Inégalités de Poincaré cinétiques.

Pascal AZERAD [a], Stéphane BRULL [b]

[a] *I3M, UMR 5149, Université Montpellier 2, F-34095 Montpellier cedex 5*
[b] *IMT, UMR 5219, Université Paul Sabatier, F-31062 Toulouse cedex 9*

Résumé

Dans cette note, nous établissons des inégalités de type Poincaré pour une famille d'équations cinétiques. Nous appliquons ensuite cette inégalité au traitement variationnel d'un modèle cinétique linéaire.

Abstract

In this note we prove Poincaré type inequalities for a family of kinetic equations. We apply this inequality to the variational solution of a linear kinetic model.

Abridged English version

Let $T > 0$ and Ω a regular domain of $\mathbb{R}^d$, not necessarily bounded. Denote

$$a = (1, v) \in \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^d_x, \quad \nabla_{t,x} = (\partial_t, \nabla_x), \quad \mathcal{R} = (0, T) \times \Omega.$$

Consider the "Lie-Sobolev" spaces:

$$H(a, \mathcal{R}) = \{f \in L^2(\mathcal{R});\ a \cdot \nabla_{t,x} f \in L^2(\mathcal{R})\},$$

equipped with the norms $\|f\|_{H(a,\mathcal{R})} = \|f\|_{L^2_{t,x}(\mathcal{R})} + \|a \cdot \nabla_{t,x} f\|_{L^2_{t,x}(\mathcal{R})}$.
Define $\partial\mathcal{R}^- = (\{0\} \times \Omega) \bigcup ((0, T) \times \Gamma^-_v)$ where $(0, T) \times \Gamma^-_v = \{(t, x) \in \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^3_x;\ v \cdot n_x < 0\}$, n_x being the outer unit normal to $\partial\Omega$. We prove the following results.

Proposition 0.1 *(Kinetic Poincaré inequality.) Let $T > 0$ and $v \in \mathbb{R}^d$. Let $\mathcal{R}$ a regular enough domain of $(0, T) \times \mathbb{R}^d$. Let $f := f(t, x) \in H_0(a, \mathcal{R}, \partial\mathcal{R}^-)$. Then*

$$\|f\|_{L^2_{t,x}} \leq\ 2T\ \|\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f\|_{L^2_{t,x}}. \tag{1}$$

Proposition 0.2 *(Vlasov Poincaré inequality.) Let $T > 0$ and $\mathcal{R}$ a regular enough domain of $(0, T) \times \mathbb{R}^3_x \times \mathbb{R}^3_v$. Let $f := f(t, x, v) \in H_0(a, \mathcal{R}, \partial\mathcal{R}^-)$. Then*

$$\|f\|_{L^2_{t,x,v}} \leq 2T\ \|\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + (E + v \times B) \cdot \nabla_v f\|_{L^2_{t,x,v}}. \tag{2}$$

Email addresses: azerad@math.univ-montp2.fr (Pascal AZERAD), stephane.brull@math.univ-toulouse.fr (Stéphane BRULL).

Preprint submitted to the Académie des sciences *April 30, 2009*

We apply inequality (1) to the variational solution by Lax-Milgram lemma of the following linear kinetic model.

$$(\frac{\partial}{\partial t} + v\cdot\nabla_x)u = G(t,x,v), \quad t\in]0,T[,\ x\in\Omega,\ v\in\mathbb{R}^d, \tag{3}$$

$$u(t=0,x,v) = u_0(x,v), \quad x\in\Omega,\ v\in\mathbb{R}^d, \tag{4}$$

$$u(t,\sigma,v) = u_b(t,\sigma,v), \quad \sigma\in\Gamma_v^-,\ v\in\mathbb{R}^d. \tag{5}$$

With a suitable lifting of the boundary and initial conditions (see Lemma 4.1) problem (3, 4, 5) is reformulated for each $v\in\mathbb{R}^d$:

$$a\cdot\nabla_{t,x} f = G(\cdot,\cdot,v) \quad \text{in} \quad \mathcal{R} = (0,T)\times\Omega, \tag{6}$$

$$f(t,\sigma) = 0 \quad \text{on} \quad \partial\mathcal{R}^- = (\{0\}\times\Omega)\cup\left(]0,T[\times\Gamma_v^-\right), \tag{7}$$

and we obtain the last result

Proposition 0.3 *Let Ω a domain of $\mathbb{R}^d$. Problem (6, 7) has a unique strong solution $f := f(t,x,v)$ such that $\forall\ v\in\mathbb{R}^3$, we have $\|f(\cdot,\cdot,v)\|_{L^2_{t,x}} \le 2T\,\|\,G(\cdot,\cdot,v)\,\|_{L^2_{t,x}}$.*

1. Introduction

Le but de cette note est d'établir des inégalités de type Poincaré dans un cadre cinétique. Nous appliquons cette inégalite à la résolution variationnelle de l' équation de transport cinétique.

2. Inégalité de Poincaré cinétique.

Soit $T>0$ et Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^d$, pas nécessairement borné. Notons

$$a = (1,v)\in\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^d_x, \quad \nabla_{t,x} = (\partial_t,\nabla_x), \quad \mathcal{R} = (0,T)\times\Omega.$$

Considérons les espaces de « Lie-Sobolev », espaces naturels introduits dans [6] :

$$H(a,\mathcal{R}) = \{f\in L^2(\mathcal{R});\ a\cdot\nabla_{t,x} f = \frac{\partial f}{\partial t} + v\cdot\nabla_x f \in L^2(\mathcal{R})\},$$

munis des normes

$$\|f\|_{H(a,\mathcal{R})} = \|f\|_{L^2_{t,x}(\mathcal{R})} + \|a\cdot\nabla_{t,x} f\|_{L^2_{t,x}(\mathcal{R})}.$$

Le vecteur $a=(1,v)$ étant *constant*, on montre que $H(a,\mathcal{R})$ est un espace de Hilbert et que les fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sont denses dans $H(a,\mathcal{R})$. Comme div(a) $=0$, $f\in H(a,\mathcal{R})$ implique que

$$f\cdot a\in H(div,\mathcal{R}) = \{\varphi\in L^2(\mathcal{R});\ \nabla_{t,x}\cdot\varphi\in L^2(\mathcal{R})\}.$$

On peut donc définir l'opérateur de trace normal

$$\gamma_n : f\in H(a,\mathcal{R}) \mapsto f\,(a\cdot n)\in H^{-1/2}(\partial\mathcal{R})$$

où $n=(n_t,n_x)\in\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^d_x$ est le vecteur normal extérieur et $\partial\mathcal{R} = (]0,T[\times\partial\Omega)\cup(\{0,T\}\times\Omega)$. On introduit alors la frontière entrante (resp. sortante) spatio-temporelle $\partial\mathcal{R}^- = \{(t,\sigma)\in\partial\mathcal{R};\ n_t+v\cdot n_x<0\}$ (resp $\partial\mathcal{R}^+ = \{(t,\sigma)\in\partial\mathcal{R};\ n_t+v\cdot n_x>0\}$).

Remarque 1 La frontière entrante regroupe la condition initiale et la condition limite entrante : $\partial\mathcal{R}^- = (\{0\} \times \Omega) \bigcup ((0,T) \times \Gamma_v^-)$.
On peut alors définir l'espace

$$H_0(a, \mathcal{R}, \partial\mathcal{R}^-) = \{f \in H(a, \mathcal{R});\ \gamma_n f = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{R}^-\}.$$

Le principal résultat est l'inégalité de Poincaré cinétique suivante.
Proposition 2.1 *(Inégalité de Poincaré cinétique.) Soit $T > 0$ et $v \in \mathbb{R}^d$. Soit $\mathcal{R}$ un ouvert régulier de $(0,T) \times \mathbb{R}^d$. Soit $f := f(t,x) \in H_0(a, \mathcal{R}, \partial\mathcal{R}^-)$. On a l'inégalité*

$$\|f\|_{L^2_{t,x}} \leq\ 2T\ \|\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f\|_{L^2_{t,x}}. \tag{8}$$

(Propriété 2.1). On raisonne par densité en prenant f lisse. Considérons $w(t,x) := t - T$. Pour tout $(x,t) \in \mathcal{R},\ w(t,x) \leq 0$ et

$$\frac{\partial w}{\partial t} + v \cdot \nabla_x w = 1.$$

D'après la formule de Stokes, on obtient

$$\int\int_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla_x\right)(w \cdot f^2) = \int_{\partial\mathcal{R}} wf^2\,(n_t + v \cdot n_x).$$

Or $f(n_t + v \cdot n_x) = \gamma_n f = 0$ sur $\partial\mathcal{R}^-$. Donc comme $w \leq 0$ et $f^2 \geq 0$, on a

$$\int\int_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla_x\right)(w \cdot f^2) = \int_{\partial\mathcal{R}^+} wf^2\,(n_t + v \cdot n_x) \leq 0.$$

D'autre part,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla_x\right)(w \cdot f^2) = f^2 + 2w\,f\,(\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f).$$

On obtient alors

$$\int\int_{Q} f^2 \leq 2\|w\|_{L^\infty} \int\int_{Q} |f| \left|\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f\right|.$$

Avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\|f\|_{L^2_{t,x}} \leq 2\|w\|_{L^\infty}\ \|\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f\|_{L^2_{t,x}}.$$

Comme $\|w\|_{L^\infty} \leq T$, on obtient le résultat.
Remarque 2 La constante T est indépendante de v et le domaine Ω n'a pas besoin d'être borné. En effet le domaine espace-temps $\mathcal{R}$ est automatiquement borné dans la direction du temps.

3. Une inégalité de Vlasov-Poincaré.

A partir de maintenant $d = 3$. Soit $\mathcal{R} = (0,T) \times \Omega \times \mathbb{R}^3$. Considèrons l'équation de Vlasov

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + (E + v \times B) \cdot \nabla_v f = 0$$

où $E := E(t,x)$ et $B := B(t,x)$ sont respectivement les champs électriques et magnétiques, supposés réguliers, par exemple $\mathcal{C}^1$. Notons

$$a = (1, v, E(t,x) + v \times B(t,x)) \in \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^3_x \times \mathbb{R}^3_v.$$

On remarque que $\nabla_{t,x,v} \cdot a = \nabla_v \cdot (v \times B(t,x)) = \sum_j \frac{\partial}{\partial v_j}\,(v \times B(t,x))_j = 0$, car $(v \times B(t,x))_j$ dépend seulement de v_i pour $i \neq j$. On a alors

$$\nabla_{t,x,v} \cdot (f \cdot a) = a \cdot \nabla_{t,x,v} f \tag{9}$$

Remarque 3 La propriété (9) permettrait certainement d'abaisser la régularité de E et B.
On considère l'espace de Sobolev anisotrope :

$$H(a, \mathcal{R}) = \{f \in L^2(\mathcal{R});\ f \cdot a \in L^2(\mathcal{R}) \text{ et } a \cdot \nabla_{t,x,v} f \in L^2(\mathcal{R})\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{H(a,\mathcal{R})} = \|f \cdot a\|_{L^2_{t,x,v}(\mathcal{R})} + \|a \cdot \nabla_{t,x,v} f\|_{L^2_{t,x,v}(\mathcal{R})}.$$

Remarque 4 Comme v peut être arbitraire, a est non borné.
D'après (9) on a

$$H(a, \mathcal{R}) = \{f \in L^2(\mathcal{R});\ f \cdot a \in H(div, \mathcal{R})\}.$$

On peut alors définir un opérateur de trace normal

$$\gamma_n : f \in H(a, \mathcal{R}) \mapsto f\,(a \cdot n) \in H^{-1/2}(\partial\mathcal{R})$$

où $n = (n_t, n_x, 0) \in \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^3_x \times \mathbb{R}^3_v$ est la normale extérieure au bord

$$\partial\mathcal{R} = \left(]0,T[\times\partial\Omega \times \mathbb{R}^3_v\right) \cup \left(\{0,T\} \times \Omega \times \mathbb{R}^3_v\right).$$

Notons qu'il n'y a pas de bord dans la direction v. On a $a \cdot n = n_t + v \cdot n_x$ et le bord entrant est

$$\partial\mathcal{R}^- = \left(]0,T[\times\Gamma^-_v \times \mathbb{R}^3_v\right) \cup \left(\{0\} \times \Omega \times \mathbb{R}^3_v\right).$$

On définit alors l'espace

$$H_0(a, \mathcal{R}, \partial\mathcal{R}^-) = \{f \in H(a, \mathcal{R});\ f(a \cdot n) = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{R}^-\}.$$

La proposition s'énonce.
Proposition 3.1 *(Inégalité de Vlasov Poincaré.) Soit $T > 0$ et $\mathcal{R}$ un ouvert régulier de $(0,T) \times \mathbb{R}^3_x \times \mathbb{R}^3_v$. Let $f := f(t,x,v) \in H_0(a, \mathcal{R}, \partial\mathcal{R}^-)$. On a l'inégalité*

$$\|f\|_{L^2_{t,x,v}} \leq 2T\, \|\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + (E + v \times B) \cdot \nabla_v f\|_{L^2_{t,x,v}}. \tag{10}$$

Preuve (analogue à la proposition 16). On considère $w(t,x) := t - T$. Pour tout $(x,t) \in \mathcal{R}$, $w(t,x) \leq 0$ et

$$\frac{\partial w}{\partial t} + v \cdot \nabla_x w + (E + v \times B) \cdot \nabla_v w = 1.$$

D'après la formule de Stokes, on obtient

$$\iiint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial}{\partial t} + v\cdot\nabla_x + (E + v\times B)\cdot\nabla_v\right)(w\cdot f^2)(t,x,v)\,dtdxdv$$

$$= \iiint_{\mathcal{R}} \nabla_{t,x,v}(wf^2\cdot a) = \iint_{\partial\mathcal{R}} wf^2\,(n_t + v\cdot n_x) = \iint_{\partial\mathcal{R}^+} wf^2\,(n_t + v\cdot n_x) \le 0.$$

Or $\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\cdot\nabla_x + (E+v\times B)\cdot\nabla_v\right)(w\cdot f^2) = f^2 + 2\,w\,f\left(\frac{\partial f}{\partial t} + v\cdot\nabla_x f + (E+v\times B)\cdot\nabla_v f\right)$, donc

$$\int_{\mathcal{R}} f^2 \le 2\|w\|_{L^\infty}\int_{\mathcal{R}} |f|\left|\frac{\partial f}{\partial t} + v\cdot\nabla_x f + (E+v\times B)\cdot\nabla_v f\right|$$

et on conclut comme dans la preuve de (2.1) □

4. Application à la forme variationnelle du transport cinétique.

Soit $v\in\mathbb{R}^3 \mapsto G(\cdot,\cdot,v)\in L^2((0,T)\times\Omega)$. Considérons le problème suivant, pour chaque $v\in\mathbb{R}^3$.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\cdot\nabla_x\right)u = G(t,x,v),\quad t\in]0,T[,\ x\in\Omega, \tag{11}$$
$$u(t=0,x,v) = u_0(x,v),\quad x\in\Omega, \tag{12}$$
$$u(t,\sigma,v) = u_b(t,\sigma,v),\quad \sigma\in\Gamma_v^-. \tag{13}$$

Le problème (11, 12, 13) est reformulé pour chaque $v\in\mathbb{R}^3$:

$$a\cdot\nabla_{t,x}u = G(\cdot,\cdot,v)\quad\text{dans}\quad \mathcal{R} = (0,T)\times\Omega,$$
$$u(t,\sigma) = g(t,\sigma,v)\quad\text{sur}\quad \partial\mathcal{R}^- = (\{0\}\times\Omega)\cup\left(]0,T[\times\Gamma_v^-\right).$$

Pour se ramener à des conditions de bord de type Dirichlet homogène on démontre aisément le lemme suivant par la méthode des caractéristiques, qui sont ici rectilignes.

Lemma 4.1 *Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^3$. Le vecteur $v\in\mathbb{R}^3$ étant donné, il existe $g(t,x,v)$ solution du problème*

$$a\cdot\nabla_{t,x}g = 0,\quad t\in]0,T[,\ x\in\Omega$$
$$g(0,x,v) = u_0(x,v),\quad x\in\Omega,$$
$$g(t,\sigma,v) = u_b(t,\sigma,v),\quad t\in]0,T[,\ \sigma\in\Gamma_v^-.$$

De plus, si $u_0(\cdot,v)\in L^\infty(\Omega)$ et si $u_b(\cdot,\cdot,v)\in L^\infty((0,T)\times\Gamma_v^-)$ alors $g(\cdot,\cdot,v)\in L^\infty([0,T]\times\Omega)$ et

$$\|g(\cdot,\cdot,v)\|_{L^\infty([0,T]\times\Omega)} \le \|u_0(\cdot,v)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|u_b(\cdot,\cdot,v)\|_{L^\infty([0,T]\times\partial\Omega)}.$$

On effectue alors le changement d'inconnue $f = u - g$ où g est le relèvement défini par le lemme 4.1. Ainsi f devient solution du problème de Dirichlet homogène suivant

$$a\cdot\nabla_{t,x}f(t,x,v) = G(t,x,v)\quad\text{dans}\quad\mathcal{R}, \tag{14}$$
$$f(t,\sigma,v) = 0\quad\text{sur}\quad\partial\mathcal{R}^-. \tag{15}$$

On obtient alors la proposition suivante.

Proposition 4.1 *Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^3$. Le problème (14, 15) possède une unique solution forte $f := f(t,x,v)$ vérifiant pour chaque $v \in \mathbb{R}^3$*

$$\|f(\cdot,\cdot,v)\|_{L^2_{t,x}} \leq C \, \| \, G(\cdot,\cdot,v) \, \|_{L^2_{t,x}} \tag{16}$$

où C est une constante positive indépendante de la variable v et bornée par $2T$.

Remarque 5 La preuve est inspirée de la méthode STILS développée dans ([2], [3], [5]), adaptée à un cadre cinétique. Mais la constante C est indépendante de la variable v contrairement à ([2]).

(Proposition 4.1). Pour chaque v fixé, considérons la forme bilinéaire suivante

$$\mathcal{B}(f,g) = \int\int_{\mathcal{R}} (a \cdot \nabla_{t,x} f)\,(a \cdot \nabla_{t,x} g)\,dtdx$$

et la forme linéaire

$$L(g) = \int\int_{\mathcal{R}} G\,(a \cdot \nabla_{t,x} g).$$

La formulation STILS ([3,2]) du problème s'écrit : $G \in L^2(\mathcal{R})$ étant donné, trouver $f \in H_0(a,\mathcal{R},\partial\mathcal{R}^-)$ telle que

$$\mathcal{B}(f,g) = L(g), \quad \forall g \in H_0(a,\mathcal{R},\partial\mathcal{R}^-). \tag{17}$$

D'après l'inégalité de Poincaré 2.1, la forme bilinéaire $\mathcal{B}$ est coercive. En utilisant le théorème de Lax-Milgam, on obtient que le problème (17) est bien posé. Il reste à prouver que f satisfait à (14, 15) fortement. Il suffit alors de prouver que

$$\{\frac{\partial\varphi}{\partial t} + v \cdot \nabla_x \varphi \in L^2_{t,x};\ \varphi \in H_0(a,\mathcal{R},\partial\mathcal{R}^-)\}$$

est dense dans $L^2_{t,x}$. Pour cela on reproduit la preuve donnée dans [1] (Théorème 16, pp. 83-84). □

Références

[1] P. Azerad, *Analyse des équations de Navier-Stokes en bassin peu profond et de l'équation de transport* Thèse, Université de Neuchâtel (1996)on line on `http ://doc.rero.ch`.

[2] P. Azerad, J. Pousin *Inégalité de Poincaré courbe pour le traitement variationnel de l'équation de transport* C.R.Acad.Sci.Paris 322 (1996), 721-727.

[3] P. Perrochet, P. Azerad *Space-time integrated least squares : Solving a pure advection-diffusion equation with a pure diffusion operator* J.Comput.Phys. 117 (1995) 183-193.

[4] O. Besson, J. Pousin *Hele-Shaw approximation for resin transfer molding* Z.Angew.Math.Mech. 85 No4, (2005), 227–241.

[5] O. Besson, J. Pousin *Solutions for linear conservation law with velocity field in L^∞*. Arch.Ration.Mech.Anal. 186, 2007, 159-175.

[6] M. Cessenat *Théorème de trace pour les espaces de fonctions de la neutronique.* C.R.Acad.Sci.Paris 300(1) 1985 89-92.