EXERCICE 1.

Dans cet exercice on suppose que $\mathbb{R}^n$ est muni de la norme euclidienne que l'on note $\|.\|$.

1. *Questions de cours*
   (a) *Donner les définitions de partie ouverte et de partie fermée.*
   (b) *Donner les définitions d'intérieur, d'adhérence et de frontière d'une partie A de $\mathbb{R}^n$.*
2. *Pour chacun des ensembles suivants déterminer l'adhérence, l'intérieur et la frontière et préciser s'il est ouvert ou fermé ou ni l'un ni l'autre :*

$$\begin{aligned} A &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } |x|+|y|+|z|<2\right\}; \\ B &= \{(x,1) \text{ tels que } x \in [-2,2]\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } \|(x,y)-(1,1)\|<1\right\}; \\ C &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } |x|+|y| \leq 3\right\} \cap \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } y^2-x^2>1\right\}; \\ D &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x \in]0,1] \text{ et } y=\sin(1/x)\right\}. \end{aligned}$$

- A est le boule unité ouverte pour la norme $|x|+|y|+|z|$. Comme cette norme est équivalente à le norme euclidienne, A est ouvert. La frontière de A est $\{|x|+|y|+|z|=2\}$ et son adhérence est $\{|x|+|y|+|z|\leq 2\}$.
- $\{(x,1) \text{ tels que } x \in [-2,2]\}$ est fermé d'intérieur vide et $\{\|(x,y)-(1,1)\|<1\}$ est ouvert. B n'est donc ni ouvert ni fermé. Son adhérence est
$$\{(x,1) \text{ tels que } x \in [-2,2]\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } \|(x,y)-(1,1)\| \leq 1\right\}$$
et sa frontière est
$$\{(x,1) \text{ tels que } x \in [-2,0]\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } \|(x,y)-(1,1)\| = 1\right\}.$$
- $C_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } |x|+|y| \leq 3\right\}$ est fermé et borné. $C_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } y^2-x^2>1\right\}$ est ouvert et non borné. Comme C_2 ne contient pas C_1, leur réunion est ni ouverte ni fermée. L'adhérence de C est
$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } |x|+|y| \leq 3\right\} \cap \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } y^2-x^2 \geq 1\right\}$$
son intérieur est
$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } |x|+|y| < 3\right\} \cap \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } y^2-x^2 > 1\right\}$$
et sa frontière est l'intersection de
$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } |x|+|y| = 3\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } y^2-x^2 = 1\right\}$$
avec $\overline{C}$.
- D est une courbe régulière dans le demi plan $\{x>0\}$. Elle est donc d'intérieur vide. Son adhérence dans le plan est sa réunion avec le segment $\{(0,y) \text{ tels que } -1 \leq y \leq 1\}$. Sa frontière est égale à son adhérence.

EXERCICE 2.

Dans cet exercice on suppose que $\mathbb{R}^n$ est muni de la norme euclidienne que l'on note $\|.\|$. Pour toute partie non vide A de $\mathbb{R}^n$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$ on pose $d(x,A) = \inf_{z\in A}\|x-z\|$. Si A et B sont deux parties non vides de $\mathbb{R}^n$, on pose $d(A,B) = \inf_{x\in A, y\in B}\|x-y\|$.

1. *Montrer que $d(x,A)=0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$.*
   Par définition de inf, $d(x,A)=0$ si et seulement si il existe une suite $(x_n)_n$ de points de A qui converge vers x, ce qui signifie bien $x \in \overline{A}$.
2. *Montrer que $|d(x,A)-d(y,A)| \leq \|x-y\|$ et en déduire que $x \mapsto d(x,A)$ est continue.*
   En effet, pour tout $z \in A$, on a $d(x,A) \leq \|x-z\| \leq \|x-y\|+\|y-z\|$, et, en prenant l'inf sur z, il vient $d(x,A) \leq \|x-y\| + d(y,A)$. L'inégalité demandée s'obtient donc en échangeant x et y.
3. *Montrer que si A et B sont fermées et disjointes il existe une fonction continue $\varphi : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ qui vaut 1 sur A et 0 sur B.*
   On remarque que, d'après le première question, pour tout x, $d(x,A)+d(x,B) \neq 0$, et la fonction $x \mapsto \frac{d(x,B)}{d(x,A)+d(x,B)}$ réponds à la question.

4. *Montrer que $d(A,B) = \inf_{x\in A} d(x,B) = \inf_{y\in B} d(y,A)$.*
   Immédiat.
5. *On suppose que A est bornée. Montrer que $d(A,B) = 0$ si et seulement si $\overline{A}\cap\overline{B} \neq \emptyset$.*
   Par définition $d(A,B) = 0$ si et seulement si il existe deux suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$, $x_n \in A$, $y_n \in B$ telles que $\lim_n \|x_n - y_n\| = 0$. Comme A est borné, la suite $(x_n)_n$ est bornée et on peut donc en extraire une sous-suite $(x_{n_p})_p$ convergente vers $x \in \overline{A}$. Ainsi les suites extraites $(x_{n_p})_p$ et $(y_{n_p})_p$ convergent vers x qui appartient donc à $\overline{A}\cap\overline{B}$. Ainsi $\overline{A}\cap\overline{B} \neq \emptyset$. La réciproque est évidente.
6. *En déduire que si A est compact B est fermé, la relation $A\cap B = \emptyset$ implique $d(A,B) > 0$. Cette implication reste-t-elle vraie si on suppose seulement A et B fermés ?*
   Un compact étant fermé et borné, la question précédente montre la première partie de la question. Si on suppose seulement A et B fermés, la conclusion peut être mise en défaut : par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, c'est le cas si $A = \mathbb{R}\times\{0\}$ et $B = \{(x,y)$ tels que $xy = 1\}$.

EXERCICE 3.

Pour chacune des deux fonctions suivantes déterminer s'il est possible de prolonger la fonction donnée par continuité à $\mathbb{R}^2$:

$$f_1(x,y) = \frac{1-\cos\left(x^2+y^2\right)^{1/2}}{x^2+y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0);$$

$$f_2(x,y) = \frac{1-\cos|xy|^{1/2}}{|y|}, \quad y \neq 0.$$

– Le développement limité de cos à l'origine donne aussitôt $f_1(x,y) = \frac{1}{2} + \frac{o\left(\left(x^2+y^2\right)^{1/2}\right)}{\left(x^2+y^2\right)^{1/2}}$. La fonction se prolonge donc par $1/2$ à l'origine.
– Il faut étudier le prolongement en un point $(x_0,0)$. Quand (x,y) tends vers un tel point, xy tends vers 0 de sorte que l'on peut utiliser le développement limité de cos à l'origine : $f_2(x,y) = \frac{|x|}{2} + \frac{o(|xy|)}{|xy|}|x|$. Ainsi f_2 se prolonge par $\frac{|x_0|}{2}$ au point $(x_0,0)$, et la fonction ainsi obtenue est continue sur $\mathbb{R}^2$.

EXERCICE 4.

Dans cet exercice on note $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ que l'on suppose muni de la norme euclidienne notée $\|.\|$.

On rappelle que l'on dit que deux normes q_1 et q_2 sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes s'il existe deux constantes $c > 0$ et $C > 0$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $cq_2(x) \leq q_1(x) \leq Cq_2(x)$.

1. *Soit q une norme sur $\mathbb{R}^n$.*
   (a) *Montrer que q est continue à l'origine (*Indication. *pour $x \in \mathbb{R}^n$, écrire $x = \sum x_i e_i$ et utiliser l'inégalité triangulaire).*
   En effet, $q(x) = q(\sum x_i e_i) \leq \sum |x_i| q(e_i) \leq C \sum |x_i| \leq C\sqrt{n}\|x\|$.
   (b) *En déduire que q est continue.*
   En effet, l'inégalité triangulaire donne $q(x+h) - q(x) \leq q(h)$ et $q(x) - q(x+h) \leq q(h)$.
   (c) *Soit S la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ (pour la norme euclidienne). Montrer qu'il existe deux constantes $a > 0$ et $A > 0$ telles que, pour tout $x \in S$, on a $a \leq q(x) \leq A$.*
   En effet q est continue et strictement positive sur le compact S. Elle y atteint ses bornes qui sont donc strictement positives.
2. *Soient q_1 et q_2 deux normes sur $\mathbb{R}^n$.*
   (a) *Montrer qu'il existe deux constantes $c > 0$ et $C > 0$ telles que, pour tout $x \in S$, on a $c \leq \frac{q_1(x)}{q_2(x)} \leq C$.*
   Ceci résulte aussitôt de la question 1. (c) : $0 < \frac{\inf_S q_1}{\sup_S q_2} \leq \frac{q_1(x)}{q_2(x)} \leq \frac{\sup_S q_1}{\inf_S q_2} < +\infty$.
   (b) *Conclure que q_1 et q_2 sont équivalentes.*
   Il suffit d'appliquer le résultat de la question précédente au point $\frac{x}{\|x\|} \in S$, $x \neq 0$.