Etude cinétique d'un gaz à plusieurs composantes.

Stéphane BRULL

Université de Provence

28 septembre 2006

Sommaire

Etude d’un système d’équations cinétiques pour un gaz à deux composantes situé entre deux parois.

Le problème étudié

On considère l'équation de Boltzmann stationnaire pour un gaz à deux composantes pour la géométrie d'un barreau.

$$
\begin{aligned}
\xi \frac{\partial}{\partial x} f_A(x,v) &= Q(f_A, f_A + f_B)(x,v) \\
\xi \frac{\partial}{\partial x} f_B(x,v) &= Q(f_B, f_A + f_B)(x,v), \\
& x \in [-1,1], v \in \mathbb{R}^3.
\end{aligned}
$$

Les solutions de l'équation sont étudiées sous la contrainte:

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \int_{\mathbb{R}_v^3} (1+|v|)^{\beta} f_A(x,v)\,dxdv &= M_A, \\
\int_{-1}^{1} \int_{\mathbb{R}_v^3} (1+|v|)^{\beta} f_B(x,v)\,dxdv &= M_B
\end{aligned}
$$

Le problème étudié

On considère l'équation de Boltzmann stationnaire pour un gaz à deux composantes pour la géométrie d'un barreau.

$$\begin{aligned}\xi \frac{\partial}{\partial x} f_A(x,v) &= Q(f_A, f_A + f_B)(x,v)\\ \xi \frac{\partial}{\partial x} f_B(x,v) &= Q(f_B, f_A + f_B)(x,v),\\ &x \in [-1,1], v \in \mathbb{R}^3.\end{aligned}$$

Les solutions de l'équation sont étudiées sous la contrainte:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\int_{\mathbb{R}^3_v}(1+|v|)^{\beta} f_A(x,v)\,dxdv &= M_A,\\ \int_{-1}^{1}\int_{\mathbb{R}^3_v}(1+|v|)^{\beta} f_B(x,v)\,dxdv &= M_B\end{aligned}$$

L'opérateur de collision.

L'opérateur de collision Q est l'opérateur de Boltzmann

$$\begin{aligned} Q(f,g)(x,v) &= \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{S}^2} B(v-v_*,\omega)[f'g'^* - fg^*]d\omega dv_* \\ &= Q^+(f,g)(x,v) - Q^-(f,g)(x,v) \end{aligned}$$

où $Q^+(f,g)$ désigne le terme de gain et $Q^-(f,g)$ le terme de perte.

$$\begin{gathered} f^* = f^*(x,v_*), \quad f' = f(x,v'), \quad f^{*'} = f(x,v'_*) \\ v' = v - (v-v_*,\omega)\omega, \quad v'_* = v_* + (v-v_*,\omega)\omega. \end{gathered}$$

Les conditions de bord.

Les conditions de bord pour la composante A sont de type données au bord rentrantes:

$$f_A(-1,v) = kM_-(v), \quad \xi > 0, \qquad f_A(1,v) = kM_+(v), \quad \xi < 0.$$

Les conditions de bord pour la composante B sont de type Maxwell diffuses

$$\begin{aligned} f_B(-1,v) &= \left(\int_{\xi'<0} |\xi'| f_B(-1,v')dv'\right) M_-(v), \quad \xi' > 0, \\ f_B(1,v) &= \left(\int_{\xi'>0} \xi' f_B(1,v')dv'\right) M_+(v), \quad \xi' < 0. \end{aligned}$$

Les conditions de bord.

Les conditions de bord pour la composante A sont de type données au bord rentrantes:

$$f_A(-1,v) = k M_-(v), \quad \xi > 0, \qquad f_A(1,v) = k M_+(v), \quad \xi < 0.$$

Les conditions de bord pour la composante B sont de type Maxwell diffuses

$$\begin{aligned} f_B(-1,v) &= \left(\int_{\xi'<0} |\xi'| f_B(-1,v')dv'\right) M_-(v), \quad \xi' > 0, \\ f_B(1,v) &= \left(\int_{\xi'>0} \xi' f_B(1,v')dv'\right) M_+(v), \quad \xi' < 0. \end{aligned}$$

Résultats pour les gaz à une composante.

Des résultats analogues ont été prouvés par A-Nouri et L-Arkeryd dans le cas d'un gaz a une composante. Pour une masse pondérée donnée le problème suivant

$$
\begin{aligned}
\xi \frac{\partial}{\partial x} f(x,v) &= Q(f,f)(x,v), \quad x \in [-1,1], v \in \mathbb{R}^3 \\
f(-1,v) &= \left(\int_{\xi'<0} |\xi'| f(-1,v') dv' \right) M_-(v), \xi > 0, \\
f(1,v) &= \left(\int_{\xi'>0} \xi' f(1,v') dv' \right) M_+(v), \xi < 0
\end{aligned}
$$

possède une solution faible.
[Arkeryd-Nouri, 2000]

Données aux bords rentrantes.

Pour une masse pondérée donnée le problème suivant

$$\begin{aligned} \xi \frac{\partial}{\partial x} f(x,v) &= Q(f,f)(x,v) \quad x \in [-1,1], v \in \mathbb{R}^3 \\ f(-1,v) &= k M_-(v), \xi > 0 \\ f(1,v) &= k M_+(v), \xi < 0, \end{aligned}$$

possède une solution faible.
[Arkeryd-Nouri, 1998]

Le théorème d'existence.

Théorème

Soit β tel que $0 \leq \beta < 2$. Alors, il existe un $k > 0$ et il existe une solution faible (f_A, f_B) au problème stationnaire telle que f_A et f_B ont une β-norme égale à 1.

- Au cours de la preuve, les masses sont fixées égales à 1.
- La preuve est réalisée en effectuant dans un premier temps un point fixe puis un passage à la limite dans la suite des approximations.
- f défini par $f = f_A + f_B$ vérifie l'équation de Boltzmann pour un gaz à une composante.

Du point de vue numérique. [Sone, Aoki, Doi, 1992].

Le théorème d'existence.

Théorème

Soit β tel que $0 \leq \beta < 2$. Alors, il existe un $k > 0$ et il existe une solution faible (f_A, f_B) au problème stationnaire telle que f_A et f_B ont une β-norme égale à 1.

- Au cours de la preuve, les masses sont fixées égales à 1.
- La preuve est réalisée en effectuant dans un premier temps un point fixe puis un passage à la limite dans la suite des approximations.
- f défini par $f = f_A + f_B$ vérifie l'équation de Boltzmann pour un gaz à une composante.

Du point de vue numérique. [Sone, Aoki, Doi, 1992].

Le théorème d'existence.

Théorème

Soit β tel que $0 \leq \beta < 2$. Alors, il existe un $k > 0$ et il existe une solution faible (f_A, f_B) au problème stationnaire telle que f_A et f_B ont une β-norme égale à 1.

- Au cours de la preuve, les masses sont fixées égales à 1.
- La preuve est réalisée en effectuant dans un premier temps un point fixe puis un passage à la limite dans la suite des approximations.
- f défini par $f = f_A + f_B$ vérifie l'équation de Boltzmann pour un gaz à une composante.

Du point de vue numérique. [Sone, Aoki, Doi, 1992].

Le théorème d'existence.

Théorème

Soit β tel que $0 \leq \beta < 2$. Alors, il existe un $k > 0$ et il existe une solution faible (f_A, f_B) au problème stationnaire telle que f_A et f_B ont une β-norme égale à 1.

- Au cours de la preuve, les masses sont fixées égales à 1.
- La preuve est réalisée en effectuant dans un premier temps un point fixe puis un passage à la limite dans la suite des approximations.
- f défini par $f = f_A + f_B$ vérifie l'équation de Boltzmann pour un gaz à une composante.

Du point de vue numérique. [Sone, Aoki, Doi, 1992].

Le théorème d'existence.

Théorème

Soit β tel que $0 \leq \beta < 2$. Alors, il existe un $k > 0$ et il existe une solution faible (f_A, f_B) au problème stationnaire telle que f_A et f_B ont une β-norme égale à 1.

- Au cours de la preuve, les masses sont fixées égales à 1.
- La preuve est réalisée en effectuant dans un premier temps un point fixe puis un passage à la limite dans la suite des approximations.
- f défini par $f = f_A + f_B$ vérifie l'équation de Boltzmann pour un gaz à une composante.

Du point de vue numérique. [Sone, Aoki, Doi, 1992].

Estimations à priori.

$$f^j_A(x,v) \geq 0 \quad f^j_B(x,v) \geq 0.$$

$$\int_{\mathbb{R}^3_v} |\xi|^2 f^j(x,v)dv \leq c \text{ uniformément en } x \text{ et } j.$$

$$\int \chi^{r,m} B_{m,n,\mu}(f^j(x,v')f^j(x,v'_*) - f^j(x,v)f^j(x,v_*)) \ln\left(\frac{f^j(x,v')f^j(x,v'_*)}{(f^j(x,v)f^j(x,v_*)}\right) dxdvdv_* d\omega \leq c.$$

Estimations à priori.

$$f_A^j(x,v) \geq 0 \quad f_B^j(x,v) \geq 0.$$

$$\int_{\mathbb{R}_v^3} |\xi|^2 f^j(x,v)dv \leq c \text{ uniformément en } x \text{ et } j.$$

$$\int \chi^{r,m} B_{m,n,\mu}(f^j(x,v')f^j(x,v'_*) - f^j(x,v)f^j(x,v_*))$$

$$\ln\left(\frac{f^j(x,v')f^j(x,v'_*)}{(f^j(x,v)f^j(x,v_*)}\right) dxdvdv_*d\omega \leq c.$$

Estimations à priori.

$$f_A^j(x,v) \geq 0 \quad f_B^j(x,v) \geq 0.$$

$$\int_{\mathbb{R}_v^3} |\xi|^2 f^j(x,v)dv \leq c \text{ uniformément en } x \text{ et } j.$$

$$\int \chi^{r,m} B_{m,n,\mu}(f^j(x,v')f^j(x,v'_*) - f^j(x,v)f^j(x,v_*)) \ln\left(\frac{f^j(x,v')f^j(x,v'_*)}{(f^j(x,v)f^j(x,v_*)}\right) dxdvdv_*d\omega \leq c.$$

Solution approchée.

Pour la composante A, il existe $f_A^{r,\mu}$ vérifiant

$$\xi \frac{\partial}{\partial x} f_A^{r,\mu}(x,v) = \int_{\mathbb{R}^3_v \times \mathbb{S}^2} \chi^r B_\mu(v - v_*,\omega) f_A^{r,\mu}(x,v') f^{r,\mu}(x,v_*^{'}) dv_* d\omega$$
$$- f_A^{r,\mu}(x,v) \int_{\mathbb{R}^3_{v_*} \times \mathbb{S}^2} \chi^r B_\mu(v - v_*,\omega) f^{r,\mu}(x,v_*) dv_* d\omega$$
$$f_A^{r,\mu}(-1,v) = k_A^{r,\mu} M_-(v), \quad \xi > 0,$$
$$f_A^{r,\mu}(1,v) = k_A^{r,\mu} M_+(v), \quad \xi < 0,$$

$$\int min(\mu,(1+|v|)^\beta) f_A^{r,\mu}(x,v) dxdv = 1.$$

Solution approchée.

Pour la composante A, il existe $f_A^{r,\mu}$ vérifiant

$$\xi \frac{\partial}{\partial x} f_A^{r,\mu}(x,v) = \int_{\mathbb{R}_v^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^r B_\mu(v - v_*,\omega) f_A^{r,\mu}(x,v') f^{r,\mu}(x,v_*') dv_* d\omega$$
$$- f_A^{r,\mu}(x,v) \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}^2} \chi^r B_\mu(v - v_*,\omega) f^{r,\mu}(x,v_*) dv_* d\omega$$
$$f_A^{r,\mu}(-1,v) = k_A^{r,\mu} M_-(v), \quad \xi > 0,$$
$$f_A^{r,\mu}(1,v) = k_A^{r,\mu} M_+(v), \quad \xi < 0,$$

$$\int min(\mu,(1+|v|)^\beta) f_A^{r,\mu}(x,v) dxdv = 1.$$

Solution Approchée.

Pour la composante B, il existe $f_B^{r,\mu}$ vérifiant

$$\xi \frac{\partial}{\partial x} f_B^{r,\mu}(x,v) = \int_{\mathbb{R}^3_{v_*}\times\mathbb{S}^2} \chi^r B_\mu(v-v_*,\omega) f_B^{r,\mu}(x,v') f^{r,\mu}(x,v_*') dv_\star d\omega$$

$$-f_B^{r,\mu}(x,v) \int_{\mathbb{R}^3_{v_*}\times\mathbb{S}^2} \chi^r B_\mu(v-v_*,\omega) f^{r,\mu}(x,v_*) dv_* d\omega,$$

$$f_B^{r,\mu}(-1,v) = M_-(v) \int_{\xi<0} |\xi| f_B^{r,\mu}(-1,v) dv, \quad \xi > 0,$$

$$f_B^{r,\mu}(1,v) = M_+(v) \int_{\xi>0} \xi f_B^{r,\mu}(1,v) dv, \quad \xi < 0,$$

$$\int min(\mu,(1+|v|)^\beta) f_B^{r,\mu}(x,v) dx dv = 1.$$

Solution Approchée.

Pour la composante B, il existe $f_B^{r,\mu}$ vérifiant

$$\xi \frac{\partial}{\partial x} f_B^{r,\mu}(x,v) = \int_{\mathbb{R}^3_{v_*}\times\mathbb{S}^2} \chi^r B_\mu(v - v_*,\omega) f_B^{r,\mu}(x,v') f^{r,\mu}(x,v_*^{'}) dv_\star d\omega$$
$$- f_B^{r,\mu}(x,v) \int_{\mathbb{R}^3_{v_*}\times\mathbb{S}^2} \chi^r B_\mu(v - v_*,\omega) f^{r,\mu}(x,v_*) dv_* d\omega,$$
$$f_B^{r,\mu}(-1,v) = M_-(v) \int_{\xi<0} |\xi| f_B^{r,\mu}(-1,v) dv, \quad \xi > 0,$$
$$f_B^{r,\mu}(1,v) = M_+(v) \int_{\xi>0} \xi f_B^{r,\mu}(1,v) dv, \quad \xi < 0,$$

$$\int min(\mu,(1+|v|)^\beta) f_B^{r,\mu}(x,v) dx dv = 1.$$

Le problème de trace.

La trace est définie par

$$f_B(1,v) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^{\varepsilon_0} f_B(1-\varepsilon,v)d\varepsilon$$

$$f_B(-1,v) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^{\varepsilon_0} f_B(-1+\varepsilon,v)d\varepsilon.$$

Contrôle des flux.

Le contrôle des flux

$$\int_{\xi>0} \xi f_B^j(1,v)dv \text{ et } \int_{\xi<0} |\xi| f_B^j(-1,v)dv$$

et des termes

$$\int_{\xi>0} \xi f_B^j(1,v) log f_B^j(1,v)dv \text{ et } \int_{\xi<0} |\xi| f_B^j(-1,v) log f_B^j(-1,v)dv$$

entraîne la compacité $L^1_{|\xi|}$ faible de $f_B^j(1,.)$ et $f_B^j(-1,.)$.

Identification

On identifie la trace de la limite et la limite de la trace. D'après la formule de Green,

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3_v}\int_0^{\varepsilon_0}\xi(f_B^j(1,v)-f_B^j(1-\epsilon,v))\varphi_2(v)dvd\varepsilon\right| \\
&\qquad \leq \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^{\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3_v}\int_{1-\varepsilon_0}^{1}|Q_j(f_B^j,f^j)(x,v)\varphi(x,v)|dxdvd\varepsilon \\
&\qquad +\frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^{\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3_v}\int_{1-\varepsilon_0}^{1}|f_B^j(x,v)\xi\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,v)|dxdvd\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Par passage à la limite $j\to+\infty$ et $\varepsilon_0\to 0$,

$$
\begin{aligned}
f_B^j(1,.) &\to f_B(1,.) \text{ dans } L^1_{|\xi|}(\{v\in\mathbb{R}^3_v,\xi>0\}),\\
f_B^j(-1,.) &\to f_B(-1,.) \text{ dans } L^1_{|\xi|}(\{v\in\mathbb{R}^3_v,\xi<0\}).
\end{aligned}
$$

Identification

On identifie la trace de la limite et la limite de la trace. D'après la formule de Green,

$$
\begin{aligned}
&|\frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3_v}\int_0^{\varepsilon_0}\xi(f_B^j(1,v)-f_B^j(1-\epsilon,v))\varphi_2(v)dvd\varepsilon| \\
&\qquad\qquad \leq \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^{\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3_v}\int_{1-\varepsilon_0}^{1}|Q_j(f_B^j,f^j)(x,v)\varphi(x,v)|dxdvd\varepsilon \\
&\qquad\qquad +\frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^{\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3_v}\int_{1-\varepsilon_0}^{1}|f_B^j(x,v)\xi\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,v)|dxdvd\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Par passage à la limite $j\to+\infty$ et $\varepsilon_0\to 0$,

$$
\begin{aligned}
f_B^j(1,.) &\to f_B(1,.) \text{ dans } L^1_{|\xi|}(\{v\in\mathbb{R}^3_v,\xi>0\}),\\
f_B^j(-1,.) &\to f_B(-1,.) \text{ dans } L^1_{|\xi|}(\{v\in\mathbb{R}^3_v,\xi<0\}).
\end{aligned}
$$

Effet fantôme pour un système cinétique pour un gaz à deux composantes.

Le problème étudié.

$$\begin{aligned}
\xi \frac{\partial}{\partial x} f^A(x,v) &= \frac{1}{\varepsilon} Q(f^A,f^A)(x,v) + \frac{1}{\varepsilon} Q(f^A,f^B)(x,v), \\
\xi \frac{\partial}{\partial x} f^B(x,v) &= \frac{1}{\varepsilon} Q(f^B,f^A)(x,v) + \frac{1}{\varepsilon} Q(f^B,f^B)(x,v), \\
& \qquad x \in [-1,1], \quad v \in \mathbb{R}^3,
\end{aligned} \tag{1}$$

avec

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{\pi}}{2} K_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{l}{2} \quad \text{et} \quad l = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n_l}.$$

Conditions de bord pour la composante A

$$f^A(-1,v) = M_-(v), \quad \xi > 0, \quad f^A(1,v) = \frac{n_{II}}{n_I} M_+(v), \quad \xi < 0.$$

où M_- et M_+ sont les fonctions maxwelliennes normalisées suivantes

$$M_-(v) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \exp(-v^2) \quad \text{et} \quad M_+(v) = \left(\frac{1}{\pi(\frac{T_{II}}{T_I})^2}\right)^{\frac{3}{2}} \exp(-\frac{v^2}{\frac{T_{II}}{T_I}}).$$

Conditions de bord pour la composante A

$$f^A(-1,v) = M_-(v), \quad \xi > 0, \quad f^A(1,v) = \frac{n_{II}}{n_I} M_+(v), \quad \xi < 0.$$

où M_- et M_+ sont les fonctions maxwelliennes normalisées suivantes

$$M_-(v) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \exp(-v^2) \quad \text{et} \quad M_+(v) = \left(\frac{1}{\pi(\frac{T_{II}}{T_I})^2}\right)^{\frac{3}{2}} \exp(-\frac{v^2}{\frac{T_{II}}{T_I}}).$$

Conditions de bord pour la composante A

$$f^A(-1,v) = M_-(v), \quad \xi > 0, \quad f^A(1,v) = \frac{n_{II}}{n_I} M_+(v), \quad \xi < 0.$$

où M_- et M_+ sont les fonctions maxwelliennes normalisées suivantes

$$M_-(v) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \exp(-v^2) \quad \text{et} \quad M_+(v) = \left(\frac{1}{\pi(\frac{T_{II}}{T_I})^2}\right)^{\frac{3}{2}} \exp(-\frac{v^2}{\frac{T_{II}}{T_I}}).$$

Conditions de bord pour la composante B.

$$f^B(-1,v) = \sqrt{\pi} M_-(v) \int_{\xi'<0} |\xi'| f^B(-1,v') dv', \quad \xi > 0,$$

$$f^B(1,v) = \sqrt{\frac{\pi}{\frac{T_{II}}{T_I}}} M_+(v) \int_{\xi'>0} |\xi'| f^B(1,v') dv', \quad \xi < 0,$$

Pour tout $m > 0$, on impose

$$\int_{-1}^{1} \int_{\mathbb{R}^3} f^B(x,v) dx dv = m.$$

Conditions de bord pour la composante B.

$$f^B(-1,v) = \sqrt{\pi} M_{-}(v) \int_{\xi'<0} |\xi'| f^B(-1,v')dv', \quad \xi > 0,$$

$$f^B(1,v) = \sqrt{\frac{\pi}{\frac{T_{II}}{T_I}}} M_{+}(v) \int_{\xi'>0} |\xi'| f^B(1,v')dv', \quad \xi < 0,$$

Pour tout $m > 0$, on impose

$$\int_{-1}^{1} \int_{\mathbb{R}^3} f^B(x,v)dxdv = m.$$

Quantités macroscopiques.

$$n = \int_{\mathbb{R}_v^3} f dv, \quad nu = \int_{\mathbb{R}_v^3} v f dv, \quad nu_1 = \int_{\mathbb{R}_v^3} \xi f dv,$$

$$p = Tn = \frac{2}{3} \int_{\mathbb{R}_v^3} \left((\xi - u_{1,H})^2 + \eta^2 + \chi^2 \right) f dv.$$

Développement de Hilbert.

On développe f_H^A et f_H^B en séries de Hilbert selon ε

$$\begin{aligned} f_H^A(x,v) &= f_{H0}^A(x,v) + \varepsilon f_{H1}^A(x,v) + \cdots , \\ f_H^B(x,v) &= f_{H0}^B(x,v) + \varepsilon f_{H1}^B(x,v) + \cdots . \end{aligned}$$

Puis on injecte f_H^A et f_H^B dans l'équation (1).

Développement de Hilbert.

On développe f_H^A et f_H^B en séries de Hilbert selon ε

$$\begin{aligned} f_H^A(x,v) &= f_{H0}^A(x,v) + \varepsilon f_{H1}^A(x,v) + \cdots , \\ f_H^B(x,v) &= f_{H0}^B(x,v) + \varepsilon f_{H1}^B(x,v) + \cdots . \end{aligned}$$

Puis on injecte f_H^A et f_H^B dans l'équation (1).

Termes de Hilbert-Quantités macroscopiques.

$$\int_{\mathbb{R}^3_v} f^\alpha_{Hm} dv = n^\alpha_{Hm} \quad (m = 0,1\cdots), \qquad \int_{\mathbb{R}^3_v} \xi f_{H0} dv = n_{H0} u_{1,H0},$$

$$\int_{\mathbb{R}^3_v} \xi f^\alpha_{H0} dv = n^\alpha_{H0} u^\alpha_{1,H0}, \int_{\mathbb{R}^3_v} \xi^2 f^\alpha_{H0} dv, \quad = \frac{1}{2}\left(n^\alpha_{H0} T^\alpha_{H0}\right),$$

$$\int_{\mathbb{R}^3_v} v^2 f^\alpha_{H0} dv = n^\alpha_{H0} |u^\alpha_{1,H0}|^2 + \frac{3}{2} p^\alpha_{H0}, \int_{\mathbb{R}^3_v} \xi f^\alpha_{H1} dv = n^\alpha_{H0} u^\alpha_{1,H1} + n^\alpha_{H1} u^\alpha_{1,H0},$$

$$\int_{\mathbb{R}^3_v} v^2 f^\alpha_{H1} dv = \frac{3}{2}(n^\alpha_{H0} T^\alpha_{H1} + n^\alpha_{H1} T^\alpha_{H0}) + 2 n^\alpha_{H0} u^\alpha_{1,H0} u^\alpha_{1,H1} + 2 n^\alpha_{H0} |u^\alpha_{1,H0}|^2.$$

Expression de f^A_{H0} et f^B_{H0}.

En identifiant les termes d'ordre -1

$$Q(f^A_{H0},f^A_{H0}) + Q(f^A_{H0},f^B_{H0}) = 0, \quad (2)$$
$$Q(f^B_{H0},f^A_{H0}) + Q(f^B_{H0},f^B_{H0}) = 0. \quad (3)$$

Lemme

Les solutions du système (2-3) sont

$$f^A_{H0}(x,v) = \frac{n^A_{H0}}{\pi^{\frac{3}{2}}(T_{H0})^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{((\xi - u_{1,H0})^2 + \eta^2 + \chi^2)}{T_{H0}}\right),$$
$$f^B_{H0}(x,v) = \frac{n^B_{H0}}{\pi^{\frac{3}{2}}(T_{H0})^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{((\xi - u_{1,H0})^2 + \eta^2 + \chi^2)}{T_{H0}}\right),$$

où $(n^A_{H0}, n^B_{H0}, T_{H0}$ *et* $u_{1,H0}) \in \mathbb{R}^{*3}_+ \times \mathbb{R}$. [Aoki-Bardos-Takata,2003]

Expression de f^A_{H0} et f^B_{H0}.

En identifiant les termes d'ordre -1

$$Q(f^A_{H0}, f^A_{H0}) + Q(f^A_{H0}, f^B_{H0}) = 0, \tag{2}$$
$$Q(f^B_{H0}, f^A_{H0}) + Q(f^B_{H0}, f^B_{H0}) = 0. \tag{3}$$

Lemme

Les solutions du système (2-3) sont

$$f^A_{H0}(x,v) = \frac{n^A_{H0}}{\pi^{\frac{3}{2}}(T_{H0})^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{\left((\xi - u_{1,H0})^2 + \eta^2 + \chi^2\right)}{T_{H0}}\right),$$
$$f^B_{H0}(x,v) = \frac{n^B_{H0}}{\pi^{\frac{3}{2}}(T_{H0})^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{\left((\xi - u_{1,H0})^2 + \eta^2 + \chi^2\right)}{T_{H0}}\right),$$

où $(n^A_{H0}, n^B_{H0}, T_{H0}$ *et* $u_{1,H0}) \in \mathbb{R}_+^{*3} \times \mathbb{R}$. *[Aoki-Bardos-Takata,2003]*

Situation étudiée.

Identification des termes d'ordre 0 pour la composante B.

$$\xi \frac{\partial}{\partial x} f_{H0}^B = Q(f_{H1}^B, f_{H0}^A) + Q(f_{H0}^B, f_{H1}^A) + Q(f_{H1}^B, f_{H0}^B) + Q(f_{H0}^B, f_{H1}^B). \tag{4}$$

$$\int_{\mathbb{R}_v^3} (4) \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x} \int_{\mathbb{R}_v^3} \xi f_{H0}^B(x,v)dv = 0.$$

$$n_{H0}^B(x) u_{1,H0}^B(x) = 0, \quad x \in [-1,1].$$

Parmi toutes les situations représentées, on considère les deux cas suivants:

$$\rightarrow u_{1,H0}^B \equiv 0 \text{ et } n_{H0}^B \neq 0 \qquad [Takata - Aoki, 1999]$$

et

$$n_{H0}^B \equiv 0 \text{ et } u_{1,H0}^A \neq 0. \qquad [Aoki - Takata - Tagushi, 2003].$$

Situation étudiée.

Identification des termes d'ordre 0 pour la composante B.

$$\xi \frac{\partial}{\partial x} f^B_{H0} = Q(f^B_{H1}, f^A_{H0}) + Q(f^B_{H0}, f^A_{H1}) + Q(f^B_{H1}, f^B_{H0}) + Q(f^B_{H0}, f^B_{H1}). \quad (4)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3_v} (4) \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x} \int_{\mathbb{R}^3_v} \xi f^B_{H0}(x,v) dv = 0.$$

$$n^B_{H0}(x) u^B_{1,H0}(x) = 0, \quad x \in [-1,1].$$

Parmi toutes les situations représentées, on considère les deux cas suivants:

$$\rightarrow u^B_{1,H0} \equiv 0 \text{ et } n^B_{H0} \neq 0 \qquad [\mathit{Takata} - \mathit{Aoki}, 1999]$$

et

$$n^B_{H0} \equiv 0 \text{ et } u^A_{1,H0} \neq 0. \qquad [\mathit{Aoki} - \mathit{Takata} - \mathit{Tagushi}, 2003].$$

Situation étudiée.

Identification des termes d'ordre 0 pour la composante B.

$$\xi \frac{\partial}{\partial x} f^B_{H0} = Q(f^B_{H1}, f^A_{H0}) + Q(f^B_{H0}, f^A_{H1}) + Q(f^B_{H1}, f^B_{H0}) + Q(f^B_{H0}, f^B_{H1}). \tag{4}$$

$$\int_{\mathbb{R}^3_v} (4) \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x} \int_{\mathbb{R}^3_v} \xi f^B_{H0}(x,v) dv = 0.$$

$$n^B_{H0}(x) u^B_{1,H0}(x) = 0, \quad x \in [-1,1].$$

Parmi toutes les situations représentées, on considère les deux cas suivants:

$$\to u^B_{1,H0} \equiv 0 \text{ et } n^B_{H0} \neq 0 \qquad [Takata - Aoki, 1999]$$

et

$$n^B_{H0} \equiv 0 \text{ et } u^A_{1,H0} \neq 0. \qquad [Aoki - Takata - Tagushi, 2003].$$

Equations d'ordre 1.

Trouver f_{H1} tel que

$$\xi \frac{\partial}{\partial x} f_{H0} = Q(f_{H1}, f_{H0}) + Q(f_{H0}, f_{H1}),$$

Trouver (f_{H1}^A, f_{H1}^B) tel que

$$\begin{aligned} \xi \frac{\partial}{\partial x} f_{H0}^A &= Q(f_{H0}^A, f_{H1}) + Q(f_{H1}^A, f_{H0}) \\ \xi \frac{\partial}{\partial x} f_{H0}^B &= Q(f_{H0}^B, f_{H1}) + Q(f_{H1}^B, f_{H0}), \end{aligned}$$

où $f_{H1} = f_{H1}^A + f_{H1}^B$.

Equations d'ordre 1.

Trouver f_{H1} tel que

$$\xi \frac{\partial}{\partial x} f_{H0} = Q(f_{H1}, f_{H0}) + Q(f_{H0}, f_{H1}),$$

Trouver (f_{H1}^A, f_{H1}^B) tel que

$$\begin{aligned} \xi \frac{\partial}{\partial x} f_{H0}^A &= Q(f_{H0}^A, f_{H1}) + Q(f_{H1}^A, f_{H0}) \\ \xi \frac{\partial}{\partial x} f_{H0}^B &= Q(f_{H0}^B, f_{H1}) + Q(f_{H1}^B, f_{H0}), \end{aligned}$$

où $f_{H1} = f_{H1}^A + f_{H1}^B$.

Expression de f_{H1}, f^A_{H1} et f^B_{H1}.

f_{H1}, f^A_{H1} et f^B_{H1} s'écrivent

$$f_{H1} = \left(\frac{n_{H1}}{n_{H0}} + \frac{2u_{1,H1}}{T_{H0}}\xi + (\frac{v^2}{T_{H0}} - \frac{3}{2})\frac{T_{H1}}{T_{H0}} - \frac{\tilde{\xi} A(|\tilde{v}|)}{p_{H0}} \frac{\partial}{\partial x} T_{H0} \right) f_{H0}.$$

$$f^A_{H1} = f^A_{H0}\left(\frac{n^A_{H1}}{n^A_{H0}} + 2\xi\frac{u_{1,H1}}{T_{H0}} + (\frac{v^2}{T_{H0}} - \frac{3}{2})\frac{T_{H1}}{T_{H0}} - \frac{\tilde{\xi} A(|\tilde{v}|)}{p_{H0}} \frac{\partial}{\partial x} T_{H0} - \frac{\tilde{\xi} C(\tilde{v})}{n_{H0} p^A_{H0}} \frac{\partial}{\partial x} p^A_{H0} \right).$$

$$f^B_{H1} = f^B_{H0}\left(\frac{n^B_{H1}}{n^B_{H0}} + 2\xi\frac{u_{1,H1}}{T_{H0}} + (\frac{v^2}{T_{H0}} - \frac{3}{2})\frac{T_{H1}}{T_{H0}} - \frac{\tilde{\xi} A(|\tilde{v}|)}{p_{H0}} \frac{\partial}{\partial x} T_{H0} - \frac{\tilde{\xi} C(\tilde{v})}{n_{H0} p^B_{H0}} \frac{\partial}{\partial x} p^B_{H0} \right).$$

Equations fluides à l'ordre 1.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} p_{H0} &= 0, \\
\frac{\partial}{\partial x}(n_{H0} u_{1,H1}) &= 0, \\
\frac{\gamma_2}{2} \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial}{\partial x}(T_{H0}) T_{H0}^{\frac{1}{2}}\Big) &= -n_{H0} u_{1,H1} \frac{\partial}{\partial x} T_{H0}, \\
u_{1,H1} &= -\gamma_c \frac{T_{H0}^{\frac{1}{2}}}{p_{H0}^B n_{H0}} \frac{\partial}{\partial x} p_{H0}^A, \\
u_{H1}^B &= 0,
\end{aligned}$$

où $p_{H0} = n_{H0} T_{H0}$, $p_{H0}^A = n_{H0}^A T_{H0}$ et $p_{H0}^B = n_{H0}^B T_{H0}$.
Ghost effects.
[Sone-Aoki-Takata-Sugimoto, 1996] $\rightarrow$ 1 composante.
[Aoki-Takata-Kosuge, 1998], [Aoki-Takata, 1999] $\rightarrow$ 2 composantes.

Equations fluides à l'ordre 1.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} p_{H0} &= 0, \\
\frac{\partial}{\partial x}\left(n_{H0} u_{1,H1}\right) &= 0, \\
\frac{\gamma_2}{2} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}(T_{H0}) T_{H0}^{\frac{1}{2}}\right) &= -n_{H0} u_{1,H1} \frac{\partial}{\partial x} T_{H0}, \\
u_{1,H1} &= -\gamma_c \frac{T_{H0}^{\frac{1}{2}}}{p_{H0}^B n_{H0}} \frac{\partial}{\partial x} p_{H0}^A, \\
u_{H1}^B &= 0,
\end{aligned}
$$

où $p_{H0} = n_{H0} T_{H0}$, $p_{H0}^A = n_{H0}^A T_{H0}$ et $p_{H0}^B = n_{H0}^B T_{H0}$.
Ghost effects.
[Sone-Aoki-Takata-Sugimoto, 1996] $\rightarrow$ 1 composante.
[Aoki-Takata-Kosuge, 1998], [Aoki-Takata, 1999] $\rightarrow$ 2 composantes.

Résolution du système.

On se restreint à des conditions aux limites pour f^A données par

$$f^A(-1,v) = M_-(v), \;\; \xi > 0 \quad f^A(1,v) = M_+(v), \;\; \xi < 0,$$

où $\frac{n_{II}}{n_I} = 1 + \tau$ avec τ suffisamment petit.

On impose la contrainte suivante sur la masse de la composante B,

$$\int_{-1}^{1} n_{H0}^B dx = m.$$

Lemme

Il existe τ_0 et il existe $\lambda > 0$ tel que pour tout $\tau \in \mathbb{R}$ satisfaisant $|\tau| \leq \tau_0$ et tout $m > 0$, le système possède une solution vérifiant les conditions de bord

$$n_{H0}^A(-1) = 1, \qquad T_{H0}(-1) = 1, \qquad n_{H0}^A(1) = 1 + \tau, \qquad |T_{H0}(1) - 1| \leq \lambda\tau,$$

et la contrainte sur n_{H0}^B

$$\int_{-1}^{1} n_{H0}^B dx = m,$$

Résolution du système.

On se restreint à des conditions aux limites pour f^A données par

$$f^A(-1,v) = M_-(v), \;\; \xi > 0 \quad f^A(1,v) = M_+(v), \;\; \xi < 0,$$

où $\frac{n_{II}}{n_I} = 1 + \tau$ avec τ suffisamment petit.
On impose la contrainte suivante sur la masse de la composante B,

$$\int_{-1}^{1} n^B_{H0} dx = m.$$

Lemme

Il existe τ_0 et il existe $\lambda > 0$ tel que pour tout $\tau \in \mathbb{R}$ satisfaisant $|\tau| \leq \tau_0$ et tout $m > 0$, le système possède une solution vérifiant les conditions de bord

$$n^A_{H0}(-1) = 1, \qquad T_{H0}(-1) = 1, \qquad n^A_{H0}(1) = 1 + \tau, \qquad |T_{H0}(1) - 1| \leq \lambda\tau,$$

et la contrainte sur n^B_{H0}

$$\int_{-1}^{1} n^B_{H0} dx = m,$$

Résolution du système.

On se restreint à des conditions aux limites pour f^A données par

$$f^A(-1,v) = M_-(v), \;\; \xi > 0 \quad f^A(1,v) = M_+(v), \;\; \xi < 0,$$

où $\frac{n_{II}}{n_I} = 1 + \tau$ avec τ suffisamment petit.
On impose la contrainte suivante sur la masse de la composante B,

$$\int_{-1}^{1} n_{H0}^B dx = m.$$

Lemme

Il existe τ_0 et il existe $\lambda > 0$ tel que pour tout $\tau \in \mathbb{R}$ satisfaisant $|\tau| \leq \tau_0$ et tout $m > 0$, le système possède une solution vérifiant les conditions de bord

$$n_{H0}^A(-1) = 1, \qquad T_{H0}(-1) = 1, \qquad n_{H0}^A(1) = 1 + \tau, \qquad |T_{H0}(1) - 1| \leq \lambda\tau,$$

et la contrainte sur n_{H0}^B

$$\int_{-1}^{1} n_{H0}^B dx = m,$$

Couche de Knudsen à l'ordre 1.

Afin de satisfaire $f_1^A(-1,v) = f_1^B(-1,v) = 0$ et $f_1^A(1,v) = f_1^B(1,v) = 0$, on rajoute des termes de Knudsen à chacun des deux bords.

Soit

$$x' = \frac{1+x}{\epsilon} \quad \text{et} \quad x'' = \frac{1-x}{\epsilon}.$$

$$\begin{aligned}
f_1(x,v) &= f_{H1}(x,v) + f_{K1}^{-}(x',v) + f_{K1}^{+}(x'',v), \\
f_1^A(x,v) &= f_{H1}^A(x,v) + f_{K1}^{A-}(x',v) + \mathbf{f}_{K1}^{A+}(x'',v), \\
f_1^B(x,v) &= f_{H1}^B(x,v) + f_{K1}^{B-}(x',v) + f_{K1}^{B+}(x'',v).
\end{aligned}$$

Couche de Knudsen à l'ordre 1.

Afin de satisfaire $f_1^A(-1,v) = f_1^B(-1,v) = 0$ et $f_1^A(1,v) = f_1^B(1,v) = 0$, on rajoute des termes de Knudsen à chacun des deux bords.
Soit

$$x' = \frac{1+x}{\epsilon} \quad \text{et} \quad x'' = \frac{1-x}{\epsilon}.$$

$$\begin{aligned}
f_1(x,v) &= f_{H1}(x,v) + f_{K1}^{-}(x',v) + f_{K1}^{+}(x'',v), \\
f_1^A(x,v) &= f_{H1}^A(x,v) + f_{K1}^{A-}(x',v) + \mathbf{f}_{K1}^{A+}(x'',v), \\
f_1^B(x,v) &= f_{H1}^B(x,v) + f_{K1}^{B-}(x',v) + f_{K1}^{B+}(x'',v).
\end{aligned}$$

Problème de Milne en –1.

On pose $M = f_{H0}$, $M^A = f_{H0}^A$ et $M^B = f_{H0}^B$.

Proposition

Il existe des conditions de bord en -1 pour les termes de Hilbert du premier ordre f_{H1}^A et f_{H1}^B et des termes de Knudsen $f_{K1}^{A-}(x',v)$ et $f_{K1}^{B-}(x',v)$, tels que

$$\begin{aligned}
\xi \frac{\partial}{\partial x'} f_{K1}^{A-}(x',v) &= Q(M^A(-1,v), f_{K1}^{-}(x',v)) + Q(f_{K1}^{A-}(x',v), M(-1,v)),\\
\xi \frac{\partial}{\partial x'} f_{K1}^{B-}(x',v) &= Q(M^B(-1,v), f_{K1}^{-}(x',v)) + Q(f_{K1}^{B-}(x',v), M(-1,v)),
\end{aligned}$$

où $M = M^A + M^B$ et $f_{K1}^{-} = f_{K1}^{A-} + f_{K1}^{B-}$.

[Aoki-Bardos-Takata, 2003] $\longrightarrow$ 2 composantes.
[Bardos-Caflish-Nicolaenko, 1986] $\longrightarrow$ 1 composante.

Développement asymptotique.

Le terme reste $\varepsilon^3 f_R^A$ (resp. $\varepsilon^3 f_R^B$) pour f^A (resp. f^B) est défini comme la différence de f^A (resp. f^B) et de son développement asymptotique, de la façon suivante:

$$
\begin{aligned}
f^A(x,v) &= f_{H0}^A + \varepsilon\Big(f_{H1}^A(x,v) + f_{K1}^{A-}(\frac{1+x}{\varepsilon},v) + f_{K1}^{A+}(\frac{1-x}{\varepsilon},v)\Big)\\
&+ \varepsilon^2\Big(f_{H2}^A(x,v) + f_{K2}^{A-}(\frac{1+x}{\varepsilon},v) + f_{K2}^{A+}(\frac{1-x}{\varepsilon},v)\Big)\\
&+ \varepsilon^3 f_R^A(x,v),\\
f^B(x,v) &= f_{H0}^B + \varepsilon\left(f_{H1}^B(x,v) + f_{K1}^{B-}(\frac{1+x}{\varepsilon},v) + f_{K1}^{B+}(\frac{1-x}{\varepsilon},v)\right)\\
&+ \varepsilon^2\Big(f_{H2}^B(x,v) + f_{K2}^{B-}(\frac{1+x}{\varepsilon},v) + f_{K2}^{B+}(\frac{1-x}{\varepsilon},v)\Big)\\
&+ \varepsilon^3 f_R^B(x,v).
\end{aligned}
$$

Contrôle du terme reste.

Théorème

Pour n_{II} assez proche de n_I, pour certains T_{II} assez proche de T_I et ε assez petit, il existe une solution (f^A, f^B) de la forme

$$(f^A, f^B) = (f^A_{H0} + \varepsilon f^A_1 + \varepsilon^2 f^A_2 + \varepsilon^3 f^A_R, f^B_{H0} + \varepsilon f^B_1 + \varepsilon^2 f^B_2 + \varepsilon^3 f^B_R)$$

où

$$\|f^A_R\|_\infty + \|f^B_R\|_\infty \leq c\varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$

Problème non linéaire.

On effectue ensuite le changement d'inconnues suivant:

$$f_R^A = R^A, \quad f_R^B = I(R^B)M^B + R^B, \quad \text{avec} \quad I(R) = -\frac{1}{m}\int R\,dxdv.$$

$$\begin{aligned}
\xi\frac{\partial}{\partial x}R^A &= \frac{1}{\varepsilon}\Big(Q(M^A,R) + Q(R^A,M)\Big) + \mathcal{N}_A(R) + \widetilde{\mathcal{N}}_{A*}(R^A,R^B) \\
&+ \varepsilon^2\bigg(Q(R^A,R) + I(R^B)Q(R^A,M^B) + \varepsilon A\bigg),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi\frac{\partial}{\partial x}R^B &= \frac{1}{\varepsilon}\Big(Q(M^B,R) + Q(R^B,M)\Big) + \mathcal{N}_B(R,R^B) \\
&+ \varepsilon^2\bigg(I(R^B)\Big(Q(M^B,R) + Q(R^B,M^B)\Big) + Q(R^B,R) + \varepsilon B\bigg).
\end{aligned}$$

Problème linéarisé.

$$
\begin{aligned}
\xi \frac{\partial}{\partial x} R^A &= \frac{1}{\varepsilon}\Big(Q(M^A,R) + Q(R^A,M)\Big) + \mathcal{N}_A(R) + \tilde{\mathcal{N}}_{A*}(R^A,R^B) \\
&+ \varepsilon^2 d^A,
\end{aligned}
$$

$$
\xi \frac{\partial}{\partial x} R^B = \frac{1}{\varepsilon}\Big(Q(M^B,R) + Q(R^B,M)\Big) + \mathcal{N}_B(R,R^B) + \varepsilon^2 d^B.
$$

Décomposition du terme reste.

$f \mapsto Q(M,f) \longleftrightarrow f \mapsto -\frac{2}{M} Q(M, M^{-\frac{1}{2}} f)$.

M dépend des variables x et t, $\longrightarrow$ $M^{-\frac{1}{2}} \xi \frac{\partial}{\partial x}(M^{\frac{1}{2}} f) \sim |v|^3 f$ et ne possède pas de signe.

Cas non stationnaire $\rightarrow$ [Caflish, 1980]

Cas stationnaire $\rightarrow$ [Esposito, Lebowitz, Marra, 1994 , 1995]

On cherche R, R^A et R^B sous la forme:

$$R = \sqrt{M} g + \sqrt{M_*} h, \quad R^A = \sqrt{M^A} g^A + \sqrt{M_*} h^A, \quad R^B = \sqrt{M^B} g^B + \sqrt{M_*} h^B,$$

où M_* est la Maxwellienne globale suivante:

$$M_*(v) = \frac{1}{(\pi T_*)^{\frac{3}{2}}} \exp(-\frac{v^2}{T_*}),$$

avec $T_* > \sup_{x \in [-1,1]} T_{H0}(x)$.

Décomposition du terme reste.

$f \mapsto Q(M,f) \longleftrightarrow f \mapsto -\frac{2}{M} Q(M, M^{-\frac{1}{2}} f)$.

M dépend des variables x et t, $\longrightarrow$ $M^{-\frac{1}{2}} \xi \frac{\partial}{\partial x}(M^{\frac{1}{2}} f) \sim |v|^3 f$ et ne possède pas de signe.

Cas non stationnaire $\rightarrow$ [Caflish, 1980]

Cas stationnaire $\rightarrow$ [Esposito, Lebowitz, Marra, 1994 , 1995]

On cherche R, R^A et R^B sous la forme:

$$R = \sqrt{M} g + \sqrt{M_*} h, \quad R^A = \sqrt{M^A} g^A + \sqrt{M_*} h^A, \quad R^B = \sqrt{M^B} g^B + \sqrt{M_*} h^B,$$

où M_* est la Maxwellienne globale suivante:

$$M_*(v) = \frac{1}{(\pi T_*)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{v^2}{T_*}\right),$$

avec $T_* > \sup_{x \in [-1,1]} T_{H0}(x)$.

Décomposition du terme reste.

$f \mapsto Q(M,f) \longleftrightarrow f \mapsto -\frac{2}{M} Q(M, M^{-\frac{1}{2}} f)$.

M dépend des variables x et t, $\longrightarrow$ $M^{-\frac{1}{2}} \xi \frac{\partial}{\partial x}(M^{\frac{1}{2}} f) \sim |v|^3 f$ et ne possède pas de signe.

Cas non stationnaire $\rightarrow$ [Caflish, 1980]

Cas stationnaire $\rightarrow$ [Esposito, Lebowitz, Marra, 1994 , 1995]

On cherche R, R^A et R^B sous la forme:

$$R = \sqrt{M} g + \sqrt{M_*} h, \quad R^A = \sqrt{M^A} g^A + \sqrt{M_*} h^A, \quad R^B = \sqrt{M^B} g^B + \sqrt{M_*} h^B,$$

où M_* est la Maxwellienne globale suivante:

$$M_*(v) = \frac{1}{(\pi T_*)^{\frac{3}{2}}} \exp(-\frac{v^2}{T_*}),$$

avec $T_* > \sup_{x \in [-1,1]} T_{H0}(x)$.

Parties hydrodynamiques et non hydrodnamiques.

On pose $M = f_{H0}$, $M^A = f^A_{H0}$, $M^B = f^B_{H0}$.
g se décompose en sa partie hydrodynamique $g_1 + \hat{g}$ et non hydrodynamique $\overline{g}$.

$$\mathcal{L} : (\phi_A, \phi_B) \mapsto \Bigg(\frac{1}{\sqrt{M^A}} \Big(Q(M^A, \sqrt{M}\phi) + Q(\sqrt{M^A}\phi_A, M) \Big) , \frac{1}{\sqrt{M^B}} \Big(Q(M^B, \sqrt{M}\phi) + Q(\phi_B \sqrt{M^B}, M) \Big) \Bigg)$$

admet pour noyau

$$\ker \lambda = \Big\{ \Big((\alpha^A + \beta\xi + \gamma v^2)\sqrt{M^A}, (\alpha^B + \beta\xi + \gamma v^2)\sqrt{M^B} \Big),\ \ (\alpha^A, \alpha^B, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2 \Big\}.$$

(g^A, g^B) se décompose en sa partie hydrodynamique $(g^A_1 + \hat{g}^A, g^B_1 + \hat{g}^B)$ et non hydrodynamique $(\overline{g}^A, \overline{g}^B)$.

Parties hydrodynamiques et non hydrodnamiques.

On pose $M = f_{H0}$, $M^A = f^A_{H0}$, $M^B = f^B_{H0}$.
g se décompose en sa partie hydrodynamique $g_1 + \hat{g}$ et non hydrodynamique $\overline{g}$.

$$\mathcal{L} : (\phi_A,\phi_B) \mapsto \Bigg(\frac{1}{\sqrt{M^A}} \Big(Q(M^A, \sqrt{M}\phi) + Q(\sqrt{M^A}\phi_A, M) \Big) , \frac{1}{\sqrt{M^B}} \Big(Q(M^B, \sqrt{M}\phi) + Q(\phi_B\sqrt{M^B}, M) \Big) \Bigg)$$

admet pour noyau

$$\ker \lambda = \Big\{ \Big((\alpha^A + \beta\xi + \gamma v^2)\sqrt{M^A}, (\alpha^B + \beta\xi + \gamma v^2)\sqrt{M^B} \Big), \ \ (\alpha^A, \alpha^B, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2 \Big\}.$$

(g^A, g^B) se décompose en sa partie hydrodynamique $(g^A_1 + \hat{g}^A, g^B_1 + \hat{g}^B)$ et non hydrodynamique $(\overline{g}^A, \overline{g}^B)$.

Parties hydrodynamiques et non hydrodnamiques.

On pose $M = f_{H0}$, $M^A = f_{H0}^A$, $M^B = f_{H0}^B$.
g se décompose en sa partie hydrodynamique $g_1 + \hat{g}$ et non hydrodynamique $\overline{g}$.

$$\mathcal{L} : (\phi_A, \phi_B) \mapsto \left(\frac{1}{\sqrt{M^A}} \left(Q(M^A, \sqrt{M}\phi) + Q(\sqrt{M^A}\phi_A, M) \right) \right.$$
$$\left. , \frac{1}{\sqrt{M^B}} \left(Q(M^B, \sqrt{M}\phi) + Q(\phi_B \sqrt{M^B}, M) \right) \right)$$

admet pour noyau

$$\ker \lambda = \left\{ \left((\alpha^A + \beta\xi + \gamma v^2) \sqrt{M^A}, (\alpha^B + \beta\xi + \gamma v^2) \sqrt{M^B} \right), \ \ (\alpha^A, \alpha^B, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}^2 \right\}.$$

$\left(g^A, g^B \right)$ se décompose en sa partie hydrodynamique $(g_1^A + \hat{g}^A, g_1^B + \hat{g}^B)$ et non hydrodynamique $(\overline{g}^A, \overline{g}^B)$.

Normes utilisées.

Pour contrôler g^A, h^A, g^B et h^B on utilise les normes suivantes

$$||f|| = \left(\int_{[-1,1]\times\mathbb{R}^3} (1+|v|) f^2(x,v) dxdv \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$|f|_r = \sup_{x\in[-1,1]} \sup_{v\in\mathbb{R}^3} (1+|v|)^r |f(x,v)|. \quad r \geq 0.$$

Equations à satisfaire par g^A et h^A.

$$\begin{aligned}
\xi \frac{\partial}{\partial x} g^A + \mu^A \hat{g}^A &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{M^A}} \left(Q(\sqrt{M^A} g^A, M) + Q(M^A, \sqrt{M} g)\right) \\
&+ \frac{1}{\varepsilon} \chi_\gamma \sigma_A^{-1} \Big(K_*^A(h) + K_*^1(h^A)\Big) + L_A^1(\hat{g}, \hat{g}^A) + \tilde{L}_A^1(\hat{g}^B),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi \frac{\partial}{\partial x} h^A + \mu^A \sigma^A (\overline{g}^A + g_1^A) &= \frac{1}{\varepsilon} \overline{\chi}_\gamma K_*^A(h) + \frac{1}{\varepsilon}(-\nu + \overline{\chi}_\gamma K_*^1) h^A \\
&+ N_{A*}\Big(\sigma(g_1 + \overline{g}) + h\Big) \\
&+ \widetilde{N}_*^A(\overline{g}^A + g_1^A) + h^A, \sigma^B(\overline{g}^B + g_1^B) + h^B) \\
&+ \varepsilon^2 d^A.
\end{aligned}$$

Equations à satisfaire par g^B et h^B.

$$\begin{aligned}
\xi \frac{\partial}{\partial x} g^B + \mu^B \hat{g}^B &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{M^B}} (Q(\sqrt{M^B} g^B, M) + Q(M^B, \sqrt{M} g)) \\
&+ \frac{1}{\varepsilon} \chi_\gamma \sigma_B^{-1} \left(K_*^B(h) + K_*^1(h^B) \right) + L_B^1(\hat{g}, \hat{g}^B),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi \frac{\partial}{\partial x} h^B + \mu^B \sigma^B (\overline{g}^B + g_1^B) &= \frac{1}{\varepsilon} \overline{\chi}_\gamma K_*^B(h) + \frac{1}{\varepsilon}(-\nu + \overline{\chi}_\gamma K_*^1) h^B \\
&+ N_{B*}(\sigma(\overline{g} + g_1) + h) \\
&+ \widetilde{N}_*^B(\sigma^B(\overline{g}^B + g_1^B) + h^B) + \varepsilon^2 d^B.
\end{aligned}$$

Contrôle L^2.

Proposition

Il existe $\varepsilon_0 > 0$, τ_0 et $c > 0$ tels que pour $\varepsilon < \varepsilon_0$ et $\tau < \tau_0$,

$$
\begin{aligned}
\|h^A\| + \|h^B\| &\leq c\varepsilon^3 \left(\left\|\frac{d^A}{(1+|v|)}\right\| + \left\|\frac{d^B}{(1+|v|)}\right\|\right) \\
&+ c\sqrt{\varepsilon}\Big(\|h_-^A\| + \|h_+^A\| + \|h_-^B\| + \|h_+^B\|\Big), \\
\|\hat{g}^A\| + \|\hat{g}^B\| &\leq c\varepsilon \left(\left\|\frac{d^A}{(1+|v|)}\right\| + \left\|\frac{d^B}{(1+|v|)}\right\|\right) \\
&+ \frac{c}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}\Big(\|h_-^A\| + \|h_+^A\| + \|h_-^B\| + \|h_+^B\|\Big), \\
\|g_1^A\| + \|g_1^B\| + \|\overline{g}^A\| + \|\overline{g}^B\| &\leq c\varepsilon^2 \left(\left\|\frac{d^A}{(1+|v|)}\right\| + \left\|\frac{d^B}{(1+|v|)}\right\|\right) \\
&+ \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}\Big(\|h_-^A\| + \|h_+^A\| + \|h_-^B\| + \|h_+^B\|\Big).
\end{aligned}
$$

Contrôle L^∞.

Proposition

Pour tout $r \geq 3$, il existe des constantes c et H_γ telles que

$$\begin{aligned}\left(|g^A|_r + |g^B|_r\right) &\leq c\sqrt{\varepsilon}\left(\|\frac{d^A}{(1+|v|)}\| + \|\frac{d^B}{(1+|v|)}\|\right) + cH_\gamma(|h^A|_r + |h^B|_r)\\ &+ \frac{c}{\varepsilon^2}(|h_-^A|_r + |h_+^A|_r + |h_-^B|_r + |h_+^B|_r).\end{aligned}$$

Proposition

Pour tout $r \geq 3$, il existe une constante c telle que,

$$\begin{aligned}|h^A|_r + |h^B|_r &\leq c\varepsilon^{\frac{3}{2}}(\|\frac{d^A}{(1+|v|)}\| + \|\frac{d^B}{(1+|v|)}\|)\\ &+ \varepsilon^3(|\nu^{-1}d^A|_r + |\nu^{-1}d^B|_r)\\ &+ \frac{c}{\varepsilon}(|h_-^A|_r + |h_+^A|_r + |h_-^B|_r + |h_+^B|_r).\end{aligned}$$

Estimation du terme reste du problème linéarisé.

$$|f|_{r,\beta_0} = \sup_{x\in[-1,1]} \sup_{v\in\mathbb{R}^3} (1+|v|)^r |f(x,v)| \exp(\beta_0 v^2),$$

Théorème

Pour tout $r \geq 3$, il existe c, c', ε_0, τ_0 et β_0 tels que pour tous $\varepsilon < \varepsilon_0$, et $\tau < \tau_0$, le problème linéarisé possède une unique solution (R^A, R^B) satisfaisant à l'estimation suivante:

$$|R^A|_{r,\beta_0} + |R^B|_{r,\beta_0} \leq c\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}(|A|_{r,\beta_0} + |B|_{r,\beta_0}) + \exp(-\frac{c'}{\varepsilon})\right).$$

Lemme

$$|A|_{r,\beta_0} + |B|_{r,\beta_0} = \mathcal{O}(\frac{1}{\varepsilon}).$$

Modèle inélastique hydrodynamique pour la diffusion de particules dans un gaz.

L'équation de Boltzmann linéaire inélastique.

Cette équation linéaire décrit l'évolution de la fonction de distribution $f(t,x,v)$ de particules de masse m entrant en collision de façon inélastique avec un fluide donné constitué de particules de masse m_1.

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x,v) + v \cdot \nabla_x f(t,x,v) = Q(f,M_1)(t,x,v).$$

$Q(f,M_1)$ est défini par

$$Q(f,M_1) = \frac{1}{2\pi\lambda} \int_{\mathbb{R}^3_v \times \mathbb{S}^2} B(v,w,\omega)[\frac{1}{e^2} f(v_*)M_1(w_*) - f(v)M_1(w)]dwd\omega.$$

L'opérateur de collision.

(v_*, w_*) désignent les vitesses précolisionnelles données par

$$\begin{aligned} v_* &= v - 2\alpha \frac{1-\beta}{1-2\beta} \langle v - w.\omega \rangle \omega, \\ w_* &= v + 2(1-\alpha) \frac{1-\beta}{1-2\beta} \langle v - w.\omega \rangle \omega. \end{aligned}$$

où α et β sont des paramètres tels que $0 < \alpha < 1$ et $0 < \beta < \frac{1}{2}$.
Ils sont donnés par les formules

$$\alpha = \frac{m_1}{m_1 + m}, \qquad \beta = \frac{1-e}{2}.$$

$B(v, w, \omega)$ désigne le noyau de collision, λ le libre parcours moyen et $e \in]0,1[$ le coefficient de restitution.

Objectif.

• Dériver un système hydrodynamique pour l'équation de Boltzmann linéaire inélastique qui mette en jeu les équations pour la densité, pour la vitesse macroscopique et la température du polluant.

• Hypothèse B constant.

Etats d'équilibre.

Les états d'équillibre de l'opérateur Q sont les distribution Maxwelliennes proportionnelles à la distribution

$$M^\sharp(v) = \left(\frac{m}{2\,\pi\,RT^\sharp}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{m(v-u_1)^2}{2\,RT^\sharp}\right\}$$

où

$$R = \frac{k_B}{m}, \quad T^\sharp = \frac{(1-\alpha)\,(1-\beta)}{1-\alpha\,(1-\beta)}\,\frac{R_1}{R}\,T_1.$$

[Spiga-Toscani, 2004] $\longrightarrow$ Noyau Maxwellien.
[Lods-Toscani, 2004], $\longrightarrow$ Sphères dures.

choix de f.

On suppose que la fonction de distribution f est une Maxwellienne locale ayant la vitesse et la température du gaz polluant.

$$M(x,v,t) = \frac{\rho(x,t)}{(2\pi RT(x,t))^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{(v-u(x,t))^2}{2RT(x,t)}\right).$$

Le système d'Euler inélastique.

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0, \\[2ex]
\dfrac{\partial}{\partial t} \rho u + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) + \nabla_x (\rho T) = \dfrac{4S\alpha(1-\beta)}{3\lambda} \rho (u_1 - u) \\[2ex]
\dfrac{\partial}{\partial t} \Big(\rho (\dfrac{1}{2} |u|^2 + \dfrac{3}{2} T) \Big) + \nabla \cdot \Big(\rho (\dfrac{1}{2} |u|^2 + \dfrac{5}{2} T) \Big) = \dfrac{4\rho S}{3\lambda} D(x,t)
\end{cases}
$$

Simulations hybrides de Monte-Carlo pour la diffusion d'impuretés dans l'air.

Le modèle.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_i}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\varepsilon_{ij}} Q_{i,j}(f_i, f_j) + \frac{1}{\varepsilon_{ib}} Q_{i,b}(f_i, f_b) \\ \dfrac{\partial f_b}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f_b = \dfrac{1}{\varepsilon_b} Q_{b,b}(f_b, f_b) + \displaystyle\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\varepsilon_{jb}} Q_{j,b}(f_j, f_b), \end{cases}$$

Objectif.

• Simuler l'écoulement d'un polluant en interraction avec un fluide à l'aide d'une méthode TRMC.
[Gabetta-Pareschi-Toscani, 1997] [Pareschi, Trazzi, 2005].

Simplifications du modèle.

On effectue 3 simplifications

- Les polluants sont suffisament raréfiés, par rapport au nombre de molécules du fluide, pour supposer qu'il n'y a pas de collisions entre elles.
- On se restreint au cas où le fluide est homogène en espace.
- On suppose le fluide à l'équilibre thermodynamique, à la température T_b et à la vitesse macroscopique u_b
  Sa fonction de distribution égale à la Maxwellienne normalisée:

$$M_b(v) = \left(\frac{m_b}{2\,\pi\,T_b}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{m_b(v-u_b)^2}{2\,T_b}\right\}, \qquad v \in \mathbb{R}^3.$$

Simplifications du modèle.

On effectue 3 simplifications

- Les polluants sont suffisament raréfiés, par rapport au nombre de molécules du fluide, pour supposer qu'il n'y a pas de collisions entre elles.
- On se restreint au cas où le fluide est homogène en espace.
- On suppose le fluide à l'équilibre thermodynamique, à la température T_b et à la vitesse macroscopique u_b
  Sa fonction de distribution égale à la Maxwellienne normalisée:

$$M_b(v) = \left(\frac{m_b}{2\pi T_b}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{m_b(v-u_b)^2}{2\,T_b}\right\}, \qquad v \in \mathbb{R}^3 .$$

Le système étudié.

Le problème est alors réduit au système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = \dfrac{\delta^2}{2\pi\varepsilon} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} |\langle v - w, \omega \rangle| \left[\dfrac{1}{e^2} f(v_*) f_b(w_*) - f(v) f_b(w) \right] dw d\omega \\ f_b = M_b \end{cases}$$

où $f = f_1$ est la fonction de distribution des particules polluantes, $\delta = \delta_{1b}$ est la distance entre les centres des particules, $e = e_{1b}$ est le coefficient de restitution et $\varepsilon = \varepsilon_{1b}$ est le nombre de Knudsen.

L'équation

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} Q(f,M_b).$$

est alors transformée en

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left[P(f,M_b) - \mu f\right],$$

avec la condition initiale $f(x,v,t=0) = f_0(x,v)$ où $\mu \neq 0$ est une constante et P un opérateur bilinéaire positif.

Sommes de Wild.

Les solutions peuvent s’écrire formellement

$$\begin{cases} f(v,t) = e^{-\mu t/\varepsilon} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - e^{-\mu t/\varepsilon}\right)^k f_k(v) \\ f_{k+1}(v) = \dfrac{1}{k+1} \displaystyle\sum_{h=0}^{k} \dfrac{1}{\mu} P\left(f_h, M_b\right). \end{cases}$$

[Gabetta-Pareschi-Toscani, 1997].

$$f^{n+1}(v) = e^{-\mu\Delta t/\varepsilon}\sum_{k=0}^{m}\left(1 - e^{-\mu\Delta t/\varepsilon}\right)^k f_k^n(v) + \left(1 - e^{-\mu\Delta t/\varepsilon}\right)^{m+1} M^\sharp(v)\,,$$

où $f_0^n = f^n$, $f^n \approx f(n\Delta t)$, Δt étant un petit intervalle de temps

$$M^\sharp(v) = \left(\frac{m}{2\,\pi\,T^\sharp}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{m|v - u_b|^2}{2\,T_i^\sharp}\right\}, \qquad v \in \mathbb{R}^3\,.$$

[Gabetta-Pareschi-Toscani, 1997].

Schéma TRMC1.

$$f^{n+1} = e^{-\mu\Delta t/\varepsilon} f_0^n + e^{-\mu\Delta t/\varepsilon}\left(1 - e^{-\mu\Delta t/\varepsilon}\right) f_1^n + \left(1 - e^{-\mu\Delta t/\varepsilon}\right)^2 M^\sharp$$

où $f_0^n = f^n$ et $f_1^n = \frac{1}{\mu} P(f^n, M_b)$.
Δt représente un petit intervalle de temps et $f^n \approx f(n\Delta t)$.

Méthode de Monte Carlo (DSMC).

$$
\begin{aligned}
f^{n+1} &= \left(1 - \frac{\mu \Delta t}{\varepsilon}\right) f_0^n + \frac{\mu \Delta t}{\varepsilon} \frac{P\left(f^n, M_b\right)}{\mu} \\
&= \left(1 - \frac{\mu \Delta t}{\varepsilon}\right) f_0^n + \frac{\mu \Delta t}{\varepsilon} f_1^n
\end{aligned}
$$

pour la condition *CFL* suivante: $\mu \Delta t / \varepsilon < 1$.

remarque

Le schéma TRMC ne requiert pas de condition CFL car $e^{-\frac{\mu \Delta t}{\varepsilon}} \in [0,1]$.

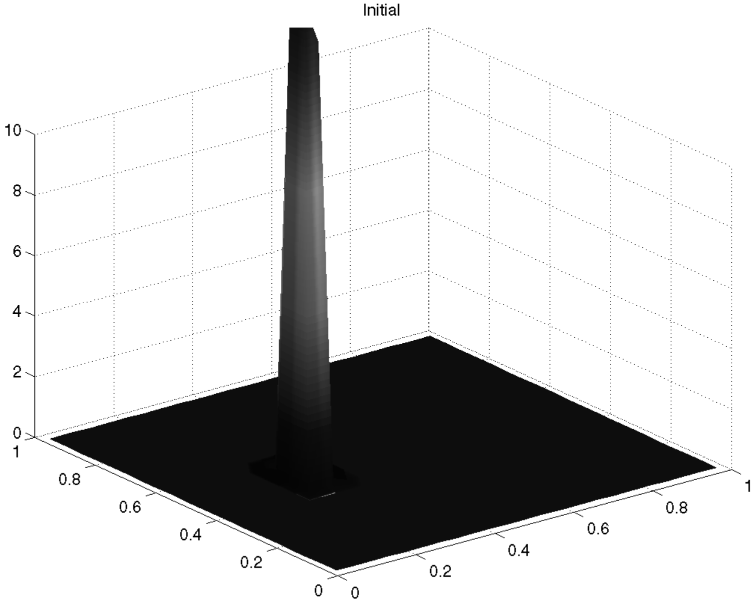


FIG.: Densité initiale de polluant.

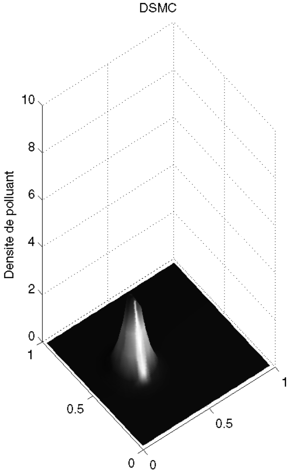
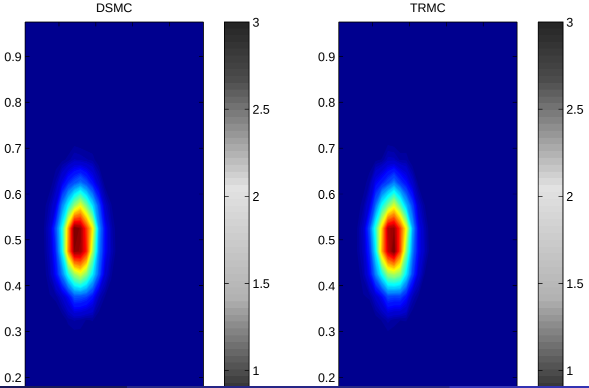


FIG.: Densité de polluant pour $\alpha = 0.01$, $\beta = 0.1$, $t = 0.5s$, $\varepsilon = 1$ pour les schémas DSMC et TRMC.

Vue de dessus.



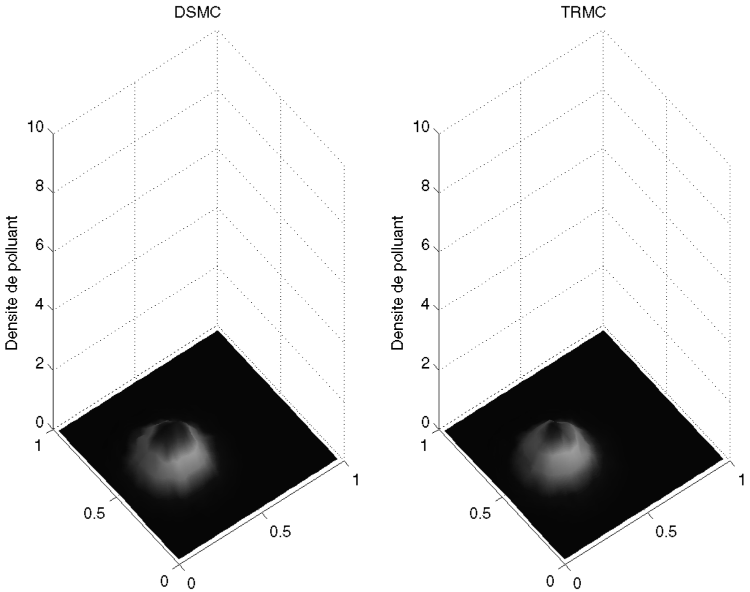
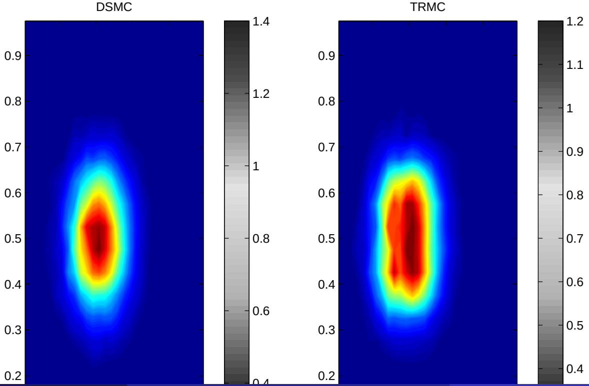


FIG.: Densité de polluant pour $\alpha = 0.01$, $\beta = 0.1$, $t = 0.9s$, $\varepsilon = 1$.

Vue de dessus pour $\alpha = 0.01$, $\beta = 0.1$, $t = 0.8s$, $\varepsilon = 0.1$.



Perspectives.

⟶ Partie I.

• Cas des potentiels mous.

• Cas des masses moléculaires différentes.

⟶ Partie II.

• Cas où le gaz non condensable devient négligeable.

• Cas d'un mélange vapeur-vapeur où chacune des composantes peut se condenser.

⟶ Partie IV .

• Modèle non homogène en espace pour l'air.

• Modèle où les particules de polluant se situent dans un milieu réactif.

Perspectives.

$\longrightarrow$ Partie I.

• Cas des potentiels mous.

• Cas des masses moléculaires différentes.

$\longrightarrow$ Partie II.

• Cas où le gaz non condensable devient négligeable.

• Cas d'un mélange vapeur-vapeur où chacune des composantes peut se condenser.

$\longrightarrow$ Partie IV .

• Modèle non homogène en espace pour l'air.

• Modèle où les particules de polluant se situent dans un milieu réactif.

Perspectives.

⟶ Partie I.

• Cas des potentiels mous.

• Cas des masses moléculaires différentes.

⟶ Partie II.

• Cas où le gaz non condensable devient négligeable.

• Cas d'un mélange vapeur-vapeur où chacune des composantes peut se condenser.

⟶ Partie IV .

• Modèle non homogène en espace pour l'air.

• Modèle où les particules de polluant se situent dans un milieu réactif.

Perspectives.

$\longrightarrow$ Partie I.

• Cas des potentiels mous.

• Cas des masses moléculaires différentes.

$\longrightarrow$ Partie II.

• Cas où le gaz non condensable devient négligeable.

• Cas d'un mélange vapeur-vapeur où chacune des composantes peut se condenser.

$\longrightarrow$ Partie IV .

• Modèle non homogène en espace pour l'air.

• Modèle où les particules de polluant se situent dans un milieu réactif.

Perspectives.

$\longrightarrow$ Partie I.

• Cas des potentiels mous.

• Cas des masses moléculaires différentes.

$\longrightarrow$ Partie II.

• Cas où le gaz non condensable devient négligeable.

• Cas d'un mélange vapeur-vapeur où chacune des composantes peut se condenser.

$\longrightarrow$ Partie IV .

• Modèle non homogène en espace pour l'air.

• Modèle où les particules de polluant se situent dans un milieu réactif.

Perspectives.

$\longrightarrow$ Partie I.

- Cas des potentiels mous.
- Cas des masses moléculaires différentes.

$\longrightarrow$ Partie II.

- Cas où le gaz non condensable devient négligeable.
- Cas d'un mélange vapeur-vapeur où chacune des composantes peut se condenser.

$\longrightarrow$ Partie IV .

- Modèle non homogène en espace pour l'air.
- Modèle où les particules de polluant se situent dans un milieu réactif.