-} \text{ et } f_{K_1}^{B-} = M^B(-1,v)b_1^{B-}.$$

On est donc ramené à étudier $\frac{1}{\varepsilon}Q(f_{K_1}^{A-}(x',v), f_{K_1}^{A+}(x'',v))$. L'inégalité (3.7.52) appliquée sur le domaine Ω_+ s'écrit:

$$\begin{aligned} & \sup_{(x,v) \in \Omega_+} |(1 + |v|)^{r-1} M_*^{-\frac{1}{2}} Q(f_{K_1}^{A-}(x',v), f_{K_1}^{A+}(x'',v))| \\ & \leq \sup_{(x,v) \in \Omega_+} |(1 + |v|)^r M_*^{-\frac{1}{2}} f_{K_1}^{A-}(x',v)| \\ & \quad \times \sup_{(x,v) \in \Omega_+} |(1 + |v|)^r M_*^{-\frac{1}{2}} M^A(1,v)b_1^{A+}(x'',v)|. \end{aligned}$$

D'après la définition de M_* , il existe $c > 0$ tel que

$$M_*^{-\frac{1}{2}} M^A(-1,v) \leq c \quad \text{et} \quad M_*^{-\frac{1}{2}} M^A(1,v) \leq c.$$

De plus,

$$\begin{aligned} & \sup_{(x,v) \in \Omega_+} \left| \frac{1}{\varepsilon} (1 + |v|)^r M_*^{-\frac{1}{2}} f_{K_1}^{A-}(x',v) \right| \\ & \leq c \sup_{(x,v) \in [-1,1] \times \mathbb{R}^3} \left| (1 + |v|)^r e^{\gamma \frac{1+x}{\varepsilon}} b_1^{A-} \left(\frac{1+x}{\varepsilon}, v \right) \right| \left| \frac{1}{\varepsilon} e^{-\gamma \frac{2-\eta}{\varepsilon}} \right|, \\ & \leq c \sup_{(x,v) \in [-1,1] \times \mathbb{R}^3} \left| (1 + |v|)^r e^{\gamma \frac{1+x}{\varepsilon}} b_1^{A-} \left(\frac{1+x}{\varepsilon}, v \right) \right|. \end{aligned}$$

Or, d'après ([7], [2]), il existe $c > 0$ tel que pour tout $\gamma \in]0, \nu_0[$,

$$\sup_{(x,v) \in [-1,1] \times \mathbb{R}^3} |(1 + |v|)^r e^{\gamma \frac{1+x}{\varepsilon}} b_1^{A-}(\frac{1+x}{\varepsilon}, v)| \leq c.$$

D'où, il existe $\tilde{c} > 0$ tel que

$$\sup_{(x,v) \in \Omega_-} \left| \frac{1}{\varepsilon} (1 + |v|)^{r-1} M_*^{-\frac{1}{2}} Q(f_{K1}^{A-}(x', v), f_{K1}^{A+}(x'', v)) \right| \leq \tilde{c}.$$

Par un raisonnement analogue, on montre qu'il existe $\tilde{c} > 0$, tel que

$$\sup_{(x,v) \in \Omega_-} \left| \frac{1}{\varepsilon} (1 + |v|)^{r-1} M_*^{-\frac{1}{2}} Q(f_{K1}^{A-}(x', v), f_{K1}^{A+}(x'', v)) \right| \leq \tilde{c}$$

et

$$\sup_{(x,v) \in \Omega} |(1 + |v|)^{r-1} M_*^{-\frac{1}{2}} Q(f_{K1}^{A-}(x', v), f_{K1}^{A+}(x'', v))| \leq \tilde{c}.$$

On obtient des inégalités analogues pour

$$Q(f_{K1}^{B-}(x', v), f_{K1}^{A+}(x'', v))$$

ainsi que pour les autres termes de A . Ceci termine la preuve du lemme 3.7.2. \square

Preuve du théorème 3.6.1.

Pour n_{II} assez proche de n_I et pour certains T_{II} assez proche de T_I , le développement asymptotique

$$(f_{H0}^A + \varepsilon f_1^A + \varepsilon^2 f_2^A + \varepsilon^3 f_R^A, f_{H0}^B + \varepsilon f_1^B + \varepsilon^2 f_2^B + \varepsilon^3 f_R^B)$$

a été déterminé. Pour ε assez petit, le théorème 3.7.1 contrôle le reste (f_R^A, f_R^B) . Ceci montre le théorème 3.6.1. \square

Remarque 22. *En augmentant l'ordre du développement asymptotique, on peut obtenir un reste à tout ordre.*

Bibliographie

- [1] Aoki K. *The behaviour of a vapor-gas mixture in the continuum limit: Asymptotic analysis based on the Boltzmann equation*, T.J.' Bartel, M.A.Gallis(Eds), Rarefied Gas Dynamic, AIP, Melville, 565-574, 2001.
- [2] Aoki K., Bardos C., Takata S. *Knudsen layer for a gas mixture.*, Journ.Stat.Phys, 112, 3/4, 2003.
- [3] Aoki K., Takata S., Kosuge S. *Vapor flows caused by evaporation and condensation on two parallel plane surfaces: Effect of the presence of a noncondensable gas*, Physics of Fluids, 10, 6, 1519-1532, 1998.
- [4] Aoki K., Takata S., Taguchi S. *Vapor flows with evaporation and condensation in the continuum limit: effect of a trace of non condensable gas*, European Journal of Mechanics B/Fluids, 22, 51-71, 2003.
- [5] Arkeryd L., Nouri A. *The stationary nonlinear Boltzmann equation in a Couette setting with multiple, isolated L^q -solutions and hydrodynamic limits*, Journ.Stat.Phys. 118, 5-6, 849-881, 2005.
- [6] Arkeryd L., Nouri A. *On a Taylor-Couette type bifurcation for the stationary nonlinear Boltzmann equation*, à paraître dans Journ.Stat.Phys.
- [7] Bardos C., Caffisch R.E., Nicolaenko B. *'The Milne and Kramer problems for the Boltzmann Equation of a hard sphere gas'*. Commun. on. Pure and Applied Math. 39, 323-352, 1986.
- [8] Bouchut F., Golse F., Pulvirenti M. *Kinetic equation and asymptotic theory*, Gauthier Villard. Edited by Benoît Perthame and Laurent Desvillettes. Paris 2000.
- [9] Brull S. *The stationary Boltzmann equation for a two component gas in the slab*. Soumis.
- [10] Caffisch R.E. *The fluid dynamic limit of the nonlinear Boltzmann equation*, Commun. on. Pure and Applied Math. 33, 651-666, 1980.
- [11] Cercignani C. *The Boltzmann equation and its applications*, Springer, Berlin, 1998.

- [12] Cercignani C., Illner R., Pulvirenti M. *The mathematical theory of dilute gases*, Springer, Berlin, 1994.
- [13] Desvillettes L. *Sur quelques hypothèses nécessaires à l'obtention du développement de Chapman-Enskog*, Preprint 1994.
- [14] Esposito R., Lebowitz J.L., Marra R. *Hydrodynamic limit of the stationary Boltzmann Equation in a slab*, Comm.Math.Phys., 160, 49-80, 1994.
- [15] Esposito R., Lebowitz J.L., Marra R. *The Navier-Stokes limit of stationary solutions of the nonlinear Boltzmann equation*, Journ.Stat.Phys. 78, 383-412, 1995.
- [16] Golse F., Perthame B., Sulem C. *On a boundary layer problem for the nonlinear Boltzmann equation*. Arch.Rat.Mechanics, 104, 81-96, 1988.
- [17] Golse F., Poupaud F. *Stationary solutions of the linearized Boltzmann Equation in a Half-space* Math.Meth.Appl.Sci., 11, 483-503, 1989.
- [18] Grad H. *Asymptotic theory of the Boltzmann equation*, Physics of Fluids, 6, 147-181, 1963.
- [19] Grad H. *Asymptotic theory of the Boltzmann equation, II*, Rarefied Gas Dyn., Paris,, 26-59, 1962.
- [20] Grad H. *Asymptotic equivalence of the Navier-Stockes and nonlinear Boltzmann operator*. Proc.Symp.Appl.Math. XVII, 154-183, 1965.
- [21] Latocha V., Aoki K., Taguchi S. *Vapor flows along a plane condensed with weak condensation in the presence of a non condensable gas.*, Préprint 2006.
- [22] Sone S. *Kinetic Theory and Fluid Dynamics*, Birkhäuser Boston, 2002.
- [23] Sone Y., Aoki K., Doi T. *Kinetic theory analysis of gas flows condensing on a plane condensed phase: Case of a mixture of a vapor and noncondensable gas.*, Transport Theory and Statistical Physics, 21, 4-6, 297-328, 1992.
- [24] Sone Y., Aoki K., Takata S., Sugimoto H., Bobylev A. *Inappropriateness of the heat-conduction equation for description of a temperature field of a stationary gas in the continuum limit: examination by asymptotic and numerical computation of the Boltzmann equation*, Physics of Fluids, 8, 2, 628-638, 1996.
Erratum: Physics of Fluids 8, 841 1996.
- [25] Taguchi S., Aoki K., Takata S. *Vapor flows at incidence onto a plane condensed phase in the presence of a non condensable gas. II. Supersonic condensation*, Physics of Fluids, 16, 79, 2004.

- [26] Takata S. *Kinetic theory analysis of the two-surface problem of vapor-vapor mixture in the continuum limit*, Physics of Fluids, 16, 7, 2004.
- [27] Takata S., Aoki K. *Two-surface-problems of a multicomponent mixture of vapors and noncondensable gases in the continuum limit in the light of kinetic theory*, Physics of Fluids, 11, 9, 2743-2756, 1999.
- [28] Takata S., Aoki K. *The ghost effect in the continuum limit for a vapor-gas mixture around condensed phases: Asymptotic analysis of the Boltzmann equation* Transport Theory and Statistical Physics, 30, 205-237, 2001.
Erratum: Transport Theory and Statistical Physics, 31, 289, 2001.
- [29] Takata S., Aoki K., Muraki T. *Behaviour of a vapor-gas mixture between two parallel plane condensed phases in the continuum limit*, Rarefied Gas Dynamic, edited by R. Brun, R. Campargue, and J. C. Lengrand Cépaduès, Toulouse, 479, 1999.
- [30] Thompson R.V., Loyalka S.K. *Chapman-Enskog solution for diffusion: Pidduck's equation for arbitrary mass ratio*, Physics of Fluids 30, 2073, 1987.

Chapitre 4

Modèles hydrodynamiques inélastiques pour la diffusion d'impuretés dans un gaz.

Travail effectué en collaboration avec Lorenzo Pareschi, Université de Ferrare, accepté pour publication dans Math applied letters.

4.1 Introduction

Par une équation de Boltzmann linéaire inélastique, on peut décrire l'évolution d'un gaz granulaire constitué de particules de masse m entrant en collision de manière inélastique avec un fluide en équilibre thermodynamique constitué de particules de masse m_1 . Par exemple, le cas de fines particules polluantes interagissant avec l'air ou un autre gaz est traité dans [5]. Lorsqu'on s'intéresse aux modèles fluides obtenus en prenant les moments de l'équation de Boltzmann inélastique, on voit que la seule quantité conservée est le nombre de particules inélastiques ([9]). Il en résulte qu'une approche hydrodynamique conventionnelle de type Euler entraîne une seule équation décrivant l'advection de particules inélastiques ayant la même vitesse que le fluide.

Le but de ce chapitre est de trouver des modèles hydrodynamiques pour de telles équations de Boltzmann qui fassent intervenir des équations dissipatives pour la quantité de mouvement et la température du gaz. On présente un ensemble fermé d'équations d'Euler inélastique pour des molécules Maxwelliennes comme celui considéré dans ([9]).

Avant de décrire plus précisément le problème considéré, mentionnons divers travaux traitant du même problème. Dans ([9]), les auteurs montrent dans le cas d'un noyau Maxwellien l'existence et l'unicité d'un état d'équilibre pour l'équation de Boltzmann linéaire inélastique. Cet état d'équilibre est une fonction Maxwellienne possédant la même vitesse macroscopique que le fluide, mais de température inférieure. Ce résultat a été généralisé au cas des sphères dures dans ([6]).

Dans ([10]), un modèle hydrodynamique de type Euler inélastique est dérivé, pour des collisions supposées presque élastiques. La masse et la quantité de mouvement sont conservées mais l'énergie ne l'est pas. Dans ce cas l'opérateur de collision inélastique se décompose en la somme de l'opérateur de Boltzmann classique plus un opérateur dit de friction responsable de la dissipation de l'énergie. Une étude numérique est effectuée dans ([7]).

Ce chapitre est organisé comme suit. La deuxième partie traite du modèle de Boltzmann linéaire inélastique et d'un modèle pour des molécules Maxwelliennes. La troisième partie considère la fermeture pour le système des trois premiers moments et dérive un système d'Euler inélastique.

4.2 L'équation de Boltzmann linéaire inélastique.

On considère l'équation de Boltzmann linéaire inélastique

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x,v) + v \cdot \nabla_x f(t,x,v) = Q(f,M_1)(t,x,v), \quad (4.2.1)$$

où $Q(f,M_1)$ est défini par

$$Q(f,M_1) = \frac{1}{2\pi\lambda} \int_{\mathbb{R}_*^3 \times \mathbb{S}^2} B(v,w,\omega) \left[\frac{1}{e^2} f(v_*) M_1(w_*) - f(v) M_1(w) \right] dw d\omega. \quad (4.2.2)$$

(v_*, w_*) désignent les vitesses précolisionnelles. Elles sont données par les expressions

$$\begin{aligned} v_* &= v - 2\alpha \frac{1-\beta}{1-2\beta} [q \cdot n] n, \\ w_* &= v + 2(1-\alpha) \frac{1-\beta}{1-2\beta} [q \cdot n] n. \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

où $q = v - w$ est la vitesse relative ([8] [14]), α et β étant des paramètres adimensionnés correspondant au rapport des masses et à l'inélasticité. Ils

vérifient $0 < \alpha < 1$ et $0 < \beta < \frac{1}{2}$ et sont donnés par les formules

$$\alpha = \frac{m_1}{m_1 + m}, \quad \beta = \frac{1 - e}{2}. \quad (4.2.4)$$

$B(v, w, \omega)$ désigne le noyau de collision, λ le libre parcours moyen et $e \in]0, 1[$ le coefficient de restitution. Le cas $e = 1$ correspond aux collisions élastiques. Cette équation linéaire décrit l'évolution de la fonction de distribution $f(t, x, v)$ de particules de masse m (représentant le gaz granulaire) entrant en collision de façon inélastique avec un fluide donné constitué de particules de masse m_1 .

Le fluide est supposé être à l'équilibre thermodynamique avec une vitesse u_1 et une température T_1 . Cela signifie que sa fonction de distribution M_1 est la Maxwellienne normalisée donnée par

$$M_1(v) = \frac{1}{(2\pi R_1 T_1)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{|v - u_1|^2}{2R_1 T_1}\right), \quad (4.2.5)$$

avec $R_1 = \frac{k_B}{m_1}$ et k_B , la constante de Boltzmann.

Remarque 23. *La limite élastique correspond au cas $\beta \rightarrow 0$.*

Dans ces conditions, on montre (cf [9, 6]) que les états d'équilibre stationnaires sont donnés par les distributions Maxwelliennes proportionnelles à

$$M^\sharp(v) = \left(\frac{m}{2\pi RT^\sharp}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{m|v - u_1|^2}{2RT^\sharp}\right\}, \quad (4.2.6)$$

où

$$R = \frac{k_B}{m}, \quad T^\sharp = \frac{(1 - \alpha)(1 - \beta)R_1}{1 - \alpha(1 - \beta)} T_1.$$

On remarque que M^\sharp possède la même vitesse macroscopique que le fluide et une température inférieure à celle du fluide. On se place dans un cadre de molécules Maxwelliennes, i.e d'un noyau de collision

$$B(v, w, \omega) = S, \quad (v, w, \omega) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2. \quad (4.2.7)$$

Ce modèle pour molécules Maxwelliennes est alors donné par

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = \frac{S}{2\pi\lambda} \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} \left[\frac{1}{e^2} f(v_*) M_1(w_*) - f(v) M_1(w) \right] dw d\omega. \quad (4.2.8)$$

4.3 Limite hydrodynamique et équation d'Euler.

Afin d'éviter le terme $\frac{1}{\epsilon^2}$ dans (4.2.8), il est utile de considérer la forme faible de (4.2.8). Plus précisément, on définit par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de la manière suivante. Etant donné une fonction test régulière $\varphi(v)$,

$$\langle \phi, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}_v^3} \varphi(v) \psi(v) dv, \quad \varphi \in L^1, \psi \in L^1.$$

Alors

$$\langle \varphi, Q(f) \rangle = \frac{S}{\lambda\pi} \int_{\mathbb{R}_w^3} \int_{\mathbb{R}_v^3 \times \mathbb{S}^2} (\varphi(v^*) - \varphi(v)) f(v) M_1(w) dw d\omega, \quad (4.3.9)$$

où la vitesse post-collisionnelle v^* est définie par

$$v^* = v - 2\alpha(1 - \beta)(q \cdot \omega)\omega. \quad (4.3.10)$$

On remarque que $\varphi = 1$ est un invariant de collision contrairement à $\varphi = v$ et $\varphi = v^2$.

L'existence d'un équilibre Maxwellien pour une température non nulle (4.2.6) permet de construire des modèles hydrodynamiques pour le flot granulaire considéré, de façon analogue à la dérivation du système d'Euler à partir de l'équation de Boltzmann. Ce faisant, on obtient des équations pour la quantité de mouvement et l'énergie, satisfont un système de la forme

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) = S_1, \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho(\frac{1}{2}|u|^2 + \frac{3}{2}T)) = \tilde{S}_1,$$

où S_1 et \tilde{S}_1 sont des termes dépendant de u_1 et T_1 seulement. Or ce système étant trivial, la masse ρ est la seule variable hydrodynamique pour laquelle une équation non triviale peut être dérivée, à savoir l'équation d'advection ([9])

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u_1) = 0. \quad (4.3.11)$$

Dans le but de réaliser une fermeture pour les équations des quantités de mouvement et de la température qui soit dissipative, on suppose que la fonction de distribution f est une Maxwellienne locale ayant la vitesse et la température du gaz polluant.

$$M(x, v, t) = \frac{\rho(x, t)}{(2\pi R T(x, t))^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{|v - u(x, t)|^2}{2R T(x, t)}\right). \quad (4.3.12)$$

En prenant $\varphi = v$ dans (4.3.9), on obtient

$$\langle v, Q(M) \rangle = \frac{-\alpha(1-\beta)S}{\lambda\pi} \int_{\mathbb{R}_w^3} \int_{\mathbb{R}_v^3} M(v)M_1(w) \left(\int_{\mathbb{S}^2} (q \cdot \omega) \omega d\omega \right) dw dv. \quad (4.3.13)$$

Comme

$$\int_{\mathbb{S}^2} (q \cdot \omega) \omega d\omega = \frac{4\pi}{3} q. \quad (4.3.14)$$

(4.3.13) possède l'expression suivante,

$$\langle v, Q(M) \rangle = \frac{-4\alpha(1-\beta)S}{3\lambda} \int_{\mathbb{R}_w^3} \int_{\mathbb{R}_v^3} M(v)M_1(w)(v-w) dw dv. \quad (4.3.15)$$

Etant donné que

$$\int_{\mathbb{R}_v^3} v M(v) dv = \rho u \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}_v^3} w M_1(w) dv = u_1, \quad (4.3.16)$$

l'équation vérifiée par le premier moment possède l'expression suivante

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u + \nabla_x \cdot (\rho u \otimes u) + \nabla_x (\rho T) = \frac{4S\alpha(1-\beta)}{3\lambda} \rho(u_1 - u). \quad (4.3.17)$$

Pour le second moment, on calcule (4.3.9) avec $\varphi = \frac{1}{2}|v|^2$. Donc,

$$\begin{aligned} \langle \frac{1}{2}|v|^2, Q(M) \rangle &= \frac{S}{\lambda\pi} \int_{\mathbb{R}_w^3} \int_{\mathbb{R}_v^3 \times \mathbb{S}^2} [-2\alpha(1-\beta)(q \cdot \omega)(v \cdot \omega) \\ &\quad + 4\alpha^2(1-\beta)^2|q \cdot \omega|^2] M(v)M_1(w) dw dv d\omega. \end{aligned} \quad (4.3.18)$$

Or ([2],[6]),

$$\int_{\mathbb{S}^2} |q \cdot \omega|^2 d\omega = \frac{2\pi}{3} |q|^2, \quad (4.3.19)$$

$$\int_{\mathbb{S}^2} (q \cdot \omega)(v \cdot \omega) d\omega = \frac{2\pi}{3} (q \cdot n). \quad (4.3.20)$$

D'où, en intégrant le membre de droite de (4.3.18) par rapport à la variable ω , on obtient

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{2}|v|^2, Q(M) \right\rangle &= \frac{-4\alpha(1-\beta)S}{3\lambda} \int_{\mathbb{R}_w^3} \int_{\mathbb{R}_v^3} (q \cdot v) M(v) M_1(w) dw dv \\ &+ \frac{4\alpha^2(1-\beta)^2 S}{3\lambda} \int_{\mathbb{R}_w^3} \int_{\mathbb{R}_v^3} |q|^2 M(v) M_1(w) dw dv. \end{aligned} \quad (4.3.21)$$

De plus,

$$\int_{\mathbb{R}_v^3} |v|^2 M(v) dv = \rho(|u|^2 + 3RT), \quad \int_{\mathbb{R}_v^3} |v|^2 M_1(v) dv = \rho(|u_1|^2 + 3R_1T_1)$$

d'où

$$\int_{\mathbb{R}_w^3} \int_{\mathbb{R}_v^3} (|v|^2 - v \cdot w) M(v) M_1(w) dw dv = \rho(3RT + |u|^2 - u \cdot u_1) \quad (4.3.22)$$

et

$$\int_{\mathbb{R}_w^3} \int_{\mathbb{R}_v^3} |q|^2 M(v) M_1(w) dw dv = \rho(3RT + 3R_1T_1 + |u|^2 + |u_1|^2 - 2u_1 \cdot u). \quad (4.3.23)$$

D'après (4.3.23) et (4.3.22), le membre de droite de (4.3.21) est égal à

$$\begin{aligned} D &= 2\alpha^2(1-\beta)^2 \rho(3RT + 3R_1T_1 + |u|^2 + |u_1|^2 - 2u_1 \cdot u) \\ &- 2\alpha(1-\beta) \rho(3RT + |u|^2 - u \cdot u_1). \end{aligned} \quad (4.3.24)$$

Finalement, on obtient le système d'Euler inélastique suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho u + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) + \nabla_x (\rho T) = \frac{4S\alpha(1-\beta)}{3\lambda} \rho(u_1 - u) \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \left(\frac{1}{2}|u|^2 + \frac{3}{2}T \right) \right) + \nabla \cdot \left(\rho \left(\frac{1}{2}|u|^2 + \frac{5}{2}T \right) \right) = \frac{4\rho S}{3\lambda} D(x,t) \end{array} \right.$$

4.4 Conclusion

On a dérivé des approximations hydrodynamiques pour des équations de Boltzmann linéaires et inélastiques qui mettent en jeu les équations pour la vitesse macroscopique et la température des particules. Dans ce but, la fermeture du système des moments est réalisée par rapport à un état localement Maxwellien qui ne constitue pas un état d'équilibre pour l'opérateur de Boltzmann. Ainsi, un système d'Euler inélastique est dérivé.

Bibliographie

- [1] Benedetto D., Caglioti E., F. Golse F., Pulvirenti M. *A hydrodynamic model arising in the context of granular media*. Comput.Math.Appl., 38, 7-8, 121-131, 1989.
- [2] Bisi M., Spiga G., Toscani G. *Grad's equations and hydrodynamics for weakly inelastic granular flows*, Physics of Fluids, 16, 12, 4235-4247, 2004.
- [3] Bobylev A.V., Carrillo J.A., Gamba I.M. *On some properties of kinetic and hydrodynamic equations for inelastic interactions*, Journ.Stat.Phys., 98, 743-773, 2000.
- [4] Ferrari E., Pareschi L. *Modelling and numerical methods for the diffusion of impurities in a gas*, Preprint 2006.
- [5] Garzó V., Montanero J.M., *Diffusion of impurities in a granular gas*, Physical Review E, 69, 2004.
- [6] Lods B., Toscani G. *The dissipative linear Boltzmann equation for hard spheres*, Journ.Stat.Phys., 117, 3-4, 635-664, 2004.
- [7] Naldi G., Pareschi L., Toscani G. *Spectral methods for one-dimensional kinetic models of granular flows and numerical quasi elastic limit*, Mathematical Models and Numerical Analysis, 37, 73-90, 2003.
- [8] Pareschi L., Toscani G. *Modelling and numerical methods for granular gases*, Modelling and computational Methods for Kinetic Equation, P.Degon, L.Pareschi and Russo Eds, Birkhauser, Boston, 259-285, 2004.
- [9] Spiga G., Toscani G. *The dissipative linear Boltzmann equation*, Appl.Math.Letters, 17, 3, 255-301, 2004.
- [10] Toscani G. *Kinetic and hydrodynamic models of nearly elastic granular flows*. Monatshefte für Mathematik, 142, (1-2), 179-192, 2004.
- [11] Toscani G. *Hydrodynamic from the dissipative Boltzmann equation*. in Mathematical models of granular matter, Lecture Notes in Mathematics, Springer, G. Capriz, P. Giovine and P. M. Mariano Edts, 2006.

Chapitre 5

Simulations hybrides de Monte-Carlo pour la diffusion d'impuretés dans l'air.

Travail effectué en collaboration avec Lorenzo Pareschi et Elisa Ferrari de l'Université de Ferrare.

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'écoulement d'un mélange de N espèces différentes d'impuretés. Elles sont traitées comme des gaz granulaires inélastiques et sont constituées de particules de masses m_i et de diamètres δ_i ($i = 1, 2, \dots, N$), interagissant avec un fluide, par exemple de l'air, constitué de molécules de masses m_b et de diamètre δ_b . Soient $f_i(x, v, t)$ et $f_b(x, v, t)$ les fonctions de distribution respectives du polluant numéro i et de l'air. Leur évolution peut être décrite par un système couplé de $N + 1$ équations de Boltzmann inélastiques pour des sphères dures:

$$\begin{cases} \frac{\partial f_i}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f_i = \sum_{j=1}^N \frac{1}{\varepsilon_{ij}} Q_{i,j}(f_i, f_j) + \frac{1}{\varepsilon_{ib}} Q_{i,b}(f_i, f_b) \\ \frac{\partial f_b}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f_b = \frac{1}{\varepsilon_b} Q_{b,b}(f_b, f_b) + \sum_{j=1}^N \frac{1}{\varepsilon_{jb}} Q_{j,b}(f_j, f_b), \end{cases} \quad (5.1.1)$$

où $i = 1, \dots, N$ et $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$, $\varepsilon_{ib} = \varepsilon_{bi}$, $\varepsilon_b = \varepsilon_{bb}$ sont les nombres de Knudsen correspondant aux interactions.

Les collisions sont supposées inélastiques avec les coefficients de restitution respectifs e_{ij}, e_{ib}, e_b dans $[0,1]$. On se place dans un cadre de sphères dures. Les opérateurs de collision de Boltzmann $Q_{i,j}(f_i, f_j)$, pour $i, j = b, 1, \dots, N$, peuvent alors s'écrire sous la forme:

$$Q_{i,j}(f_i, f_j) = \frac{\delta_{ij}^2}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} |\langle q, \omega \rangle| \left[\frac{1}{e_{ij}^2} f_i(v_*) f_j(w_*) - f_i(v) f_j(w) \right] dw d\omega, \quad (5.1.2)$$

où $\langle \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire euclidien, $q = v - w$ est la vitesse relative, $\delta_{ij} = \frac{\delta_i - \delta_j}{2}$ correspond à la distance entre les centres des particules et $\omega \in \mathbb{S}^2$.

Les vitesses précollisionnelles v_* et w_* sont données par le système

$$\begin{cases} v_* = v - \alpha_{ji} \left(1 + \frac{1}{e_{ij}} \right) \langle v - w, \omega \rangle \omega \\ w_* = w + \alpha_{ij} \left(1 + \frac{1}{e_{ij}} \right) \langle v - w, \omega \rangle \omega, \end{cases} \quad (5.1.3)$$

où $\alpha_{ij} = \frac{m_i}{m_i + m_j}$, de telle sorte que $\alpha_{ji} = 1 - \alpha_{ij}$, pour $(i, j) \in \{b, 1, \dots, N\}^2$.

Les vitesses précollisionnelles correspondent aux vitesses qui engendrent les vitesses (v, w) après le choc. Notons (v^*, w^*) les vitesses post-collisionnelles, c'est à dire engendrées par (v, w) après le choc.

Le nombre de particules de chaque espèce est conservé car

$$\int_{\mathbb{R}^3} Q_{i,j}(f_i, f_j) dv = 0, \quad \{i, j\} \in \{b, 1, \dots, N\}^2. \quad (5.1.4)$$

et la quantité totale de mouvement est conservée car

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^3} m_b v Q_{b,j}(f_b, f_j) dv + \int_{\mathbb{R}^3} m_b v Q_{b,b}(f_b, f_b) dv \\ & + \sum_{i,j=1}^N \int_{\mathbb{R}^3} m_i v Q_{i,j}(f_i, f_j) dv + \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^3} m_i v Q_{i,b}(f_i, f_b) dv = 0. \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

Cependant, l'énergie se dissipe car:

$$\langle v^* - w^*, \omega \rangle = -e_{ij} \langle v - w, \omega \rangle, \quad (5.1.6)$$

où $e_{i,j} \in]0,1[$. En effet, à partir de la relation (5.1.6) et de la conservation de la quantité de mouvement après la collision,

$$m_i v^* + m_j w^* = m_i v + m_j w, \quad (5.1.7)$$

le mécanisme collisionnel suivant est obtenu

$$\begin{cases} v^* = v - \alpha_{ji}(1 + e_{ij})\langle v - w, \omega \rangle \omega \\ w^* = w + \alpha_{ij}(1 + e_{ij})\langle v - w, \omega \rangle \omega . \end{cases} \quad (5.1.8)$$

On introduit les paramètres d'inélasticité

$$\beta_{ij} = \frac{1 - e_{ij}}{2},$$

de telle sorte que l'on puisse réécrire (5.1.8) de la manière suivante

$$\begin{cases} v^* = v - 2\alpha_{ji}(1 - \beta_{ij})\langle v - w, \omega \rangle \omega \\ w^* = w + 2(1 - \alpha_{ji})(1 - \beta_{ij})\langle v - w, \omega \rangle \omega . \end{cases} \quad (5.1.9)$$

Cela entraîne la relation

$$m_i |v^*|^2 + m_j |w^*|^2 - m_i |v|^2 - m_j |w|^2 = -4 \frac{mm_1}{m + m_1} (\beta(1 - \beta) |q.n|^2) \leq 0$$

qui exprime la dissipation de l'énergie.

Remarque 24. *Les systèmes (5.3.3) et (5.3.4) peuvent être obtenus en inversant le système (5.1.3).*

Dans ce chapitre, on décrit dans un premier temps le modèle physique, puis on présente la méthode numérique ce qui permet d'obtenir dans une dernière partie un certain nombre de résultats numériques. Pour les simulations numériques, on supposera que le fluide est homogène en espace et que sa distribution est maxwellienne. Quant au polluant, il ne sera pas supposé homogène en espace.

5.2 Le problème du polluant.

Dans le cas d'un mélange de fines particules de polluant évoluant dans un fluide, le modèle peut être simplifié en utilisant deux considérations:

- Ces particules sont en nombre suffisamment faible ie, les gaz granulaires ie polluants sont suffisamment raréfiés, par rapport au nombre de molécules du fluide, pour supposer qu'il n'y a pas de collisions entre elles.

- On suppose le fluide à l'équilibre thermodynamique, à la température T_b et à la vitesse macroscopique u_b , et sa fonction de distribution égale à la *Maxwellienne normalisée*:

$$M_b(v) = \left(\frac{m_b}{2\pi T_b} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{m_b |v - u_b|^2}{2 T_b} \right\}, \quad v \in \mathbb{R}^3.$$

la première hypothèse revient à supposer, pour $i, j = 1, \dots, N$, $\varepsilon_{ij} \gg \varepsilon_{ib} \gg \varepsilon_b$, de telle sorte qu'on puisse négliger les termes $\frac{1}{\varepsilon_{ij}} Q(f_i, f_j)$ dans le système (5.1.1).

Si $f_b = M_b$ et que l'on fait l'hypothèse que l'air est un gaz parfait, ses moments satisfont le système d'Euler ([9]):

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_b}{\partial t} + \nabla_x \cdot (\rho_b u_b) = 0, \\ \frac{\partial \rho_b u_b}{\partial t} + \nabla_x \cdot (\rho_b u_b \otimes u_b + \rho_b T_b) = 0, \\ \frac{\partial E_b}{\partial t} + \nabla_x \cdot (E_b u_b + \rho_b T_b u_b) = 0, \end{cases} \quad (5.2.1)$$

où la densité ρ_b , la vitesse macroscopique u_b , la température macroscopique T_b et l'énergie E_b sont données par:

$$\begin{aligned} \rho_b &= \int_{\mathbb{R}^3} f_b(v, t) dv, \\ u_b &= \frac{1}{\rho_b} \int_{\mathbb{R}^3} v f_b(v, t) dv, \\ T_b &= \frac{1}{3\rho_b} \int_{\mathbb{R}^3} |v - u_b|^2 f_b(v, t) dv, \\ E_b &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 f_b(v, t) dv. \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

Le système (5.1.1) peut donc s'écrire en utilisant N équations de Boltzmann linéaires inélastiques simplifiées:

$$\begin{cases} \frac{\partial f_i}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f_i = \frac{\delta_{ib}^2}{2\pi\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} |\langle q, \omega \rangle| \left[\frac{1}{e_{ib}^2} f_i(v_*) f_b(w_*) - f_i(v) f_b(w) \right] dw d\omega \\ f_b = M_b, \end{cases} \quad (5.2.3)$$

où $q = v - w$ et $i = 1, \dots, N$. Dans ces conditions, il est possible de prouver ([11], [17]) que les noyaux des opérateurs de collision $Q_{i,b}$ sont constitués des fonctions de distribution Maxwelliennes suivantes:

$$M_i^\#(v) = \left(\frac{m_i}{2\pi T_i^\#} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{m_i |v - u_b|^2}{2T_i^\#} \right\}, \quad v \in \mathbb{R}^3, \quad (5.2.4)$$

ayant la même vitesse macroscopique que le fluide, et une température égale à

$$T_i^\# = \frac{(1 - \alpha_{bi})(1 - \beta_{ib})}{1 - \alpha_{bi}(1 - \beta_{ib})} T_b. \quad (5.2.5)$$

Les températures sont inférieures à celles du fluide. L'existence pour chaque constituant i d'un équilibre Maxwellien à une température non nulle permet de construire des modèles hydrodynamiques pour le flot granulaire considéré. Dans le chapitre précédent, on a dérivé un système d'Euler mettant en jeu des équations pour la vitesse macroscopique et la température des particules de polluant ([5]).

5.3 Méthodes hybrides

5.3.1 Présentation.

On se place dorénavant dans le cas où $N = 1$, le cas $N > 1$ pouvant se traiter de manière analogue. On se restreint au cas où le fluide est homogène en espace (et non le polluant). Le problème (5.2.3) est alors réduit au système

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = \frac{\delta^2}{2\pi\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} |\langle q, \omega \rangle| \left[\frac{1}{e^2} f(v_*) f_b(w_*) - f(v) f_b(w) \right] dw d\omega \\ f_b = M_b \end{cases} \quad (5.3.1)$$

où $f = f_1$ est la fonction de distribution des particules polluantes, $\delta = \delta_{1b}$ est la distance entre les centres des particules, $e = e_{1b}$ est le coefficient de restitution et $\varepsilon = \varepsilon_{1b}$ est le nombre de Knudsen.

5.3.2 Les Schémas TRMC. (Time Relaxed Monte Carlo.)

Les méthodes TRMC introduites dans ([10]) sont des méthodes numériques servant à résoudre l'équation de Boltzmann dans un domaine où le libre parcours moyen varie de valeurs très petites, où l'utilisation de la méthode de

Monte-Carlo devient coûteuse à des valeurs où l'utilisation de cette dernière est pertinente. Pour de grands nombres de Knudsen, elles sont définies comme la méthode classique Monte Carlo (DSMC) tandis que pour les petits nombres de Knudsen, elles remplacent la fonction de distribution par une Maxwellienne locale. Le point de départ de la méthode est le splitting usuel en temps de l'équation de Boltzmann dans (5.3.1). Il consiste à résoudre séparément une équation de transport pur (i.e. à remplacer Q par 0), puis l'équation de Boltzmann homogène en espace (i.e à remplacer $\nabla_x f$ par 0). Les principales difficultés résident dans la deuxième étape dont on rappelle les grandes lignes. C'est pour cela que l'on va s'attacher à la discrétisation en temps de l'équation de Boltzmann homogène

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} Q(f, M_b). \quad (5.3.2)$$

On l'écrit sous la forme ([10], [5])

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} [P(f, M_b) - \mu f], \quad (5.3.3)$$

avec la condition initiale $f(x, v, t = 0) = f_0(x, v)$ où $\mu \neq 0$ est une constante et P un opérateur bilinéaire positif. L'expression de P sera donné ultérieurement par l'équation (5.3.12). On effectue les changements de variable et d'inconnues suivants

$$\tau = (1 - e^{-\mu t/\varepsilon}), \quad F(v, \tau) = f(v, t) e^{\mu t/\varepsilon}. \quad (5.3.4)$$

La variable τ peut être considérée comme un temps relaxé. L'inconnue F doit satisfaire

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \tau} &= \frac{1}{\mu} P(F, M_b), \\ F(v, 0) &= f_0(v). \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

En effet,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} F(v, \tau) &= \frac{\partial}{\partial t} (f(v, t) e^{\frac{\mu t}{\varepsilon}}) \frac{\partial t}{\partial \tau}, \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} f(v, t) + \frac{\mu}{\varepsilon} f(v, t) \right) e^{\frac{\mu t}{\varepsilon}} \frac{\varepsilon}{\mu}, \\ &= \frac{1}{\mu} P(F, M_b). \end{aligned}$$

Dans ce cas, la solution du problème de Cauchy (5.3.5), peut s'écrire comme une série formelle ([10], [7]), appelée somme de Wild de la façon suivante

$$F(v, \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \tau^k f_k(v), \quad f_{k=0}(v) = f_0(v). \quad (5.3.6)$$

Compte tenu du fait que

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{\mu t}{\varepsilon}} (1 - e^{-\frac{\mu t}{\varepsilon}})^k = 1,$$

en remplaçant dans la formule (5.3.5), M_b par

$$M_b \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{\mu t}{\varepsilon}} (1 - e^{-\frac{\mu t}{\varepsilon}})^k,$$

on obtient que les fonctions f_k satisfont la formule de récurrence,

$$f_{k+1}(v) = \frac{1}{k+1} \sum_{h=0}^k \frac{1}{\mu} P(f_h, M_b), \quad k = 0, 1, \dots \quad (5.3.7)$$

En revenant à f et à la variable t , on obtient le système

$$\begin{cases} f(v, t) = e^{-\mu t/\varepsilon} \sum_{k=0}^{\infty} (1 - e^{-\mu t/\varepsilon})^k f_k(v) \\ f_{k+1}(v) = \frac{1}{k+1} \sum_{h=0}^k \frac{1}{\mu} P(f_h, M_b). \end{cases} \quad (5.3.8)$$

Cette représentation permet de dériver une classe importante de schémas numériques en utilisant une troncature pour $m \geq 1$ dans la première expression du système (5.3.8):

$$f^{n+1}(v) = e^{-\mu \Delta t/\varepsilon} \sum_{k=0}^m (1 - e^{-\mu \Delta t/\varepsilon})^k f_k^n(v) + (1 - e^{-\mu \Delta t/\varepsilon})^{m+1} M^\sharp(v), \quad (5.3.9)$$

où f^n est une approximation de f au temps $n\Delta t$, Δt étant un petit intervalle de temps et $M^\sharp(v) = M_1^\sharp(v)$ est l'élément du noyau de Q , donnée par (5.2.4). Les f_k^n sont définis par la formule de récurrence donnée par la seconde équation du système (5.3.8) prise pour $f = f^n$. Cette formule de récurrence

sur k débute par $f_0^n = f^n$ qui constitue une approximation de $f(n\Delta t)$. Il est démontré ([10]) que les schémas obtenus de cette manière sont d'ordre m et qu'ils conservent les moments.

Par exemple, si on tronque les séries à $m = 1$, on obtient le schéma TRMC du premier ordre caractérisé par la formule suivante,

$$\begin{aligned} f^{n+1} &= e^{-\mu\Delta t/\varepsilon} f_0^n + e^{-\mu\Delta t/\varepsilon} (1 - e^{-\mu\Delta t/\varepsilon}) f_1^n + (1 - e^{-\mu\Delta t/\varepsilon})^2 M^\sharp \\ &= A f_0^n + B f_1^n + C M^\sharp, \end{aligned} \quad (5.3.10)$$

où $f_0^n = f^n$ et $f_1^n = \frac{1}{\mu} P(f^n, M_b)$.

Etant donné que A, B, C sont des constantes positives et que $A + B + C = 1$, le schéma peut avoir l'interprétation probabiliste suivante:

Une particule extraite de f_0^n ne subira pas de collisions avec une probabilité A , entrera en collision avec une particule extraite de M_b avec une probabilité B et sera remplacée par une particule échantillonnée à partir de M^\sharp avec une probabilité C .

Remarque 25. *Lorsque le nombre de Knudsen est grand, le paramètre C tend vers 1 et la méthode TRMC du premier ordre correspond à la méthode classique DSMC. La méthode d'Euler explicite appliquée à l'équation (5.3.3) peut s'écrire*

$$\begin{aligned} f^{n+1} &= \left(1 - \frac{\mu\Delta t}{\varepsilon}\right) f_0^n + \frac{\mu\Delta t}{\varepsilon} \frac{P(f^n, f_b^n)}{\mu} \\ &= \left(1 - \frac{\mu\Delta t}{\varepsilon}\right) f_0^n + \frac{\mu\Delta t}{\varepsilon} f_1^n = \bar{A} f_0^n + \bar{B} f_1^n, \end{aligned} \quad (5.3.11)$$

où $\bar{A} + \bar{B} = 1$ et $\bar{A}, \bar{B} \geq 0$ pour la condition CFL suivante: $\mu\Delta t/\varepsilon < 1$.

De plus le schéma TRMC ne requiert pas de condition CFL car $e^{-\frac{\mu\Delta t}{\varepsilon}} \in [0, 1]$.

5.3.3 L'algorithme de tri dans un domaine bidimensionnel.

On simule le transport et la diffusion de N particules polluantes entraînées dans un domaine de dimension 2 contenant un fluide, caractérisé par des quantités macroscopiques homogènes. On prend une densité ρ_b égale à 10, une température T_b égale à 1 et une vitesse macroscopique nulle. On considère comme instant initial le moment où le polluant commence à se diffuser dans le domaine. Ce phénomène se produit à partir d'une source située à la position $(0.3; 0.5)$ dans le domaine. A l'instant initial, le polluant possède une densité $\rho_1 = 1$, une température $T_1 = 10$ et une vitesse macroscopique

$u_1 = 0$. La simulation est réalisée pour un domaine à deux dimensions en espace de la forme $[0, L_x] \times [0, L_y]$. La grille de calcul est divisée en M cellules dans la direction x et en L cellules dans la direction y . De ce fait, les pas d'espace ont pour tailles respectives $dx = \frac{L_x}{M}$ et $dy = \frac{L_y}{L}$. Le nombre total de cellules est $Nc = M \times L$.

Dans le but de simplifier l'algorithme, la cellule numéro ic_x dans la direction x et numéro ic_y dans la direction y peut être identifiée par

$$ic = ic_x + (ic_y - 1) M,$$

où $1 \leq ic_x \leq M$ et $1 \leq ic_y \leq L$.

Après l'étape du transport, afin de réaliser l'étape de collision, on choisit de réordonner les particules, en utilisant l'algorithme:

Algorithme 5.3.1 (2D Sorting). – Pour chaque cellule d'indice ic , on définit $N_{pc}[ic]$ comme étant le nombre total de ses particules. Après l'étape du transport, on l'initialise à 0.

- Pour k variant entre 1 et N , on calcule le numéro ic de la cellule dans laquelle la particule d'indice k se trouve. Pour chaque particule se trouvant dans la cellule, on augmente $N_{pc}[ic]$ de 1.
- On donne alors de nouveaux indices aux nouvelles particules en partant de la première particule de la première cellule.

5.3.4 Implémentation du schéma TRMC.

Calcul de μ .

Il s'agit d'écrire l'équation (5.3.2) sous la forme (5.3.3). On considère le problème homogène en espace (5.3.3), où l'opérateur $P(f, f_b)$, est donné dans le cas des modèles *VHS* (variable hard spere) par la formule

$$P(f, f_b) = Q^+(f, f_b) + f(v) \left(\mu - 4\pi \int_{\mathbb{R}^3} |v - w| f_b(w) dw \right). \quad (5.3.12)$$

L'opérateur $Q^+(f, f_b)$ est le terme de gain de l'opérateur de collision $Q(f, f_b)$. Pour que $P(f, f_b)$ ait un signe positif pour toute fonction de distribution f (positive), il suffit de choisir μ tel que

$$\mu \geq 4\pi \int_{\mathbb{R}^3} |v - w| f_b(w) dw, \quad v \in \mathbb{R}^3. \quad (5.3.13)$$

En général, cette condition ne peut pas être satisfaite pour tout $v \in \mathbb{R}^3$. Pour y remédier, on tronque le noyau de collision ie on remplace $|v - w|$ par le noyau borné $|v - w|_\Sigma$, défini par

$$|v - w|_\Sigma = \min(|v - w|, \Sigma),$$

où Σ est une constante strictement positive donnée. Il suffit alors de choisir

$$\mu = 4\pi \Sigma \rho_b,$$

où ρ_b est la densité du fluide.

Choix de Σ .

Contrairement au cadre de la méthode classique *DSMC* ([1], [4], [3]), où le calcul s'effectue avec le même ensemble de particules, dans notre situation, v est distribuée selon f et w selon M_b . Afin d'estimer Σ , on peut choisir

$$\Sigma = \max_i |v_i - \bar{v}| + \max_j |w_j - \bar{u}| + |\bar{v} - \bar{u}|,$$

où \bar{u} et \bar{v} désignent les vitesses macroscopiques respectives du fluide et des particules de polluant échantillonnées. C'est ce choix de Σ qui sera retenu pour les simulations effectuées au paragraphe suivant.

Méthode de Nambu-Babovsky.

On applique la méthode classique de Nambu-Babovsky pour les modèles *VHS* (variable hard sphere) avec la stratégie d'acceptation-rejet de Nambu-Babovsky, de telle sorte que la collision entre une particule de polluant, ayant une vitesse v_i , et une particule de fluide, avec une vitesse w_j , se produise seulement si

$$\Sigma \xi < |v_i - w_j|,$$

où $\xi \in [0,1]$, est une variable aléatoire uniformément distribuée.

Remarque 26. *La constante Σ doit être choisie suffisamment petite pour éviter certains rejets inutiles. Un choix idéal serait*

$$\Sigma = \max_{i,j} |v_i - w_j|.$$

5.4 Résultats numériques.

La simulation numérique représente l'écoulement du gaz polluant à l'intérieur du domaine pour certaines valeurs de α et de ε et pour $\beta = 0.1$. On a représenté à différents instants la densité de polluant dans le domaine.

La simulation est effectuée à partir de deux méthodes numériques: une méthode DSMC et une méthode TRMC d'ordre 1. Au temps $t = 0$, la figure (5.1) représente la densité initiale de polluant qui commence à être injecté dans le domaine à partir d'un point source. Les figures (5.2, 5.4) représentent la densité du polluant dans le domaine pour des temps respectifs de 0.5s et 0.9s, pour $\alpha = 0.01$ et pour $\varepsilon = 1$. Les vues de dessus pour ces mêmes temps de calcul mettent en évidence la diffusion des particules de polluant à l'intérieur du domaine. Notons au passage que les méthodes TRMC et DSMC fournissent des résultats numériques analogues. Cela s'explique par le fait que l'on est loin du régime fluide.

Par ailleurs, lorsque le fluide possède des molécules plus lourdes, son influence sur le polluant est plus importante. Cela est illustré par les figures (5.6, 5.7) qui représentent la densité de polluant pour 0.4s lorsque $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.1$ et $\varepsilon = 1$. On remarque que, comparée à la situation précédente, le polluant s'est davantage diffusé dans le domaine.

En outre, lorsqu'on se rapproche du régime fluide, on note une différence de comportement entre les deux schémas. Ce propos est illustré par les figures (5.8, 5.9) réalisées pour $\alpha = 0.01$, $\beta = 0.1$, $t = 0.8s$ et $\varepsilon = 0.1$.

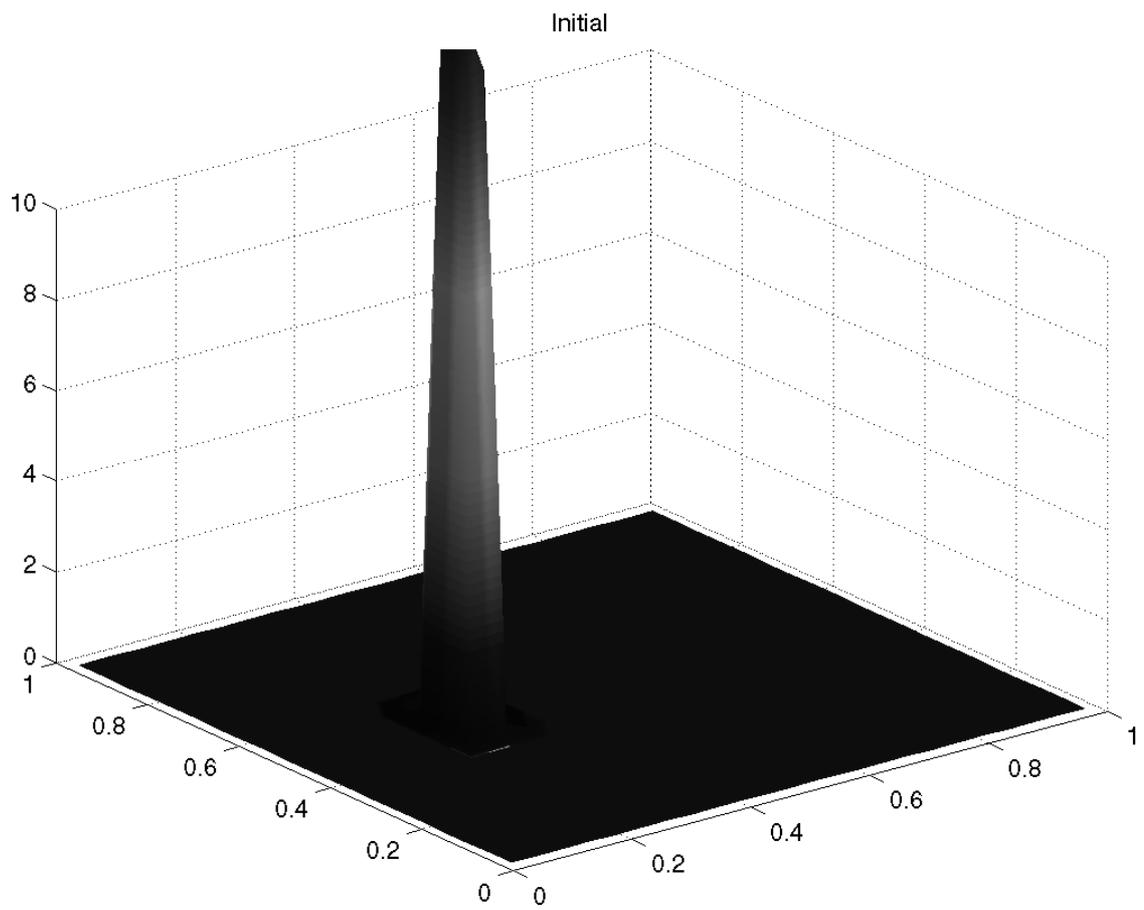


FIG. 5.1 – *Densité initiale de polluant.*

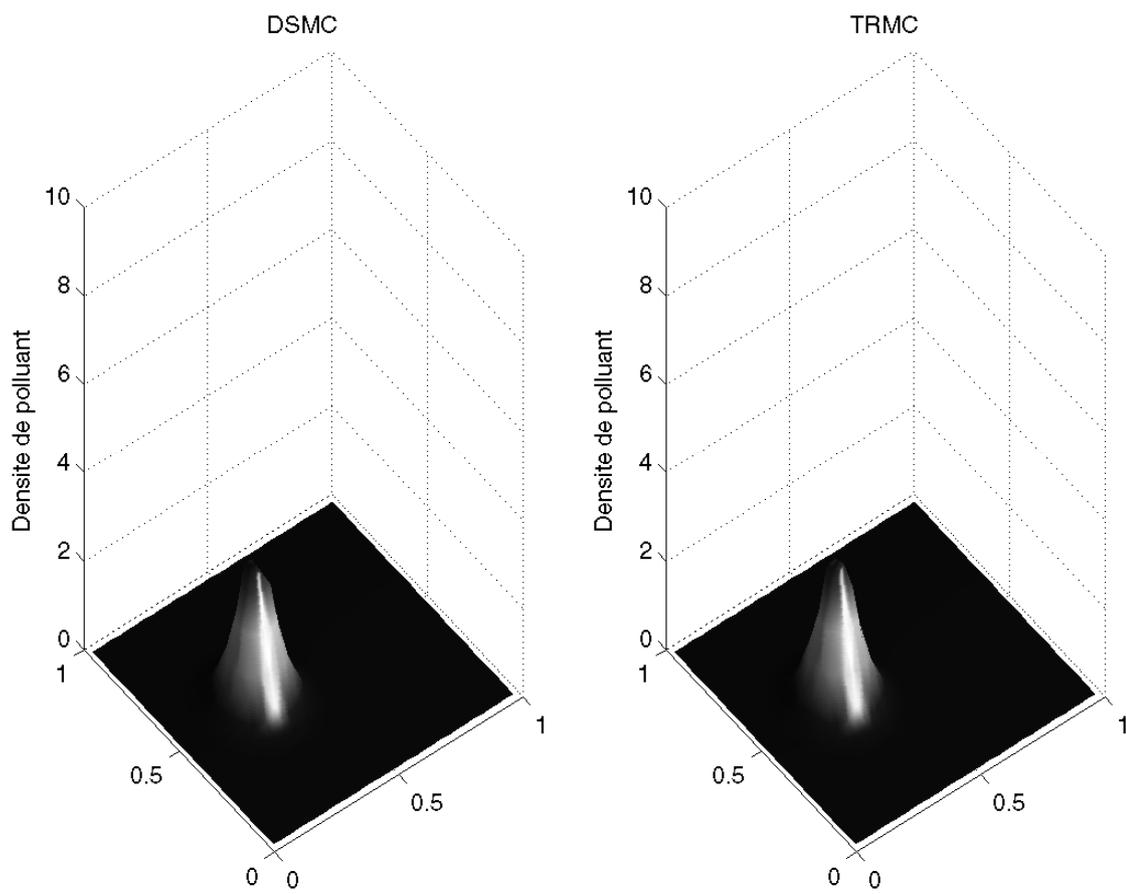


FIG. 5.2 – Densité de polluant pour $\alpha = 0.01$, $\beta = 0.1$, $t = 0.5s$, $\varepsilon = 1$ pour les schémas DSMC et TRMC.

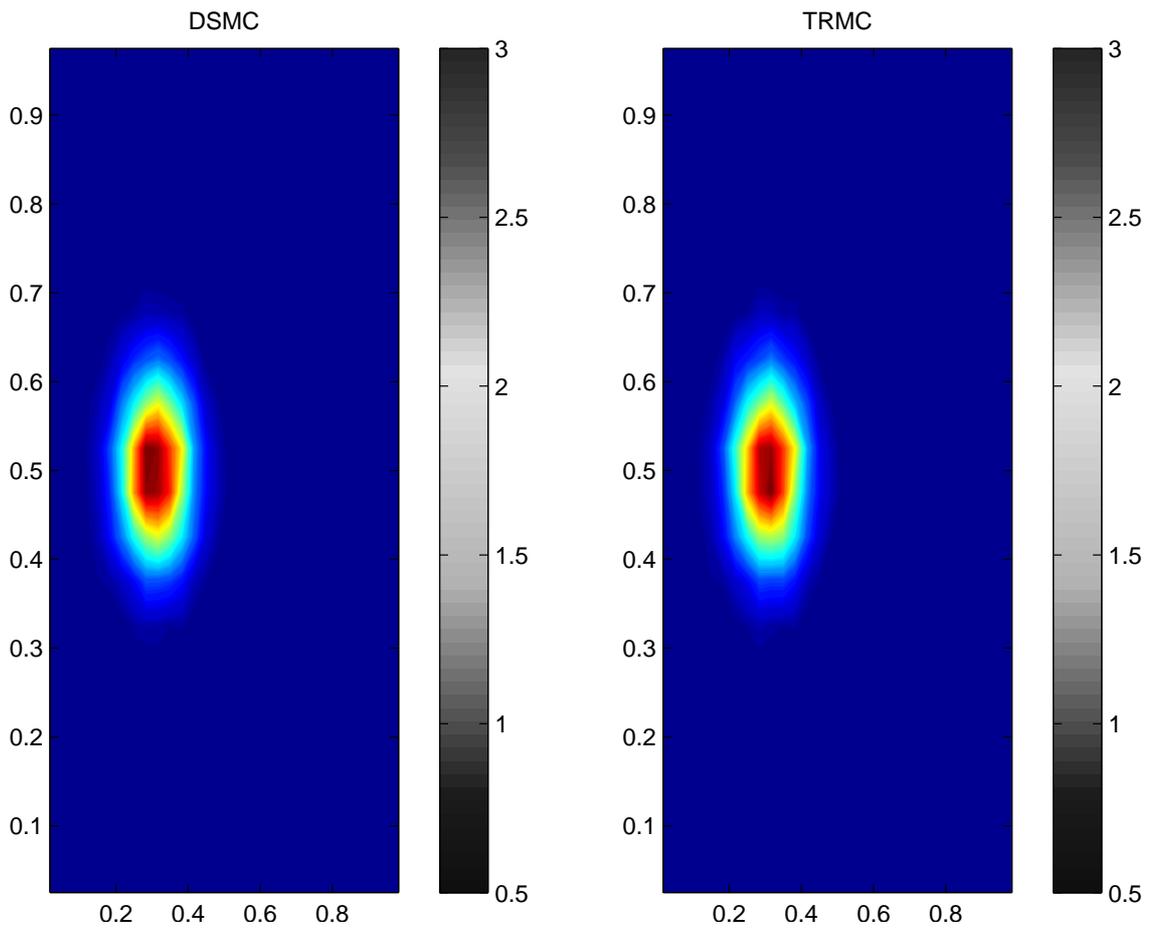


FIG. 5.3 – Densité de polluant pour $\alpha = 0.01$, $\beta = 0.1$, $t = 0.5s$, $\varepsilon = 1$, pour les schémas DSMC et TRMC. Vue de dessus.

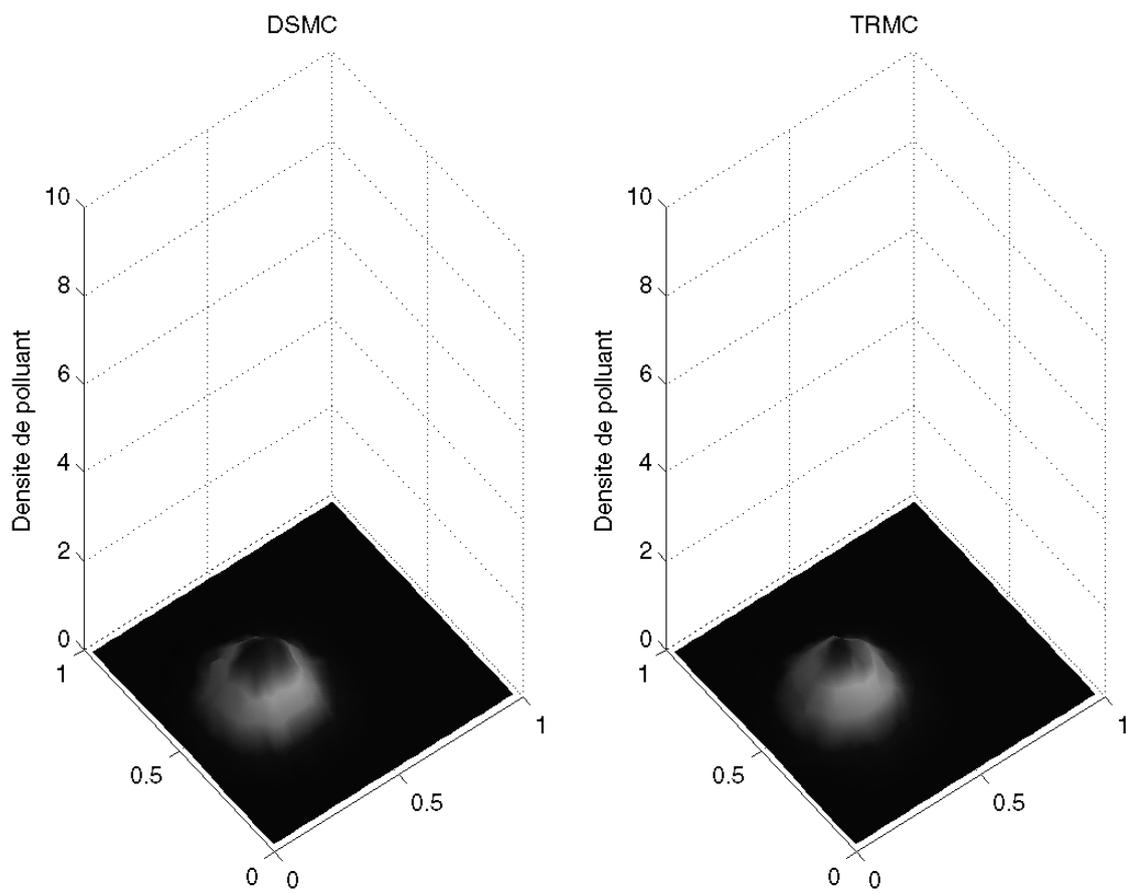


FIG. 5.4 – Densité de polluant pour $\alpha = 0.01$, $\beta = 0.1$, $t = 0.9s$, $\varepsilon = 1$ pour les schémas DSMC et TRMC.

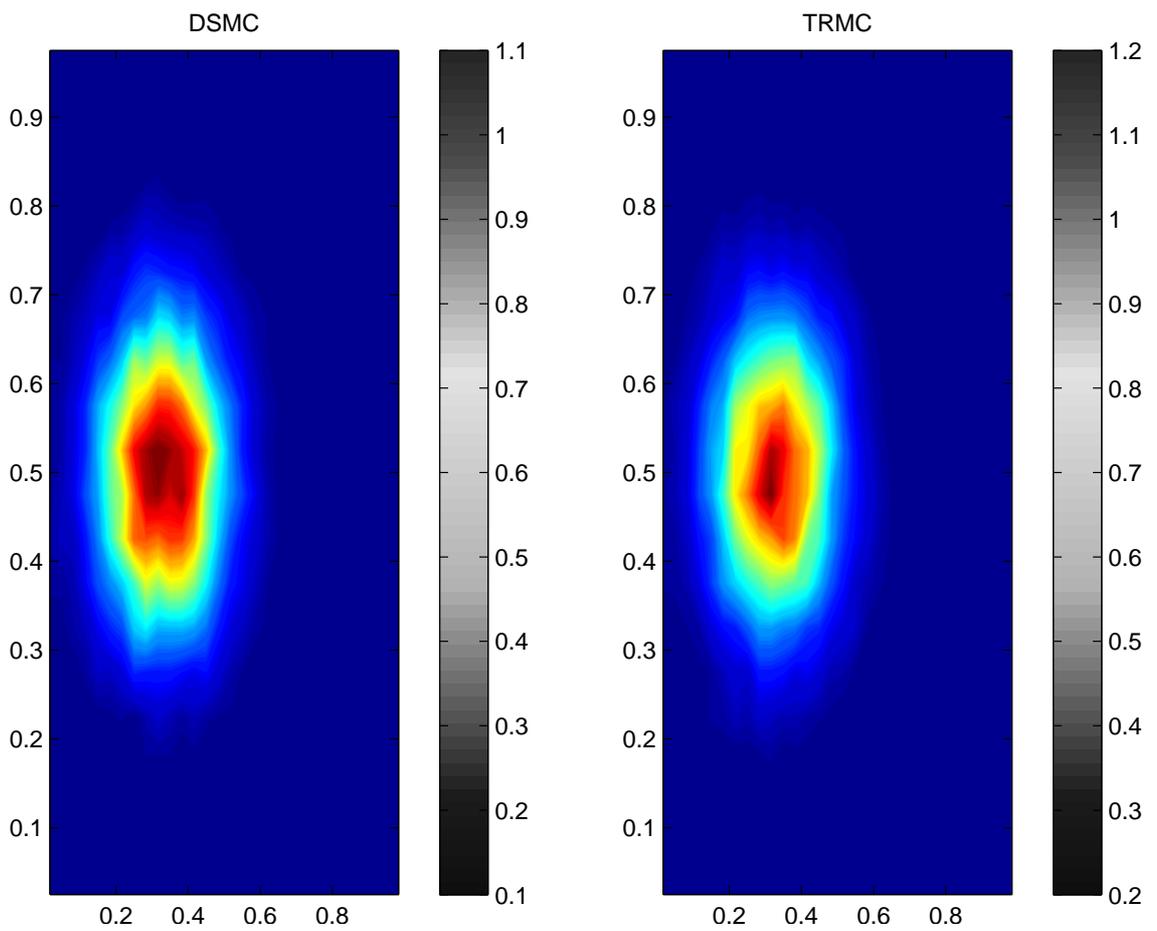


FIG. 5.5 – Densité de polluant pour $\alpha = 0.01$, $\beta = 0.1$, $t = 0.9s$ $\varepsilon = 1$ pour les schémas DSMC et TRMC. Vue de dessus.

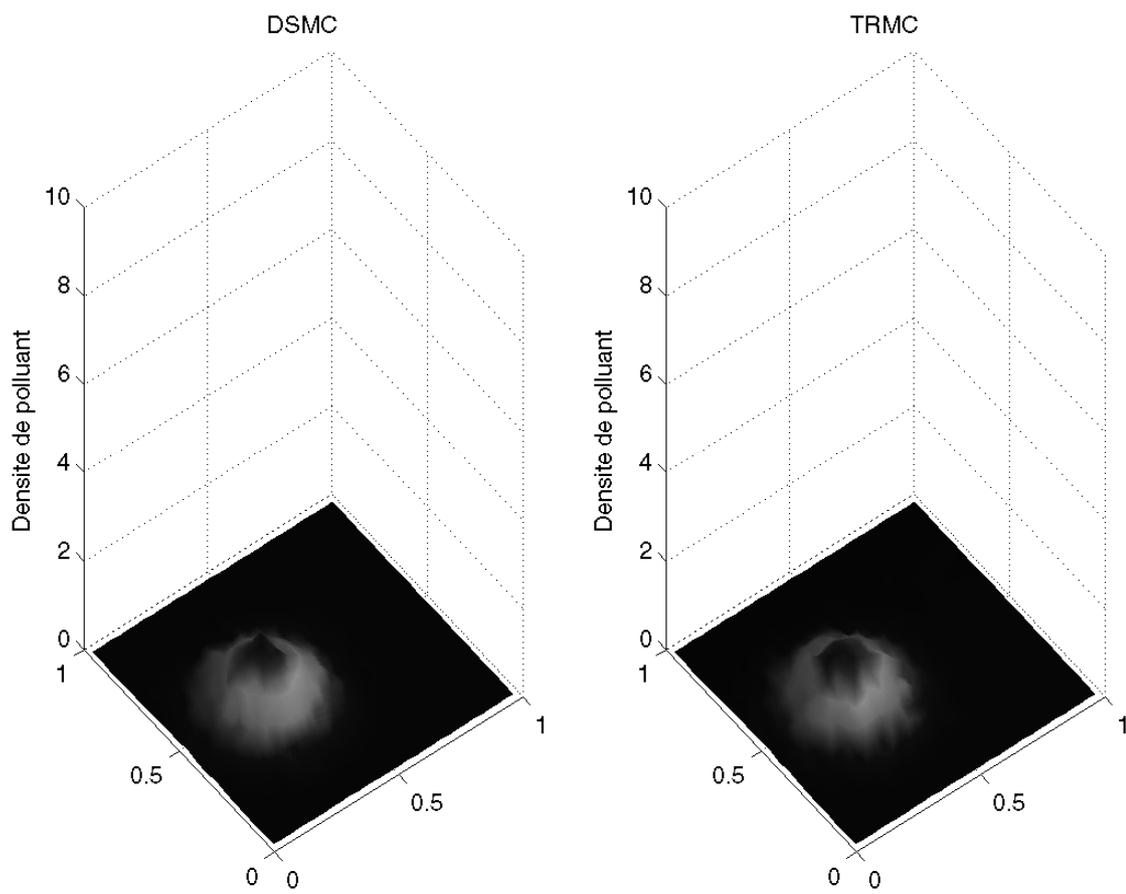


FIG. 5.6 – Densité de polluant pour $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.1$, $t = 0.5s$ $\varepsilon = 1$ pour les schémas DSMC et TRMC.

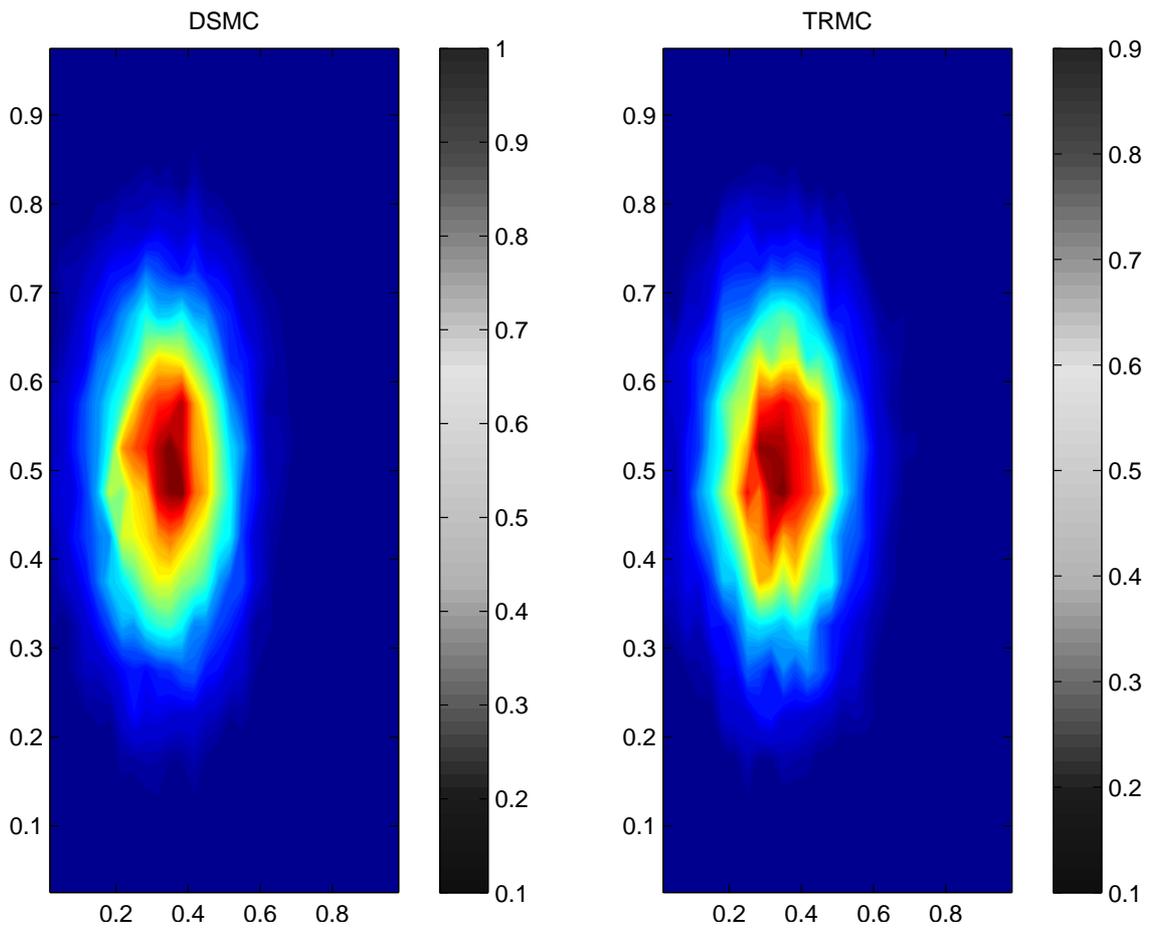


FIG. 5.7 – Densité de polluant pour $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.1$, $t = 0.4s$, $\varepsilon = 1$ pour les schémas DSMC et TRMC. Vue de dessus.

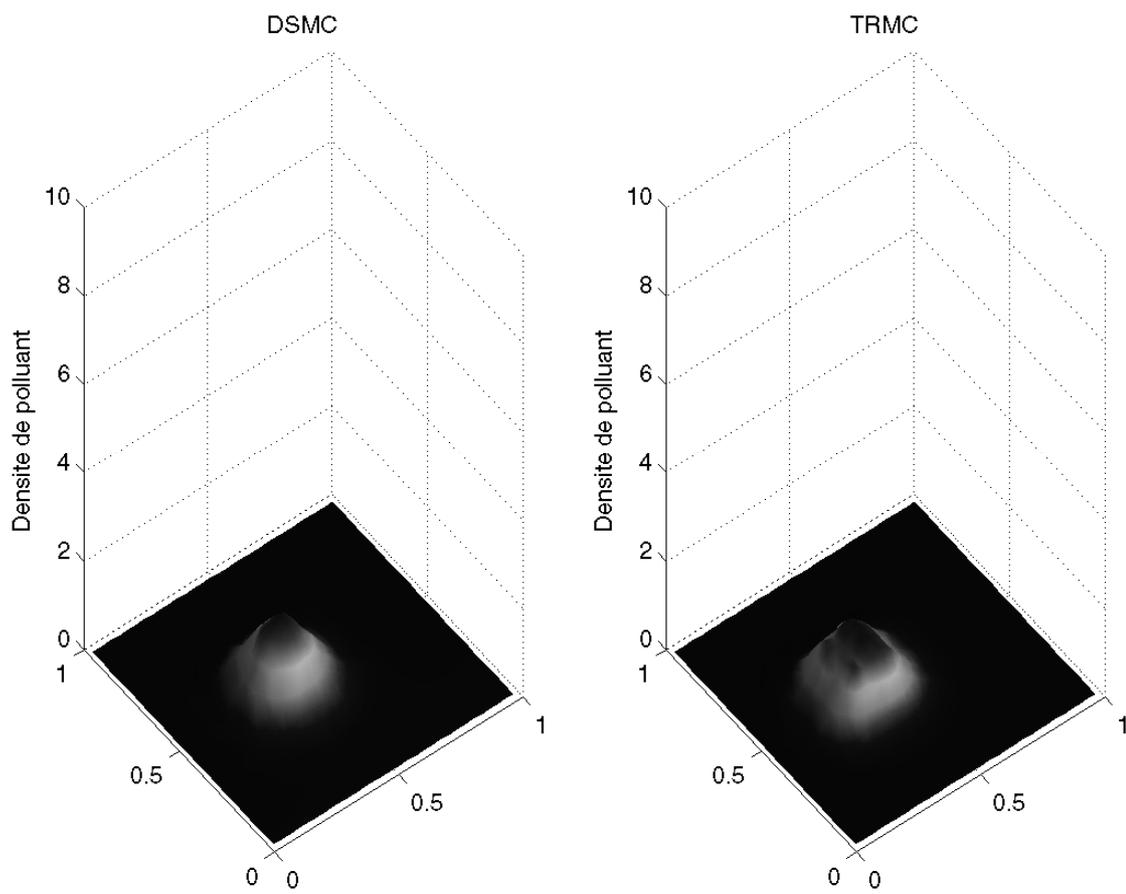


FIG. 5.8 – Densité de polluant pour $\alpha = 0.01$, $\beta = 0.1$, $t = 0.8s$, $\varepsilon = 0.1$, pour les schémas DSMC et TRMC.

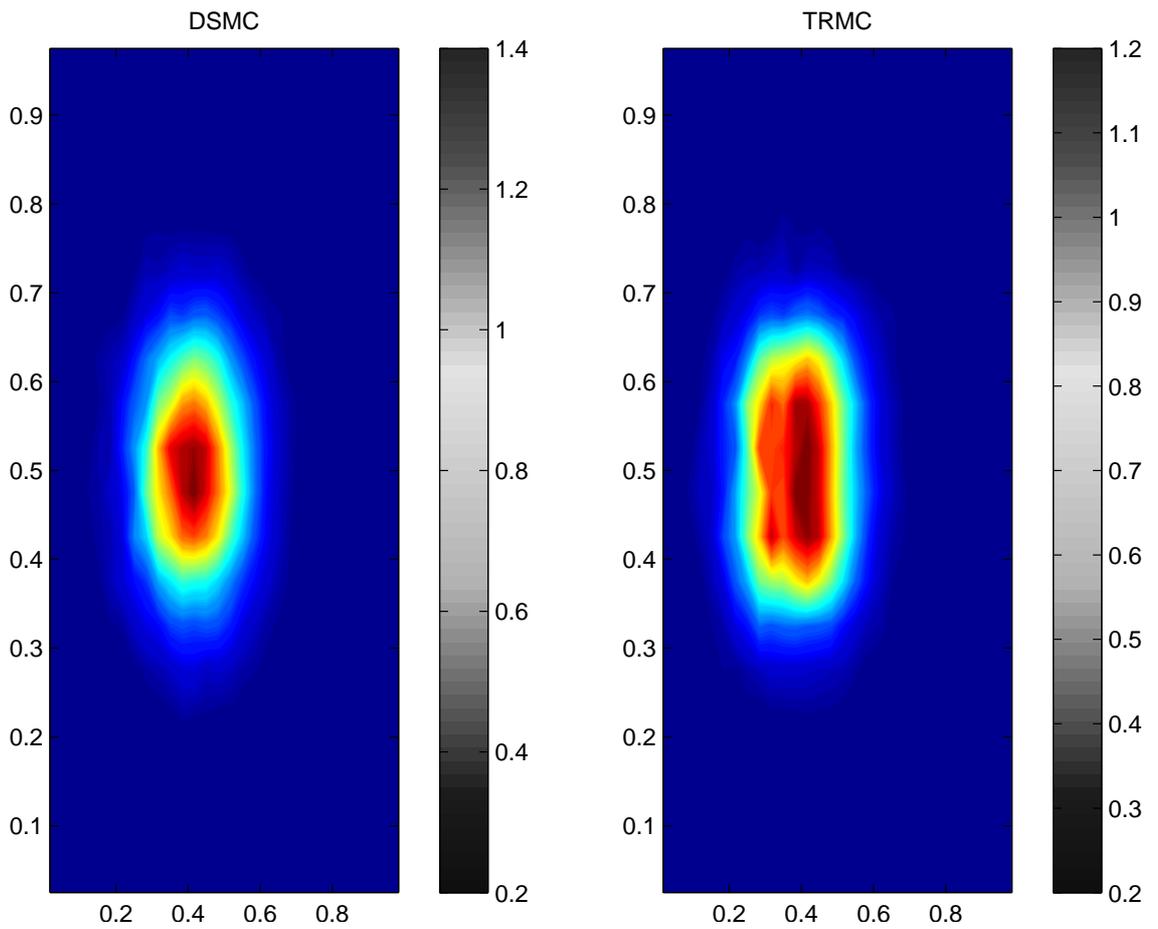


FIG. 5.9 – Densité de polluant pour $\alpha = 0.01$, $\beta = 0.1$, $t = 0.8s$, $\varepsilon = 0.1$, pour les schémas DSMC et TRMC. Vue de dessus.

Bibliographie

- [1] Babovsky H. *On a simulation scheme for the Boltzmann equation*, Math. Meth in the Appl.Sci., 8, 223-233, 1986.
- [2] Babovsky H., Illner R. *A convergence proof for Nambu's simulation method for the full Boltzmann equation*, SIAM.Journ.Numer.Anal., 26, 45-65 1989.
- [3] Babovsky H. *A convergence proof for Nambu's Boltzmann simulation scheme*, Eur.J.Mech.,B/Fluids, 8, 1, 41-55, 1989.
- [4] Babovsky H., Illner R. *A convergence proof for Nambu's simulation method for the full Boltzmann equation*, SIAM Journ.Numer.Anal. 26, 45-65, 1989.
- [5] Brull S., Pareschi L. *Dissipative hydrodynamic models for the diffusion of impurities in a gas* , Appl.Math.Letters. à paraître 2005.
- [6] Caflish R.E., Pareschi L. *An implicit Monte Carlo method for rarefied gas dynamics. The space homogeneous case*, Journ.Comput.Phys., 154, 90-116, 1999.
- [7] Carlen A.E., Carvalho M.C., Gabetta E. *Central limit theorem for molecules and truncation of the Wild expansion*, Comm.Pure.Appl.Math., 53, 370-397, 2000.
- [8] Carlen A.E, Salvarani F. *On the optimal choice of coefficients in a truncated Wild sum and approximate solutions for the Kac equation*, Journ.Stat.Phys., 109, 112, 261-277, 2002.
- [9] Cercignani C. *The Boltzmann equation and its applications*. , Springer, Berlin, 1998.
- [10] Gabetta E., L.Pareschi, G.Toscani. *Relaxation schemes for nonlinear kinetic equations*, Siam Journ. Numerical Analysis, 34, 6, 2168-2194, 1997.
- [11] Lods B., Toscani G. *The dissipative linear Boltzmann equation for hard spheres*, Journ.Stat.Phys., 117, 3-4, 635-664, 2004.

- [12] Pareschi L. *Hybrid multiscale methods for kinetic and hyperbolic problems*, ESAIM: PROCEEDINGS, 15, T.Goudon, E.Sonnendrucker, D.Talay, Editors, 87-120, 2005.
- [13] Pareschi L., Russo G. Summer school on "Method and Models of kinetic theory (2004)", Rivista di Matematica della Università di Parma, 7, 4, 2005.
- [14] Pareschi L., Russo G. *Asymptotic preserving Monte Carlo methods for the Boltzmann equation*, Transport Theory and Statistical Physics, 29, 3-5, 415-430, 2000.
- [15] Pareschi L., Russo G. *An introduction to the Monte Carlo methods for the Boltzmann equation* ESAIM.Proc. 10, 35-76, 2001.
- [16] Pareschi L., Trazzi S. *Numerical solution of the Boltzmann equation by Time Relaxed Monte Carlo (TRMC) methods*, International Journal of Numerical Methods in Fluids, 48, 947-983, 2005.
- [17] Spiga G., Toscani G. *The dissipative linear Boltzmann equation*, Appl.Math.Letters 17, 3, 255-301, 2004.

Chapitre 6

Perspectives.

- Concernant le chapitre 2, on peut considérer le même problème avec des potentiels mous, sachant que le résultat a déjà été obtenu dans ([3]) pour un gaz à une composante et des conditions de bord de type données rentrantes. On peut également envisager le même cas que celui du chapitre 2 pour des molécules de masses moléculaires différentes.

- Pour le chapitre 4, le cas où le gaz non condensable devient négligeable peut être traité. Les résultats numériques ont démontré que le gaz non condensable venait se loger dans une couche mince proche de la paroi du domaine où le gaz condensable se condense ([1], [2]).

- Pour le chapitre 5, on peut envisager un modèle non homogène en espace pour l'air. Dans ce cas, la simulation s'effectue en utilisant un schéma hybride dans lequel

- les quantités macroscopiques ρ_b, u_b, T_b peuvent être déterminées en utilisant des méthodes de volume fini ou de différences finies.
- la distribution des particules de polluant est déterminée avec une méthode TRMC.

Les deux étapes sont reliées en échantillonnant les vitesses macroscopiques des distributions Maxwelliennes $M_b = M(\rho_b, u_b, T_b)$ en utilisant l'algorithme de Box-Muller. Afin de réduire les fluctuations, on utilise la méthode de Pullin ([5]).

On peut aussi considérer un modèle où les particules de polluant se situent dans un milieu réactif. Il s'agit alors de coupler la diffusion des particules avec des réactions chimiques ([4]).

Bibliographie

- [1] Aoki K. *The behaviour of a vapor-gas mixture in the continuum limit: Asymptotic analysis based on the Boltzman equation*, T.J.' Bartel, M.A.Gallis(Eds), Rarified Gas Dynamic, AIP, Melville., 565-574, 2001.
- [2] Aoki K., Takata S., Kosuge S. *Vapor flows caused by evaporation and condensation on two parallel plane surfaces: Effect of the presence of a noncondensable gas*, Physics of Fluids, 10, 6, 1519-1532, 1998.
- [3] Arkeryd L., Nouri A. *The stationary Boltzmann Equation in the Slab with Given Weighted Mass for Hard and Soft Forces*, Ann.Scuola.Norm.Sup.Pisa, 27, 533-536, 1998.
- [4] Brull S., E.Ferrari E., L.Pareschi *Travail en cours*.
- [5] Pareschi L., Trazzi S. *Numerical solution of the Boltzmann equation by Time Relaxed Monte Carlo (TRMC) methods* , International Journal of Numerical Methods in Fluids, 48, 947-983 , 2005.