Intégration et Équations différentielles Licence Mathématiques (Parcours Ing. Math.), UE K1MA4021, exercices de TD et annales 2011-2013

Alain Yger

Institut de Mathématiques, Université Bordeaux 1, Talence 33405, France

E-mail address: Alain.Yger@math.u-bordeaux1.fr

Version du 20 juin 2014.

Résumé. Ce polycopié complète le polycopié de cours de l'UE K1MA4021 (Intégration et Équations différentielles). On y trouve une liste d'exercices proposés en TP (en 2011-2012) par Stanislas Kupin, ainsi que les corrigés du DS et de deux sessions d'examen (annales 2011-2012, 2012-2013).

Table des matières

ANNEXE A

Exercices proposés en TD (2011-2012)

I. Exercices en relation avec le chapitre 1.

Rappel théorique (définition de l'intégrale de Riemann [1]). Soient

— un intervalle $[a, b]$ fermé et borné ;

— une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$;

— une subdivision Δ de l'intervalle $[a, b]$: $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$, le diamètre de la subdivision Δ étant défini par

$$\operatorname{diam} \Delta = \|\Delta\| = \max_{i=1,n}(x_i - x_{i-1}) \ ;$$

— un système de n points intermédiaires $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$.

On définit la somme de Riemann associée à la subdivision Δ et aux points $(\xi_i)_{i=1,n}$ par :

$$\sigma(f, \Delta, \xi_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

On dit que la fonction f est Riemann intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si il existe une valeur I_f telle que : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_\varepsilon > 0$ de sorte que, pour toute division Δ avec $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$,

$$|\sigma(f, \Delta, \xi_i) - I_f| < \varepsilon.$$

Dans ce cas, on note $\int_a^b f(x)dx = I_f$ et on l'appelle l'intégrale de Riemann de f sur $[a, b]$.

Exercice 1 (intégrale et sommes de Riemann).

(1) Donner une interprétation géométrique des sommes de Riemann et de l'intégrale de Riemann.

(2) Calculer avec la définition $\int_a^b t^n \, dt$.

Exercice 2 (intégrale et sommes de Riemann). En utilisant les sommes de Riemann pour une fonction convenable à choisir, trouver les limites

— $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... \frac{1}{2n} \right)$.

— $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}} \right)$.

Exercice 3 (intégrale et sommes de Riemann).

1. Voir aussi le cours d'Analyse 1 [**anal1**], chapitre 3.

(1) Soit $x > 0$. Montrer que la limite suivante existe :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x}{n} \sum_{p=0}^{n-1} e^{\frac{px}{n}}.$$

(2) En déduire que $\int_0^x e^t dt = e^x - 1$ pour $x > 0$ quelconque.

Exercice 4 (intégrale et sommes de Riemann).

(1) Établir les égalités suivantes, où $x \in \mathbb{R}$ et $n > 0$ est un entier :

$$\begin{aligned}
\sum_{p=1}^{n} \sin\big(\frac{x}{2n}\big) \sin\big(\frac{px}{n}\big) &= \frac{1}{2}\left(\cos\big(\frac{x}{2n}\big) - \cos\big(\frac{2n+1}{2n}x\big)\right) \\
\sum_{p=1}^{n} \sin\big(\frac{x}{2n}\big) \cos\big(\frac{px}{n}\big) &= \frac{1}{2}\left(-\sin\big(\frac{x}{2n}\big) + \sin\big(\frac{2n+1}{2n}x\big)\right).
\end{aligned}$$

(2) Utiliser ces résultats pour établir pour $x > 0$ quelconque :

$$\int_0^x \sin(t)\,dt = 1 - \cos x, \quad \int_0^x \cos(t)\,dt = \sin x.$$

Exercice 5 (intégration de fonctions continues). Montrer que toute fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est Riemann intégrable sur $[a, b]$.

Exercice 6 (une fonction qui n'est pas Riemann-intégrable). Soit f la fonction de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, définie par $f(x) = 1$ pour tout $x \in [0, 1]\cap\mathbb{Q}$ et $f(x) = 0$ sinon. Montrer que f n'est pas Riemann-intégrable sur $[0, 1]$ (l'intégrale de Lebesgue corrige en fait ce défaut, car f est Lebesgue intégrable et $\int_a^b f(t)dt = 0$).

Exercice 7 (lemme de Riemann-Lebesgue).

(1) Pour $f \in C^1([a, b])$, démontrer que $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(t) \sin(nt)\,dt = 0$.

(2) Démontrer le même résultat pour une fonction f continue sur $[a, b]$.

Exercice 8 (formule de Leibniz-Newton). Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction que l'on suppose Riemann-intégrable sur $[a, b]$. On suppose aussi qu'elle admet une primitive $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ (F continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in]a, b[$). En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Exercice 9 (calcul de primitives). Calculer les primitives suivantes (fonctions de la borne supérieure de l'intégrale de Riemann) dans leur domaine de définition :

$$\int^x \frac{t}{1+t^2}dt, \qquad \int^x \frac{t^4+x^2+1}{t-1}dt, \qquad \int^x \frac{1}{(t-1)(t-2)(t-3)}dt,$$

$$\int^x \frac{2t+1}{(t-1)(t-3)(t-4)}dt, \qquad \int^x \frac{1}{t(t^2+1)}dt, \qquad \int^x \frac{1}{(t-1)^2(t+1)}dt,$$

$$\int^x \frac{t}{(t^2+1)(t-1)}dt, \qquad \int^x \frac{t^2+2}{(t+1)^3(t-2)}dt, \qquad \int^x \frac{1+\sin(t)}{1+\cos(t)}dt,$$

$$\int^x \frac{e^{2t}+e^t}{e^{3t}-e^{2t}-e^t+1}dt.$$

EXERCICE 10 (calcul de primitives). Calculer les primitives suivantes (fonctions de la borne supérieure de l'intégrale de Riemann) dans leur domaine de définition :

$$\int^x \frac{1}{t(1+\ln(t))^3}dt, \quad \int^x \frac{t^7}{(1+t^4)^2}dt, \quad \int^x \frac{1}{t^2+a^2}dt \quad (a \in \mathbb{R}^*).$$

La fonction ln désigne ici (comme log) le logarithme népérien).

EXERCICE 11 (calcul d'intégrales ou de primitives). Calculer les intégrales définies ou les primitives suivantes (fonctions de la borne supérieure de l'intégrale de Riemann) :

$$\int_{-\pi}^{2\pi} |\sin(t)|\cos(t)\,dt, \quad \int_e^5 \ln(t)\,dt,$$

$$\int^x t^a \log(t)\,dt, \quad \int^x e^{at}t^3 dt \quad (a \in \mathbb{R})$$

$$\int^x \sin(\ln(t))\,dt, \ (x>0) \quad \int_0^{2\pi} \cos(2t)\sin(3t)\,dt, \quad \int_0^{2\pi} \cos(4t)\cos(3t)\,dt,$$

$$\int_0^{2\pi} (\sin(t))^6\,dt, \quad \int_0^{2\pi} (\cos(t))^5\,dt, \quad \int^x \arctan(t)\,dt$$

$$\int_0^{\pi/8} (t^2+7t-5)\cos(2t)\,dt, \quad \int^x e^t \cos(t)\,dt.$$

La fonction ln désigne ici (comme log) le logarithme népérien).

EXERCICE 12 (calcul de primitives). Calculer les primitives suivantes (fonctions de la borne supérieure de l'intégrale de Riemann) dans leur domaine de définition :

$$\int x\frac{t^2}{t^2+1}\,dt, \quad \int^x \sin(\frac{t}{2})\cos(\frac{t}{2})\,dt, \quad \int^x \frac{1}{1+\tanh(t)}\,dt,$$

$$\int^x t^4(1+t^5)^5\,dt, \quad \int^x \frac{\ln(t)}{t}\,dt,$$

$$\int^x \cos(2t)(\sin(2t))^4\,dt, \quad \int^x \frac{\sin(t)}{(\cos(t))^2}\,dt, \quad \int^x \frac{1}{(\sin(t))^2\,(\cos(t))^2}\,dt.$$

EXERCICE 13 (calcul de primitives).

(1) Soit $f(t) = \frac{t-1}{t^2-2t+2}$. Déterminer la primitive de f qui s'annule en $x=2$.

(2) Même question pour $x=-2$.

EXERCICE 14 (théorèmes de convergence monotone ou dominée (TCM et TCD) en une variable).

(1) Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, g_n une fonction définie sur $]0,1]$ par les relations

$$g_n(x) = n \text{ pour } x \in \Big]0, \frac{1}{n}\Big], \quad g_n(x) = 0 \text{ pour } x \in \Big]\frac{1}{n}, 1\Big].$$

Pour tout $x \in]0,1]$, posons $g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$. Calculer g. La convergence est-elle simple ? monotone ? uniforme ?

(2) Calculer

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 g_n(t)\,dt, \quad \int_0^1 g(t)\,dt.$$

Le TCD est-il applicable dans cette situation ? Justifiez votre réponse.

(3) Soit $f \in C([0,1],\mathbb{R})$. Démontrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x) g_n(t)\, dt = f(0).$$

Exercice 15 (théorèmes de convergence monotone ou dominée (TCM et TCD) en une variable).

(1) Soit $0 \leq \alpha < 1$ et

$$f_n(x) = \chi_{I_n}(x) \cdot \frac{1}{x^\alpha} \text{ pour } x \in]0,1],$$

où χ_I est la fonction indicatrice de l'intervalle I et $I_n = [1/(n+1), 1/n]$. Calculer

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(t)\, dt.$$

Le TCD est-il applicable dans cette situation ?

(2) Mêmes questions pour $\alpha = 1$.

Exercice 16 (calculs d'aires de domaines plans).

(1) Calculer les aires des régions planes ainsi décrites :

$$\Big\{(x,y)\,;\, 0 \leq x,\ x \leq y \leq x+1, y \leq 2\Big\} \qquad \Big\{(x,y)\,;\, 0 \leq x,\ x^3 \leq y \leq x^2\Big\}$$
$$\Big\{(x,y)\ :\ x^2 \leq y \leq x^3,\ y \leq 8\Big\} \qquad \Big\{(x,y)\ :\ 0 \leq y,\ x^2+y^2 \leq 1\Big\}.$$

(2) Calculer les aires de régions planes bornées ayant leur frontière sur les courbes suivantes :

$$4y = x^2 - 4x \text{ ou } x = y+3\ ; \quad y^2 = 10x+5 \text{ ou } y^2 = 9-6x.$$

Exercice 17 (calculs de volumes de régions bornées dans $\mathbb{R}^3$). Calculer les volumes des régions bornées dont les frontières sont incluses dans les surfaces suivantes :

$$\{y = x^2\} \cup \{y = 1\} \cup \{z = 0\} \cup \{z = x^2 + y^2\}$$
$$\Big(\{|x+y| < \pi/2\} \cap \{|x-y| < \pi/2\}\Big) \cap \Big(\{z = 0\} \cup \{z = \cos x \cos y\}\Big)$$
$$\Big\{n\pi \leq x^2+y^2 \leq (n+1)\pi\Big\} \cap \Big(\{z=0\} \cup \{z = \sin(x^2+y^2)\}\Big) \quad (n \in \mathbb{N})$$
$$\{x+y+z = a\} \cup \{4x+y = a\} \cup \{4x+3y = 3a\} \cup \{y = 0\} \cup \{z = 0\} \quad (a > 0)$$
$$\{x^2+y^2 = R^2\} \cup \{x+y+z = a\} \cup \{x+y+z = -a\} \quad (R > 0, a > 0).$$

Exercice 18 (sommes de Riemann pour les intégrales doubles). Soient $a, b > 0$, $X = [0,a] \times [0,b]$, et la partition $(X_{ij})_{i,j=0,\dots,n-1}$ de X donnée par

$$X_{ij} = \left[\frac{ia}{n}, \frac{(i+1)a}{n}\right] \times \left[\frac{jb}{n}, \frac{(j+1)b}{n}\right].$$

Soient $(\xi_{ij})_{i,j=0,\dots,n-1}$ les centres des X_{ij}. Calculer les sommes de Riemann

$$\sum_{i,j} f(\xi_{ij})\, \mathrm{vol}_2(X_{ij})$$

et leur limite (lorsque n tend vers l'infini)

$$\iint_X f(x,y)\,dxdy$$

dans les situations suivantes ($x=(x_1,x_2)$) :

$$\begin{aligned} f(x) &= px+qy \quad \forall\,(x,y)\in X \quad (p,q\in\mathbb{R});\\ f(x) &= xy \quad \forall\,(x,y)\in X;\\ f(x) &= e^{x+y} \quad \forall\,(x,y)\in X. \end{aligned}$$

Exercice 19 (calcul d'intégrales triples). Calculer les intégrales suivantes :

(1)
$$I_1=\iint_D (x+y)e^{-x}e^{-y}\,dxdy,\ \text{où } D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,;\,x,y\geq 0, x+y\leq 1\right\}$$

(2)
$$I_2=\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy,\ \text{où } D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,;\,x^2+y^2<x, x^2+y^2>y\right\}$$

(3)
$$I_3=\iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}\,dxdy,\ \text{où } D=\left\{(x,y)\in[0,1]^2\,;\,x^2+y^2\geq 1\right\}$$

(4)
$$I_4=\iint_D \frac{1}{y\cos(x)+1}\,dxdy,\ \text{où } D=[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{1}{2}]$$

(5)
$$I_5=\iiint_D z\,dxdydz,\ \text{où } D=\left\{(x,y,z)\in(\mathbb{R}^+)^3\,;\,y^2+z\leq 1, x^2+z\leq 1\right\}$$

(6)
$$I_6=\iint_D xy\,dxdy,\ \text{où } D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,;\,x,y>0, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1\right\}$$
avec $a,b>0$.

Exercice 20 (calcul d'intégrales doubles par changement de variables, extrait du DM 1). Considérons :

$$\iint_A f(x,y)\,dxdy,$$

où $f(x,y)=(1+x+y)^{-2}$ et la région A est délimitée par les trois droites $x=2y$, $y=2x$, $x+y=6$.

(1) Faire le dessin de la région A et la paramétrer.
(2) Calculer l'intégrale en question.

Exercice 21 (calcul d'intégrales doubles par changement de variables, extrait du DM 1).

(1) En passant aux coordonnées polaires, calculer

$$\iint_A x\,dxdy,$$

où $A = \{(x,y)\,;\, 2x \le x^2+y^2 \le 6x,\ y \le x\}$.

(2) En passant aux coordonnées cylindriques , calculer

$$\iiint_B \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dxdydz,$$

où $B = \{(x,y,z)\,;\, \sqrt{x^2+y^2} \le z \le a\}$, avec $a > 0$.

Exercice 22 (théorèmes de Fubini-Tonnelli et Fubini). Changer l'ordre d'intégration dans l'intégrale

$$\iint_G f(x,y)\,dxdy = \int_y \Big(\int_x f(x,y)\,dx\Big)\,dy = \int_x \Big(\int_y f(x,y)\,dy\Big)\,dx$$

(intégrée d'abord en x, puis en y) lorsque la frontière du domaine borné G est décrite par les relations :

$$\begin{aligned}
&y = x^2 \text{ ou } x+y=2\\
&x = 0 \text{ ou } x = -\sqrt{y} \text{ ou } x = -\sqrt{2-y}\\
&y = 0 \text{ ou } x = \sqrt{y} \text{ ou } x+y=6\\
&x = 0 \text{ ou } \Big(x = \sin y \text{ ou } x = \cos y,\ \text{avec } y \in [0,\pi/2]\Big)\\
&x = 0 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x = y^2 \text{ ou } y = e^x.
\end{aligned}$$

Exercice 23 (théorèmes de Fubini-Tonnelli et Fubini, extrait du DM 1). Soit :

$$\int_0^x \Big(\int_0^{2\sin(x)} f(x,y)\,dy\Big)\,dx.$$

(1) Faire le dessin de la région d'intégration.

(2) Changer l'ordre d'intégration dans l'intégrale.

Exercice 24 (théorèmes de Fubini-Tonnelli et Fubini). Représenter et calculer le volume du domaine :

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, -1 \le z \le 1, x^2+y^2 \le z^2+1\right\}.$$

Exercice 25 (calcul d'intégrales doubles *via* Fubini ou changement de variables). Calculer les intégrales suivantes :

(1)

$$\iint_{[0,1]^2} \frac{dx\,dy}{(x+y+1)^2}$$

(2)

$$\iint_{D(0,1)} (x^2+y^2)\,dxdy$$

(3)

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy,\ \text{où } D = \Big\{(x,y)\,;\, x \ge 0,\ y \ge 0,\ x^2+y^2-2y \ge 0,\ x^2+y^2-1 \le 0\Big\}$$

(4)
$$\iint_D \sqrt{xy}\, dx\, dy, \text{ où } D = \{(x,y)\,;\,(x^2+y^2)^2 \le xy\}.$$

Exercice 26 (calculs d'aire). Soient $a, b > 0$. Calculer l'aire de l'ellipse pleine
$$E = \Big\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 \Big\}$$
de deux manières différentes (l'aire d'un domaine plan D valant $\iint_D dx\, dy$).

Exercice 27 (calcul d'intégrales multiples et théorèmes de convergence). Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les sous-ensembles du plan $X_n = [0,n]^2$, $Y_n = X_{n+1} \setminus X_n$. Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} \iint_{Y_n} f(x,y)\, dxdy = 0$$
lorsque
$$\begin{aligned} f(x,y) &= (x^2+y^2)^{-\alpha} \quad (\alpha > \frac{1}{2}) \\ f(x,y) &= \frac{xy}{(x+y)^4} \\ f(x,y) &= (1+xy)^{-2} \\ f(x,y) &= e^{-|x-y|^2}. \end{aligned}$$

Exercice 28 (intégrales sur des surfaces, calculs de flux, extrait du DM 2). Faire le dessin des surfaces d'intégration et calculer les intégrales de surface suivantes :

(1)
$$\iint_S xyz\, dS := \iint_S xyz\, d[\mathrm{vol}_{2,S}], \qquad \iint_S xyz\, dS := \iint_S |xy|\, z\, d[\mathrm{vol}_{2,S}]$$
lorsque $S = \{(x,y,z)\,;\, z = x^2+y^2,\ 0 \le z \le 1\}$.

(2) le flux
$$\Phi = \iint_S \big(yz\, dydz + zx\, dzdx + xy\, dxdy\big)$$
du champ de vecteurs $(x,y,z) \mapsto (yz, xz, xy)$ au travers de la surface $S = \{(x,y,z)\,;\, x,y,z \ge 0,\ x+y+z = 1\}$, lorsque le vecteur normal à S est celui qui pointe vers les $z > 0$.

Exercice 29 (intégrales sur des surfaces, calculs de flux, extrait du DM 2). Soit
$$\Omega = \{(x,y,z)\,;\, x^2+y^2 \le r^2,\ 0 \le z \le 1\} \quad (r > 0)$$
et la surface $S = S_1 \cup S_2 \cap S_3$, où S_1 désigne la paroi latérale de Ω, et S_2, S_3 les faces respectivement supérieure et inférieure.

(1) Dessiner Ω et les trois portions de surface S_1, S_2, S_3.

(2) Calculer le flux du champ de vecteurs $(x,y,z) \mapsto (x+y, y+z, z+x)$ au travers des surfaces S_1, S_2, S_3, le vecteur normal à ces surfaces étant celui qui pointe vers l'extérieur de Ω. Calculer le flux du champ au travers de la surface S, le vecteur normal à chaque portion de surface S_j étant celui qui pointe vers l'extérieur de Ω.

(3) Énoncer la formule de Green-Ostrogradski. L'appliquer pour retrouver la valeur du flux calculé à la question 2.

II. Exercices en relation avec le chapitre 2.

Exercice 30 (EDO à variables séparées).

(1) Résoudre les quatre équations différentielles suivantes par la méthode de séparation de variables :

$$\tan(x)\,(\sin(y))^2\,dx + (\cos(x))^2\cot(y)\,dy = 0$$
$$xy' - y = y^3, \quad xyy' = 1 - x^2, \; y'\tan(x) = y.$$

(2) Trouver les solutions des équations différentielles suivantes, satisfaisant les connditions initiales imposées :

$$(1+e^x)\,yy' = e^x\,, \text{ avec } y(0) = 1$$
$$(xy^2 + x)\,dx + (x^2y - y)\,dy = 0\,, \text{ avec } y(0) = 1$$
$$y'\,\sin(x) = \cos(y)\,, \text{ avec } y(\pi/4) = 1.$$

Exercice 31 (EDO se ramenant à des EDO à variables séparées). Ramener les trois équations différentielles ci-dessous à des équations différentielles à variables séparées grâce à un changement de variables, puis les résoudre.

$$y' = (x+y)^2, \quad y' = (8x + 2y + 1)^2$$
$$(2x + 3y - 1)\,dx + (4x + 6y - 5)\,dy = 0.$$

Exercice 32 (EDO homogènes (d'ordre 1)).

(1) Résoudre les quatre équations différentielles homogènes (d'ordre un) suivantes par le changement de variables $y = xu$ (ou bien $x = yu$) :

$$y' = e^{y/x} + \frac{y}{x} \qquad y' = \frac{y}{x} - 1$$
$$(x-y)\,ydx - x^2\,dy = 0 \qquad y' = -\frac{x+y}{x}.$$

(2) Paramétriser les courbes intégrales de l'équation différentielle :

$$(x^2 + y^2)\,dx - 2y\,dy = 0.$$

Expliciter la trajectoire passant par le point $(4, 0)$, puis celle passant par le point $(1, 1)$.

Exercice 33 (EDO linéaires du premier ordre ou s'y ramenant).

(1) Trouver les solutions générales des équations différentielles linéaires suivantes :

$$y' - y = e^x, \quad y' = y\tan(x) + \cos(x),$$
$$y' + 2x\,y = x, \quad y' - y/x = x, \quad x\,y' - 2y = 3x^4$$
$$y' + 2y/x = x^3, \quad y' - y\cot(x) = \sin(x),$$
$$(2x+1)\,y' = 4x + 2y, \quad y' - x\,y/(x^2+1) = x.$$

(2) Trouver les solutions des l'équations différentielles suivantes, satisfaisant les conditions initiales imposées :

$$\begin{aligned}
&xy' + y - e^x = 0, \text{ avec } y(a) = b \quad (a, b \in \mathbb{R}) \\
&y' - (1 - x^2)\, y - 1 - x = 0, \text{ avec } y(0) = 0 \\
&y' - y \tan(x) = 1/\cos(x), \text{ avec } y(0) = 1 \\
&x^2\, y' - 2x_, y = -3, \text{ avec } y(-1) = 1 \\
&(1 + x^2)\, y' - 2x\, y = 4x, \text{ avec } y(1) = 0 \\
&y' - y \tan(x) = \cos(x), \text{ avec } y(1) = 2.
\end{aligned}$$

(3) Résoudre les trois équations différentielles de Bernoulli suivantes :

$$\begin{aligned}
&y' = \frac{4}{x}\, y + x\, \sqrt{y} \\
&y' + y/x = -x\, y^2 \\
&2x\, y\, y' - y^2 + x = 0.
\end{aligned}$$

EXERCICE 34 (EDO linéaires du premier ordre ou s'y ramenant, extrait du DM 2).

(1) Trouver la solution générale des équations différentielles suivantes :

$$y' - y \tan(x) = \cos(x), \quad y' + y = x\, \sqrt{y}.$$

(2) Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

$$\begin{aligned}
(1 + x^2)_, y' - 2x_, y = 1 + x^2, &\qquad y(1) = 0 \\
x\, y' - 2\, y = x^4, &\qquad y(0) = 1.
\end{aligned}$$

EXERCICE 35 (recherche de relations intégrales). Trouver les relations intégrales (*i.e.* les intégrales première) pour les équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned}
&(x + y)\, dx + (x + 2y)\, dy = 0 \\
&(x^2 + y^2 + 2x)\, dx + 2x\, y dy = 0 \\
&(x^3 - 3x\, y^2 + 2)\, dx - (3x^2 y - y^2)\, dy = 0.
\end{aligned}$$

ANNEXE B

Annales 2011-2012, Texte et corrigé du DS

Durée 1 heure 30. Polycopié de cours autorisé (à l'exception de tout autre document)

Exercice 1.

Pour les intégrales données ci-dessous, dessiner le domaine d'intégration dans $\mathbb{R}^2$ (la fonction f est chaque une fonction continue dans ce domaine). Reécrire ces intégrales doubles en changeant l'ordre d'intégration des variables :

$$\int_0^{2a}\Big(\int_{x-a}^{3a-x} f(x,y)\,dy\Big)\,dx \qquad (\text{où } a>0),$$
$$\int_0^{1}\Big(\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\Big)\,dx, \quad \int_1^{4}\Big(\int_{x-2}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\Big)\,dx.$$

Pour la première intégrale, le domaine d'intégration est représenté sur la figure B.1. L'interversion des variables d'intégration se lit sur cette figure et donne donc :

$$\begin{aligned}\int_0^{2a}\Big(\int_{x-a}^{3a-x} f(x,y)\,dy\Big)\,dx &= \int_{-a}^{a}\Big(\int_0^{y+a} f(x,y)\,dx\Big)\,dy \\ &\quad + \int_a^{3a}\Big(\int_0^{3a-y} f(x,y)\,dx\Big)\,dy.\end{aligned}$$

Pour la seconde intégrale, le domaine d'intégration est représenté sur la figure B.2.

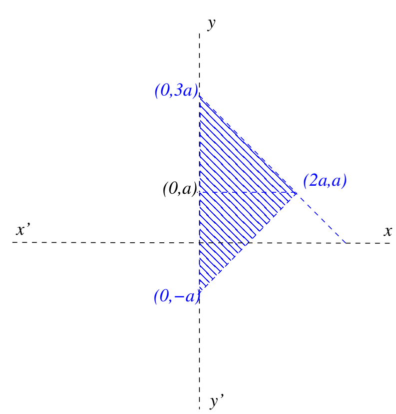


FIGURE B.1. Exercice 1, première intégrale

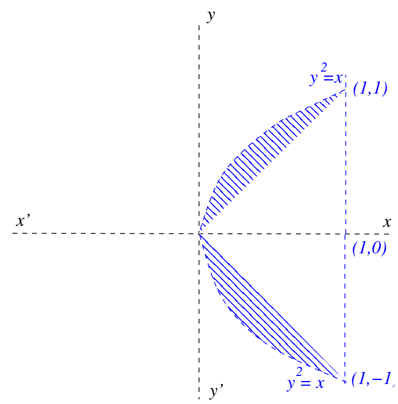


FIGURE B.2. Exercice 1, seconde intégrale

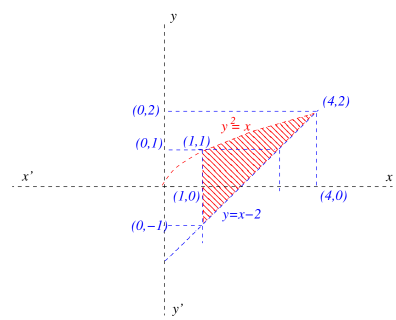


FIGURE B.3. Exercice 1, troisième intégrale

L'interversion des variables d'intégration se lit sur cette figure et donne donc :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \Big(\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\Big)\,dx &= \int_{-1}^1 \Big(\int_{y^2}^1 f(x,y)\,dx\Big)\,dy \\ &= 2\int_0^1 \Big(\int_{y^2}^1 f(x,y)\,dx\Big)\,dy.\end{aligned}$$

Pour la troisième intégrale, le domaine d'intégration est représenté sur la figure B.3. L'interversion des variables d'intégration se lit sur cette figure et donne donc :

$$\begin{aligned}\int_1^4 \Big(\int_{x-2}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\Big)\,dx &= \int_{-1}^1 \Big(\int_1^{y+2} f(x,y)\,dx\Big)\,dy \\ &\quad + \int_1^2 \Big(\int_{y^2}^{y+2} f(x,y)\,dx\Big)\,dy.\end{aligned}$$

Exercice 2. *Soit G le domaine de $\mathbb{R}^3$ défini par :*

$$G := \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4\big\}$$

a) *Représenter ce domaine G sur une figure.*

Il s'agit du secteur de la sphère pleine de rayon 2 situé dans le domaine $\varphi \in [0,\pi/2]$

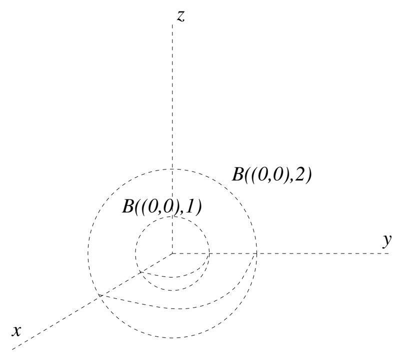


FIGURE B.4. Exercice 2 **a)**, le domaine G

(longitude), $\theta \in [0, \pi/2]$ (colatitude), auquel on a retiré le secteur de la sphère pleine de rayon 1 située dans le même octant. Ce domaine a été représenté sur la figure B.4.

b) *En utilisant un changement de variables approprié, calculer l'intégrale triple suivante :*

$$\iiint_G \sqrt{x^2+y^2}\, dxdydz.$$

On effectue le changement de variables en coordonnées sphériques, ρ désignant la distance à l'origine, φ (longitude depuis le plan méridien $\{y=0\}$) et θ (colatitude mesurée depuis le pôle nord $(0,0,1)$) désignant les deux angles d'Euler. On a les formules :

$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi,\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi,\ z = \rho\, \cos\theta.$$

Le module du jacobien du changement de variables

$$(\rho,\theta,\varphi) \mapsto (\rho \sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta)$$

vaut $\rho^2 \sin\theta$. Le domaine d'intégration en coordonnées sphériques est :

$$\Big\{(\rho,\theta,\varphi)\,;\, 1 \leq \rho \leq 2,\ \theta \in [0,\pi/2],\ \varphi \in [0,\pi/2]\Big\}.$$

L'intégrale à calculer vaut donc :

$$I = \iiint_G \sqrt{x^2+y^2}\, dxdydz = \int_{\rho\in[1,2]} \int_{\theta\in[0,\pi/2]} \int_{\varphi\in[0,\pi/2]} \rho^3 (\sin\theta)^2\, d\rho\, d\theta\, d\varphi.$$

On utilise ensuite le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \rho^3\, d\rho \times \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\, d\theta \times \int_0^{\varphi/2} d\varphi \\ &= \Big[\frac{\rho^4}{4}\Big]_1^2 \times \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(2\theta)}{2}\, d\theta \times \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{15}{4} \times \frac{\pi}{4} \times \frac{\pi}{2} = \frac{15\pi^2}{32}. \end{aligned}$$

Exercice 3.

On considère le secteur conique fermé :

$$C := \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x^2+y^2 \leq z^2,\ 0 \leq z \leq 4\big\}.$$

a) *Que vaut le demi-angle d'ouverture α de ce secteur conique ?*

Ce demi-angle α a pour tangente 1 ; on a donc $\alpha = \pi/4$.

b) *Exprimer le paramétrage de la surface*

$$\Sigma := \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x^2+y^2 = z^2,\ 0 < z \leq 4\big\}$$

en fonction des deux paramètres que sont la longitude φ (calculée avec comme plan méridien de référence le plan xOz) et la distance ρ du point courant à l'origine.

Sur cette surface, la colatitude θ est constante et vaut $\pi/4$. On a :

$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi = \frac{\rho\cos\varphi}{\sqrt{2}},\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi = \frac{\rho\sin\varphi}{\sqrt{2}},\ z = \rho\cos\theta = \frac{\rho}{\sqrt{2}}.$$

Le paramètre ρ varie dans $[0,4\sqrt{2}]$, tandis que le paramètre φ varie dans $[0,2\pi]$. On a ainsi le paramétrage

$$(\varphi,\rho) \in [0,2\pi] \times [0,4\sqrt{2}] \mapsto \sigma(\varphi,\rho) \in \Sigma.$$

c) *On considère le champ de vecteurs :*

$$\vec{F}(x,y,z) = (5x+y,0,z).$$

Calculer (comme une intégrale de surface) le flux sortant de ce champ de vecteurs au travers du bord du secteur conique C, c'est-à-dire l'intégrale de surface :

$$\iint_{\partial C} \langle \vec{F}(x,y,z), \vec{n}_{\rm ext}(x,y,z)\rangle\, d\sigma_{\partial C}(x,y,z),$$

où ∂C désigne le bord du secteur conique fermé C, $\sigma_{\partial C}$ la mesure de surface sur ce bord, $\vec{n}_{\rm ext}(x,y,z)$ le vecteur normal unitaire pointant vers l'extérieur de C au point courant (x,y,z) du bord de ce secteur fermé.

Le bord du secteur conique C se compose de deux parties : la surface Σ_0 correspondant au disque de rayon 4 de centre $(0,0,4)$ situé dans le plan $\{z=4\}$, et la surface Σ introduite au **b)**.

La normale extérieure unitaire à la surface Σ_0 et pointant vers l'extérieur de C est le vecteur $(0,0,1)$. De plus, comme Σ_0 est un disque dans le plan horizontal paramétré par $(x,y) \mapsto (x,y,4)$, la contribution de cette surface Σ_0 au flux sortant est :

$$\iint_{\sqrt{x^2+y^2}\leq 4} \Big\langle \vec{F}(x,y,4), \begin{pmatrix} 0\\0\\1\end{pmatrix}\Big\rangle\, dxdy = 4\iint_{\sqrt{x^2+y^2}\leq 4} dxdy = 64\,\pi.$$

Soit

$$(\varphi,\rho) \mapsto \sigma(\varphi,\rho)$$

le paramétrage de Σ donné au **b)**. On a

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\varphi} \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial\rho} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\rho\sin\varphi\\ \rho\cos\varphi\\ 0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\rho\cos\varphi\\ \rho\sin\varphi\\ -\rho\end{pmatrix}.$$

Comme la dernière coordonnée (suivant la direction verticale) est négative, ce vecteur est bien dirigé comme l'est la normale extérieure au secteur conique C au point courant $\sigma(\varphi,\rho)$ de la surface Σ. La contribution de la surface Σ au flux sortant du champ de vecteurs $\vec{F}$ est donc :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\int_{\varphi\in[0,2\pi]}\int_{\rho\in[0,4\sqrt{2}]} \Big\langle \vec{F}(\sigma(\varphi,\rho))\,,\begin{pmatrix}\rho\cos\varphi\\ \rho\sin\varphi\\ -\rho\end{pmatrix}\Big\rangle\, d\varphi d\rho = \\
= \ & \frac{1}{2}\int_{\varphi\in[0,2\pi]}\int_{\rho\in[0,4\sqrt{2}]} \rho^2(5\cos^2\varphi+\sin\varphi\cos\varphi-1)\,d\varphi\,d\rho \\
= \ & \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big[\frac{\rho^3}{3}\Big]_0^{4\sqrt{2}} \times \int_0^{2\pi}(5\cos^2\varphi+\sin\varphi\cos\varphi-1)\,d\varphi \\
= \ & \frac{64}{3}\times 2\pi\Big(\frac{5}{2}-1\Big) = 64\,\pi.
\end{aligned}$$

En ajoutant les contributions des deux portions surfaces Σ_0 et Σ, on trouve que le flux sortant du champ de vecteurs $\vec{F}$ au travers du bord de C vaut $64\,\pi+64\,\pi = 128\,\pi$.

d) *A quelle intégrale volumique ce flux est-il égal ? Calculer cette intégrale volumique et retrouver de cette manière le résultat de la question* **c)** *[on rappelle que le volume d'un secteur conique de révolution est égal à $hA/3$, où A désigne l'aire de la base et h la hauteur].*

Ce flux sortant est égal, d'après la formule de Green-Ostrogradski, à l'intégrale volumique de la divergence du champ $\vec{F}$ dans le secteur conique C. Or cette divergence est ici constante, égale :

$$\frac{\partial}{\partial x}[5x+y]+\frac{\partial}{\partial y}[0]+\frac{\partial}{\partial z}[z]\equiv 6.$$

L'intégrale volumique correspondant au flux calculé au **c)** vaut donc

$$\iiint_C 6\,dxdydz = 6\,\mathrm{vol}_3(C) = 6\times\frac{4\times 16\pi}{3} = 128\,\pi.$$

On retrouve bien le résultat établi à la question **c)**.

Exercice 4.

On considère la courbe plane Γ d'équation $x^3+y^3-3xy=0$.

a) *Déterminer, si t désigne un paramètre strictement positif, l'unique point d'intersection différent de $(0,0)$ de la courbe Γ avec la droite d'équation $y=tx$.*

En cherchant l'intersection de la courbe Γ avec la droite d'équation $y=tx$ ($t>0$), on trouve que l'abscisse du point d'intersection vérifie

$$x^3(1+t^3)-3tx^2=0.$$

Si l'on suppose $x\neq 0$ (on cherche en effet le point d'intersection différent de $(0,0)$), on trouve

$$x=\frac{3t}{1+t^3},\quad y=tx=\frac{3t^2}{1+t^3}.$$

b) *Montrer que le chemin paramétré*

$$\gamma\ : t\in[0,+\infty[\longmapsto\Big(\frac{3t}{1+t^3},\frac{3t^2}{1+t^3}\Big)$$

ne passe pas par deux fois le même point. Que se passe-t-il lorsque t tend vers $+\infty$?

Si $(x(t_1), y(t_1)) = (x(t_2), y(t_2))$ avec $t_1 > 0$ et $t_2 > 0$, on a $y(t_1)/x(t_1) = t_1 = y(t_2)/x(t_2) = t_2$. L'application

$$t \in]0, \infty[\mapsto \Big(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}\Big)$$

est donc injective, ce qui implique que la courbe paramétrée sur $[0, \infty[$ comme indiqué ne passe pas deux fois par le même point (car l'origine correspond à la seule valeur $t = 0$ du paramètre). Lorsque t tend vers $+\infty$, le point de coordonnées

$$\Big(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}\Big)$$

tend vers $(0, 0)$.

c) *Calculer l'intégrale curviligne*

$$\frac{1}{2}\int_\gamma (xdy - ydx)$$

après avoir remarqué que $xdy - ydx = x^2 dt$ si $y(t) = tx(t)$. En déduire la surface de la boucle de la courbe Γ qui se trouve enserrée par le lacet $\gamma([0, +\infty])$ [on pensera à appliquer ici, après l'avoir rappelé, la formule de Green-Riemann].

L'intégrale curviligne vaut

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{x(t)y'(t) - y(t)x'(t)}{x^2(t)}\, x^2(t)\, dt &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} (y/x)'(t)\, x^2(t)\, dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^2(t)\, dt,\end{aligned}$$

avec :

$$x(t) = \frac{3t}{1+t^3},\ y(t) = tx(t) = \frac{3t^2}{1+t^3}.$$

En reportant, on trouve :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\gamma (xdy - ydx) &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{9t^2}{(1+t^3)^2}\, dt \\ &= \frac{3}{2}\int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+u)^2} = \frac{3}{2}\Big[-\frac{1}{1+u}\Big]_0^\infty = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Comme la courbe paramétrée $\gamma\ : t \in [0, +\infty[\mapsto (x(t), y(t))$ est paramétrée injectivement et que

$$\lim_{t\to+\infty} (x(t), y(t)) = (0, 0) = (x(0), y(0)),$$

cette courbe se prolonge à $[0, +\infty]$ un en lacet enserrant un domaine fermé. D'après la formule de Green-Riemann (que l'on applique ici en prenant $P(x, y) = -y$, $Q(x, y) = x$ et K désignant le domaine enserré), on obtient, en remarquant que le paramétrage de γ correspond à un parcours dans le sens trigomométrique (la pente t de la droite $y = tx$ augmente en effet lorsque t croit) :

$$\frac{1}{2}\int_\gamma xdy - ydx = \iint_K \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\, dxdy = \mathrm{vol}_2(K).$$

L'aire de K vaut donc $3/2$.

ANNEXE C

Annales 2011-2012, Texte et corrigé de l'examen de session 1

Durée 3 heures. Polycopié de cours autorisé (à l'exception de tout autre document)

Exercice 1.

Soient a, b, c, d quatre nombres strictement positifs tels que $a < b$ et $c < d$. En utilisant un changement de variable approprié, calculer la surface du domaine plan défini par :

$$D := \big\{(x,y) \in]0,+\infty[^2\,;\, ax^2 \leq y \leq bx^2, \quad c/x \leq y \leq d/x\big\}.$$

Soit le changement de variables consistant à poser $u = y/x^2$ et $x = xy$ (dans l'ouvert $U := \{x > 0, y > 0\}$ du plan $\mathbb{R}^2$). Ce changement de variables réalise une bijection de U dans lui même qui est en fait un C^1-difféomorphisme de U dans U. L'application inverse est donnée par :

$$x = \Big(\frac{v}{u}\Big)^{1/3} = u^{-1/3}v^{1/3} \quad , \quad y = u^{1/3}v^{2/3}.$$

Le calcul du jacobien $D(x,y)/D(u,v)$ donne :

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = J(u,v) = \begin{vmatrix} -1/3\,u^{-4/3}\,v^{1/3} & 1/3\,u^{-1/3}\,v^{-2/3} \\ 1/3\,u^{-2/3}\,v^{2/3} & 2/3\,u^{1/3}\,v^{-1/3} \end{vmatrix} = -\frac{3}{9u} = -\frac{1}{3u}.$$

En utilisant la formule de changement de variables dans les intégrales (formule (1.58) , Théorème 1.3 du cours), on trouve [1] :

$$\mathrm{Aire}(D) = \int\!\!\int_D dx\,dy = \frac{1}{3}\int\!\!\int_{[a,b]\times[c,d]} \frac{dudv}{u} = \frac{1}{3}\,(d-c)\,\ln(b/a)$$

si l'on utilise également le théorème de Fubini-Tonelli (Théorème 1.4 du cours).

Exercice 2.

Soit

$$\Delta_3 := \big\{(x,y,z)\,;\, x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x+y+z \leq 1\big\}.$$

Calculer l'intégrale

$$\int\!\!\int\!\!\int_{\Delta_3} \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3}.$$

1. On utilise ici la notation ln pour le logarithme népérien (on aurait pu tout autant utiliser la notation log).

Le domaine d'intégration Δ_3 est aussi défini par les conditions :

$$0 \le x \le 1, \quad x \le x+y \le 1, \quad x+y \le x+y+z \le 1.$$

On peut effectuer le changement de variables consistant à poser :

$$u = x, \quad v = x+y, \quad w = x+y+z.$$

Ce changement de variable réalise un C^1-difféomorphisme entre l'intérieur de Δ_3 et l'ouvert V défini par les conditions :

$$0 < u < v < w < 1.$$

Le jacobien de cette application linéaire inversible vaut d'ailleurs 1. La formule (1.58) de changement de variables dans les intégrales nous donne :

$$\iiint_{\Delta_3} \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3} = \iiint_V \frac{dudvdw}{(1+w)^3}.$$

On utilise ensuite le le théorème de Fubini-Tonelli (Théorème 1.4 du cours). L'intégrale vaut :

$$\int_{[0,1]} \left(\int_{[u,1]} \Big(\int_{[v,1]} \frac{dw}{(1+w)^3} \Big)\, dv \right) du.$$

Le calcul de cette intégrale donne :

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1]} \Big(\int_{[u,1]} \Big[-\frac{1}{2(1+w)^2} \Big]_v^1 dv \Big)\, du &= \int_{[0,1]} \left(\int_{[u,1]} \Big(-\frac{1}{8} + \frac{1}{2(1+v)^2} \Big)\, dv \right) du \\
&= \int_{[0,1]} \left(\frac{u-1}{8} - \frac{1}{2} \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+u} \Big) \right) du \\
&= \frac{1}{8} \int_{[0,1]} \frac{(1-u)^2}{1+u}\, du \\
&= \frac{1}{8} \int_{[0,1]} \Big(u - 3 + \frac{4}{1+u} \Big)\, du \\
&= \frac{1}{8} \Big[u^2 - 3u + 4\ln(1+u) \Big]_0^1 = \frac{2\ln 2 - 1}{4}.
\end{aligned}$$

Exercice 3.

1. *De tel type est l'EDO*

$$t^2y' + y + y^2 = 0$$

lorsque l'espace des états envisagé est $]0,\infty[\times]0,+\infty[$ *?*

Comme $t \neq 0$ en tout point de l'espace des états, on peut écrire l'équation sous la forme résoluble en y' :

$$y' = -\frac{1}{t^2}\,y - \frac{1}{t^2}\,y^2.$$

On reconnait une équation de Bernoulli avec ici $\alpha = 2$ (*cf.* la section 2.4.3 du cours). On l'intègre en posant $z = 1/y$.

2. *Déterminer, si* (t_0, y_0) *appartient à* $]0,\infty[\times]0,\infty[$*, la solution maximale* (I, y) *du problème de Cauchy :*

$$(t, y(t)) \in \mathbb{R}\times]0,\infty[\quad \text{et} \quad t^2y'(t) + y(t) + y^2(t) = 0$$
$$y(t_0) = y_0 \quad \text{(condition initiale).}$$

La nouvelle équation en $z = 1/y$ devient (après multiplication par z^2) :

$$z' = \frac{1}{t^2}\,(z+1).$$

En posant $Z = z + 1$, on trouve l'équation linéaire homogène

$$Z' = \frac{1}{t^2}\,Z,$$

dont la solution générale (si l'on convient que l'espace des états pour cette équation linéaire est $]0,\infty[\times\mathbb{R}$) est la fonction

$$Z_C : t \in]0,+\infty[\mapsto Ce^{-1/t}, \; C \in \mathbb{R}.$$

En posant

$$y = \frac{1}{z_c} = \frac{1}{Z_C - 1},$$

on trouve que lui correspond la fonction :

$$t \longmapsto y(t) = \frac{e^{1/t}}{C - e^{1/t}}.$$

Pour réaliser la condition initiale imposée, il faut prendre

$$C = C_0 = e^{1/t_0}(1 + y_0)/y_0.$$

On remarque que $\ln C_0 > 1/t_0$ car $y_0 > 0$. La solution du problème de Cauchy est alors définie sur l'intervalle ouvert $]1/\ln C_0, +\infty[$ par la formule :

$$\forall\, t \in]1/\ln C_0, +\infty[, \quad y(t) = \frac{e^{1/t}}{C_0 - e^{1/t}}.$$

3. *Soit* $a > 0$*. De quel type est l'EDO*

$$y^4(ay' + y) = t$$

envisagée avec espace des états $\mathbb{R}\times]0,\infty[$ *? Déterminer, étant donné* $t_0 \in \mathbb{R}$ *et* $y_0 > 0$*, la solution maximale* (I, y) *du problème de Cauchy :*

$$(t, y(t)) \in \mathbb{R}\times]0,\infty[\quad \text{et} \quad y^4(ay'(t) + y(t)) = t$$
$$y(t_0) = y_0 \quad \text{(condition initiale).}$$

Comme la coordonnée y ne s'annule pas dans l'espace des états, et que $a > 0$, l'équation se met sous la forme :

$$y' = -\frac{1}{a}\, y + \frac{t}{a}\, y^{-4}. \qquad (*)$$

C'est encore une équation de Bernoulli, avec $\alpha = -4$ (*cf.* la section 2.4.3 du cours). On pose donc $z = y^{1-\alpha} = y^5$. La nouvelle équation (en z) est obtenue en multipliant $(*)$ par y^4 et s'écrit :

$$z' = -\frac{5}{a}\, z + \frac{5t}{a}. \qquad (**)$$

La solution de cette équation linéaire $(**)$ se fait par la méthode de variation de la constante : la solution de l'équation homogène est donnée par :

$$z(t) = C \exp(-5t/a).$$

La variation de la constante C donne, si l'on reporte dans $(**)$,

$$C'(t) = \frac{5t}{a}\, \exp(5t/a),$$

soit

$$C(t) = (t - a/5)\, \exp(5t/a) + C.$$

La solution générale de l'équation $(*)$ est donc (si l'on prend pour espace des états ici $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$)

$$z_C : t \in \mathbb{R} \longmapsto t - a/5 + C\, \exp(-5t/a).$$

Pour résoudre le probléme de Cauchy posé, il faut choisir C de manière à ce que :

$$t_0 - a/5 + C\, \exp(-5t_0/a) = y_0^5,$$

soit

$$C = C_0 = (a/5 + y_0^5 - t_0)\, \exp(5t_0/5).$$

La solution du problème de Cauchy proposé est défini sur le plus grand intervalle I contenant t_0 sur lequel la fonction :

$$t \mapsto t - a/5 + C_0\, \exp(5t/a)$$

reste positive ; sur cet intervalle I, cette solution est alors la fonction :

$$t \in I \longmapsto \Big(t - a/5 + C_0\, \exp(5t/a)\Big)^{1/5}.$$

Exercice 4.

On considère l'EDO

$$\text{(C.1)} \qquad y''(t) - 3\, y'(t) + 2\, y(t) = e^t.$$

(envisagée avec espace des états $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$).

1. *Pourquoi les solutions maximales de cette EDO sont-elles définies sur $\mathbb{R}$ tout entier ?*

Il s'agit d'une équation linéaire. La propriété mentionnée ici résulte donc du critère de Grönwald (Proposition 2.2 du cours et exemple 2.3).

2. *Déterminer toutes les fonctions $t \in \mathbb{R} \mapsto y(t) \in \mathbb{R}$ de classe C^2 solutions de l'EDO homogène :*

$$y''(t) - 3\, y'(t) + 2\, y(t) = 0.$$

Pourquoi cet ensemble de fonctions est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ? Quelle est sa dimension ? En donner une base.

Les solutions de l'EDO homogène forment un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (toute combinaison linéaire de solutions est solution puisqu'il s'agit d'une EDO linéaire à coefficients constants). Du fait du théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz (voir aussi la section 2.4.2 du cours, ici $p = 2$), ce $\mathbb{R}$-espace vectoriel est de dimension 2. Pour trouver une base, on constate que l'équation caractéristique :

$$X^2 - 3X + 2 = 0$$

a deux racines réelles $X = 1$ et $X = 2$ et que donc les fonctions

$$y_1 : t \mapsto e^t, \quad y_2 : t \mapsto e^{2t}$$

sont solutions. Ce sont des solutions $\mathbb{R}$ linéairement indépendantes, car, pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, les deux vecteurs $(y_j(t_0), y_j'(t_0))$, $j = 1, 2$, sont linéairement indépendants. On dispose ainsi d'une base.

3. *Déterminer une solution particulière de l'EDO* (C.1) *en la cherchant sous la forme $t \mapsto (at + b)e^t$, où a et b sont deux constantes réelles que l'on déterminera.*

En écrivant que la fonction $t \mapsto (at+b)e^t$ est solution de l'EDO avec second membre, puis en divisant par e^t, on trouve :

$$(at + 2a + b) - 3(at + a + b) + 2(at + b) \equiv 1.$$

On doit donc prendre $a = -1$ pour que cela marche (le choix de b étant indifférent, par exemple, on choisit $b = 0$). La fonction $t \mapsto -te^{-t}$ est donc une solution particulière de l'EDO avec second membre.

4. *Déduire des questions **2** et **3** la solution du problème de Cauchy :*

$$(t, y(t)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad \text{et} \quad y''(t) - 3\,y'(t) + 2\,y(t) = e^t$$
$$y(t_0) = y_0 \quad \text{et} \quad y'(t_0) = y_0' \quad \text{(conditions initiales).}$$

La solution générale de l'EDO avec second membre est la somme de la solution particulière trouvée à lq question **3** et de la solution générale de l'EDO homogène. Elle s'exprime donc comme :

$$t \in \mathbb{R} \mapsto (\lambda - t)e^t + \mu e^{2t},$$

où λ et μ sont drux constantes réelles arbitraires. Pour trouver la solution du probème de Cauchy posé, il faut choisir ces constantes de manière à ce que :

$$\begin{aligned} \lambda_0 e^{t_0} + \mu_0 e^{2t_0} &= t_0 e^{t_0} + y_0 \\ \lambda_0 e^{t_0} + 2\mu_0 e^{2t_0} &= (t_0 + 1)e^{t_0} + y_0'. \end{aligned}$$

Ce système est de Cramer en les deux inconnues λ_0 et μ_0. Il admet une solution unique. La fonction

$$t \in \mathbb{R} \mapsto (\lambda_0 - t)e^t + \mu_0 e^{2t}$$

est alors la solution cherchée.

Exercice 5.

On considère la surface de $\mathbb{R}^3$ *définie par les conditions :*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{et} \quad z\geq 0,$$

a,b,c *désignant trois nombres strictement positifs.*

1. *Dessiner la surface* Σ.

Il s'agit de la surface d'un demi-ellipsoide de révolution dont les axes sont les axes de coordonnées. Les longueurs a, b, c figurent ici les longueurs des rayons suivant ces axes.

2. *Vérifier que la surface* Σ *est paramétrée de manière bijective par :*

$$\sigma\ : (s,t)\in[0,2\pi[\times[0,\pi/2]\longmapsto \big(a\cos s\cos t, b\sin s\cos t, c\sin t\big).$$

Soit S^+ la surface correspondant à l'hémisphère nord de la sphère de rayon 1 et de centre 0. En utilisant la longitude s (variant entre 0 et 2π, la valeur 2π exclue) et la latitude t (variant entre 0 et $\pi/2$), la surface S^+ se paramètre de manière bijective par :

$$(s,t)\in[0,2\pi[\times[0,\pi/2]\longmapsto \big(\cos s\cos t, \sin s\cos t, \sin t\big).$$

On observe ensuite que Σ se déduit de S^+ par la tranformation bijective :

$$(x,y,z)\longmapsto(ax,by,cz).$$

3. *Calculer la normale unitaire pointant dans la direction des* $z>0$ *au point courant* $\sigma(s,t)$ *de la surface* Σ.

On calcule :

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t}\wedge\frac{\partial\sigma}{\partial s}=\begin{pmatrix}-a\sin s\cos t\\ b\cos s\cos t\\ 0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-a\cos s\sin t\\ -b\sin s\sin t\\ c\cos t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}bc\cos s\cos^2 t\\ ac\sin s\cos^2 t\\ ab\sin t\cos t\end{pmatrix}.$$

Comme $\sin t\cos t\geq 0$ lorsque $t\in]0,\pi/2[$, ce vecteur est bien dirigé dans la direction des $z>0$. Le carré de la norme de ce vecteur vaut d'autre part :

$$a^2b^2\sin^2 t\cos^2 t+b^2c^2\cos^2 s\cos^4 t+a^2c^2\sin^2 s\cos^4 t=\cos^2 t\, N(t,s).$$

Le vecteur unitaire demandé est donc :

$$\vec{n}_{\text{ext}}(s,t)=\frac{1}{\cos t\times\sqrt{N(t,s)}}\begin{pmatrix}bc\cos s\cos t\\ ac\sin s\cos t\\ ab\sin t\end{pmatrix}.$$

4. *Calculer le flux du champ de vecteurs* $(x,y,z)\mapsto\vec{F}(x,y,z)=(0,0,z)$ *à travers la surface* Σ.

Ce flux est égal par définition, compte-tenu des calculs de la question **3**, à :

$$abc\iint_{[0,2\pi]\times[0,\pi/2]}\cos t\sin^2 t\, dsdt=\frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi/2}d[\sin^3 t]=\frac{2\pi abc}{3}.$$

ANNEXE D

Annales 2011-2012, Texte et corrigé de l'examen de session 2

Durée 3 heures. Polycopié de cours autorisé (à l'exception de tout autre document)

Exercice 1 *Pour chacune des deux intégrales doubles I_1 et I_2 suivantes :*

(1) représenter le domaine d'intégration $D \subset \mathbb{R}^2$;

(2) exprimer ce que devient l'expression de l'intégrale une fois interverti l'ordre d'intégration (c'est-à-dire lorsque que l'on effectue d'abord l'intégration en x à y fixé, puis dans un second temps l'intégration en y du résultat obtenu) ;

(3) préciser quelle hypothèse on doit faire sur la fonction f pour que cette intervertion des intégrations par rapport à x et à y soit justifiée.

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \Big(\int_{2x}^{3x} f(x,y)\, dy \Big)\, dx \\ I_2 &= \int_{a/2}^{a} \Big(\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)\, dy \Big)\, dx \qquad (a>0). \end{aligned}$$

(1) Le domaine d'intégration correspondant à I_1 est le triangle de sommets les trois points $(0,0)$, $(1,2)$ et $(1,3)$. Il est représenté sur la figure D.1 ci-dessous (figure de gauche). Le domaine d'intégration corrspondant à I_2 est l'intersection de la bande verticale $a/2 \leq x \leq a-$ avec le demi-disque de centre a et de rayon a situé dans le demi-plan $\{y > 0\}$, puisque l'équation de ce cercle est $(x-a)^2 + y^2 - a^2 = y^2 - (2ax - x^2) = 0$ (voir la figure D.1 ci dessous, figure de droite).

(2) Si l'on intervertit l'ordre d'intégration, la première intégrale I_1 devient :

$$I_1 = \int_0^2 \Big(\int_{y/3}^{y/2} f(x,y)\, dx \Big)\, dy + \int_2^3 \Big(\int_{y/3}^{1} f(x,y)\, dx \Big)\, dy$$

(ceci se voit immédiatement en examinant la figure). La seconde intégrale I_2 devient, elle :

$$I_2 = \int_0^{a\sqrt{3}/2} \Big(\int_{a/2}^{a} f(x,y)\, dx \Big)\, dx + \int_{a\sqrt{3}/2}^{a} \Big(\int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{a} f(x,y)\, dx \Big)\, dx.$$

Ceci se voit encore sur la figure : le point d'intersection du cercle d'équation $(x-a)^2+y^2-a^2 = y^2-(2ax-x^2) = 0$ avec la droite verticale $x = a/2$ est en effet le point $(a/2, a\sqrt{3}/2)$; d'autre part, l'expression de x en fonction de y le long du cercle de centre a et de rayon a lorsque $x \leq a$ est $x = a - \sqrt{a^2 - y^2}$.

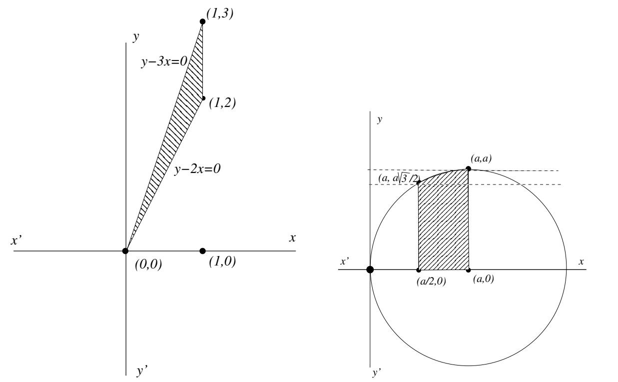


FIGURE D.1. Domaines d'intégration pour I_1 (à gauche) et I_2 (à droite)

(3) Dans les deux cas, pour que le Théorème de Fubini (Théorème 1.5 du cours) s'applique (pour justifier les intervertions de limites), il faut que l'intégrale

$$\iint_D |f(x,y)|\,dxdy$$

soit finie (D désinant dans les deux cas le domaine d'intégration). Cette condition est (par exemple) remplie si $|f|$ est bornée sur ce domaine D, en particulier dans le cas où f est continue sur D.

Exercice 2.

1. *Justifier le fait que la fonction*

$$(x,y) \in [0,1] \times [0,+\infty[\longmapsto e^{-y}\sin(2xy)$$

soit intégrable au sens de Lebesgue sur $[0,1]\times[0,+\infty[$.

La fonction en question est dominée en module par la fonction $(x,y)\mapsto e^{-y}$ dans le domaine d'intégration $[0,1]\times[0,+\infty[$ puisque $|\sin(2xy)|\leq 1$ pour tout $x,y\in\mathbb{R}$. Or, d'après le Théorème de Fubini-Tonelli, on a

$$\iint_{[0,1]\times[0,+\infty[} e^{-y}\,dxdy = \int_0^1 \Big(\int_0^{+\infty} e^{-y}\,dy\Big)\,dx = 1 < +\infty.$$

Le critère de domination (Remarque 1.6 du cours) s'applique et la fonction en question est bien intégrable sur $[0,1]\times[0,+\infty[$, car dominée sur ce sous-ensemble (mesurable) par une fonction intégrable sur ce sous-ensemble.

2. *En utilisant judicieusement le théorème de Fubini (intégration dans un premier temps par rapport à y, puis dans un second temps par rapport à x) en même temps qu'en justifiant pourquoi son application ici est licite, vérifier la formule :*

$$\iint_{[0,1]\times]0,+\infty[} e^{-y}\sin(2xy)\,dx\,dy = \frac{\log 5}{4}. \qquad (*)$$

Comme la clause d'application du Théorème de Fubini (Théorème 1.5 du cours) est remplie (d'après la question 1), on a

$$\iint_{[0,1]\times]0,+\infty[} e^{-y}\sin(2xy)\,dx\,dy = \int_0^1 \Big(\int_0^\infty e^{-y}\sin(2xy)\,dy\Big)\,dx$$

$$(\text{D.1}) \qquad = \int_{[0,1]}\Big(\int_{[0,+\infty[}\Big(\frac{e^{-y(1-2xi)}-e^{-y(1+2xi)}}{2i}\Big)\,dy\Big)\,dx.$$

Or, d'après le Théorème de convergence dominée de Lebesgue (Théorème 1.2 du cours), on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$ (donc en particulier pour tout $x \in [0,1]$)

$$\begin{aligned}\int_{[0,\infty[} e^{-y(1\pm 2ix)}\,dy &= \lim_{Y\to+\infty}\int_0^Y e^{-y(1\pm 2ix)}\,dy\\ &= \lim_{Y\to+\infty}\Big[-\frac{e^{-y(1\pm 2ix)}}{1\pm 2ix}\Big]_0^Y = \frac{1}{1\pm 2ix}.\end{aligned}$$

On observe, après simplification, que :

$$\frac{1}{2i}\Big(\frac{1}{1-2ix}-\frac{1}{1+2ix}\Big) = \frac{2x}{1+4x^2}.$$

On a donc, en reportant au membre de droite de la formule (D.1) :

$$\iint_{[0,1]\times]0,+\infty[} e^{-y}\sin(2xy)\,dx\,dy = \int_0^1 \frac{2x}{1+4x^2}\,dx = \Big[\frac{\log(1+4x^2)}{4}\Big]_0^1 = \frac{\log 5}{4}.$$

3. *En exprimant différemment l'intégrale double* $(*)$*, déduire du résultat établi au (**2**) la convergence et la valeur numérique de l'intégrale*

$$I = \int_0^\infty e^{-y}\,\frac{1-\cos(2y)}{y}\,dy.$$

Puisque le Théorème de Fubini (Théorème 1.5 du cours) s'applique ici (voir la question 1), on peut aussi écrire l'intégrale double

$$\iint_{[0,1]\times]0,+\infty[} e^{-y}\sin(2xy)\,dx\,dy$$

en sommant par rapport à x d'abord, puis par rapport à y ensuite, ce qui donne :

$$\begin{aligned}\iint_{[0,1]\times]0,+\infty[} e^{-y}\sin(2xy)\,dx\,dy &= \int_{[0,\infty[}\Big(\int_{[0,1]} e^{-y}\,\sin(2xy)\,dx\Big)\,dy\\ &= \int_{]0,+\infty[} e^{-y}\Big(\int_{[0,1]}\sin(2xy)\,dx\Big)\,dy\\ &= \int_{]0,+\infty[} e^{-y}\Big[\frac{\cos(2xy)}{2y}\Big]_0^1\,dy\\ &= \int_{]0,+\infty[} e^{-y}\,\frac{1-\cos(2y)}{2y}\,dy.\end{aligned}$$

Comme le membre de gauche de cette formule vaut $(\log 5)/4$ (d'après la question 2), on a

$$I = \int_0^\infty e^{-y}\,\frac{1-\cos(2y)}{y}\,dy = 2\times\frac{(\log 5)}{4} = \frac{\log 5}{2}.$$

Exercice 3. *Soient α et β deux nombres réels strictement positifs.*

1. *Représenter sur une figure le domaine plan $D_{\alpha,\beta}$ défini dans $\mathbb{R}^2$ par les conditions $y^2 - \alpha x \leq 0$ et $x^2 - \beta y \leq 0$.*

La courbe plane d'équation $x = y^2/\alpha$ est une parabole de sommet l'origine et d'axe de symétrie la demi-droite $0x$, tandis que la courbe plane $y = x^2/\beta$ est une parabole de sommet toujours l'origine, mais d'axe de symétrie cette fois la demi-droite Oy. Les points d'intersection de ces deux paraboles sont l'origine et le point $A(\alpha, \beta)$ de coordonnées $x = \alpha^{1/3}\beta^{2/3}$ et $y = \alpha^{2/3}\beta^{1/3}$. Le domaine $D_{\alpha,\beta}$ est représenté (hachuré) sur la figure D.2 ci-dessous.

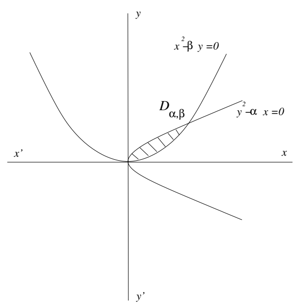


FIGURE D.2. La « lentille » entre deux paraboles $D_{\alpha,\beta}$ (exercice 3)

2. *En utilisant le changement de variables consistant à poser, lorsque x et y sont deux nombres réels strictement positifs $x = u^2v, y = uv^2$, calculer en fonction de α et β la valeur de l'intégrale double*

$$\iint_{D_{\alpha,\beta}} \exp\Big(-\frac{x^3+y^3}{xy}\Big)\, dxdy$$

(on justifiera pourquoi la formule de changement de variables dans les intégrales de Lebesgue s'applique).

L'application $(u,v) \mapsto (u^2v, uv^2)$ est un C^1 difféomorphisme du premier quadrant $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ dans lui-même. En effet, le système d'équations

$$x = u^2v,\ y = uv^2,\ u > 0, v > 0$$

(lorsque $x > 0$ et $y > 0$) admet l'unique solution

$$u = x^{2/3}y^{-1/3},\ v = y^{2/3}v^{-1/3}.$$

Les applications

$$(u,v) \mapsto (u^2v, uv^2) \quad , \quad (x,y) \mapsto (x^{2/3}y^{-1/3}, y^{2/3}x^{-1/3})$$

sont toutes les deux de classe C^∞ sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ et inverses l'une de l'autre (comme applicatiuons du premier quadrant $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ dans lui-même). Le jacobien de l'application

$$(u,v) \mapsto (u^2v, uv^2) = (x,y)$$

vaut

$$\begin{vmatrix} 2uv & u^2 \\ v^2 & 2uv \end{vmatrix} = 3u^2v^2 > 0.$$

Les hypothèses de la formule de changement de variable dans les intégrales de Lebesgue (Théorème 1.3 du cours) sont ici remplies (on prend $A = \Phi^{-1}(\mathrm{int}(D_{\alpha,\beta}))$ et $B = \mathrm{int}(D_{\alpha,\beta})$, où int désigne l'opération de prise d'intérieur. Le domaine A est décrit par les conditions

$$\Big(y^2 = u^2v^4 \leq \alpha x = \alpha u^2 v\Big) \Longleftrightarrow v \leq \alpha^{1/3}$$

et

$$\Big(x^2 = u^4v^2 \leq \beta y = \beta u v^2\Big) \Longleftrightarrow u \leq \beta^{1/3}.$$

La formule de changement de variables dans les intégrales de Lebesgue (Théorème 1.3 du cours) , suivie de l'application du Théorème de Fubini-Tonelli (Théorème 1.4 du cours), donne donc ici :

$$\begin{aligned}\iint_{D_{\alpha,\beta}} \exp\Big(-\frac{x^3+y^3}{xy}\Big)\,dxdy &= 3\int\int_{\substack{0\leq u\leq \beta^{1/3}\\ 0\leq v\leq \alpha^{1/3}}} \exp(-u^3-v^3)\,u^2v^2\,dudv \\ &= 3\Big[-\frac{\exp(-u^3)}{3}\Big]_0^{\beta^{1/3}} \times \Big[-\frac{\exp(-v^3)}{3}\Big]_0^{\alpha^{1/3}} \\ &= \frac{(1-e^{-\alpha})(1-e^{-\beta})}{3}.\end{aligned}$$

Exercice 4. *On considère l'équation différentielle du second ordre*

$$y''(t) - 4\,y'(t) + 13\,y(t) = \cos t, \qquad (\dagger)$$

où l'espace des états est ici $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

1. *Donner une base de l'espace des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène*

$$y''(t) - 4y'(t) + 13y(t) = 0$$

dans $\mathbb{R}$.

Les racines de l'équation (caractéristique) du second degré

$$z^2 - 4z + 13 = 0$$

sont $2-3i$ et $2+3i$ car le discriminant réduit de ce trinôme vaut $4-13 = -9 = (3i)^2$. Une base de l'espace des solutions de l'équation homogène dans $\mathbb{C}$ est donnée par

$$t \mapsto e^{(2+3i)t}, \quad t \mapsto e^{(2-3i)t}.$$

Une base de l'espace des solutions de l'équation homogène dans $\mathbb{R}$ est donc donnée par

$$t \mapsto e^{2t}\cos(3t), \quad t \mapsto e^{2t}\,\sin(3t).$$

2. *Exhiber une solution particulière* $\varphi\ :\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *de l'équation* $(\dagger)$.

L'opérateur différentiel $d^2/dt^2 - 4d/dt + 13\mathrm{Id}$ transforme $t\mapsto e^{i\omega t}$ en

$$t \mapsto (-\omega^2 - 4i\omega + 13)e^{i\omega t}.$$

En particulier, si $\omega = 1$ et $\omega = -1$, on trouve respectivement :

$$\begin{aligned}\Big(d^2/dt^2 - 4d/dt + 13\,\mathrm{Id}\Big)[e^{it}] &= 4(3-i)\,e^{it} \\ \Big(d^2/dt^2 - 4d/dt + 13\,\mathrm{Id}\Big)[e^{-it}] &= 4(3+i)\,e^{-it}.\end{aligned}$$

Une solution particulière de l'équation (†) est donc donnée par

$$y(t) = \frac{1}{8}\Big(\frac{e^{it}}{3-i} + \frac{e^{-it}}{3+i}\Big) = \frac{1}{4}\,\mathrm{Re}\Big[\frac{e^{it}}{3-i}\Big] = \frac{3\cos(t)-\sin(t)}{40}.$$

3. *Soient y_0 et y_0' deux nombres réels. Donner l'expression de la solution $t\in\mathbb{R}\mapsto y(t)$ du problème de Cauchy suivant :*

$$y''(t) - 4y'(t) + 13y(t) = \cos t \quad \text{avec conditions initiales : } \ y(1) = y_0,\ y'(1) = y_0'.$$

La solution du problème de Cauchy avec conditions initiales posé ici doit être de la forme

$$y(t) = e^{2t}(\lambda\cos(3t) + \mu\sin(3t)) + \frac{3\cos(t)-\sin(t)}{40},$$

où λ et μ sont deux constantes réelles à déterminer. Ces constantes s'obtiennent en injectant les deux conditions initiales imposées au point $t=1$, c'est-à-dire en résolvant ici le système de Cramer en les inconnues (λ,μ) :

$$\begin{aligned}\cos(3)\,\lambda + \sin(3)\,\mu &= \frac{1}{e^2}\Big(y_0 - \frac{3\cos(1)-\sin(1)}{40}\Big)\\ (2\cos(3)-3\sin(3))\,\lambda + (2\sin(3)+3\cos(3))\,\mu &= \frac{1}{e^2}\Big(y_0' + \frac{3\sin(1)+\cos(1)}{40}\Big).\end{aligned}$$

Le déterminant de ce système linéaire aux inconnues λ,μ vaut

$$3\left((\cos(3))^2 + (\sin(3))^2\right) = 3\ ;$$

il est donc non nul et le système a une et une seule solution (λ,μ) que l'on exprlicite avec les formules de Cramer.

Exercice 5. *Soit l'équation différentielle*

$$t^4(y'(t) + y^2(t)) = 1 \qquad (\star)$$

envisagée dans tout cet exercice avec espace des états $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$.

1. *À quel type d'EDO cette équation différentielle se rattache-t-elle ?*

Cette équation s'écrit, puisque t ne s'annule pas dans l'espace des états :

$$y'(t) = \frac{1}{t^4} - y^2(t)$$

C'est donc une équation du type de Riccatti avec $c(t)\equiv 1/t^4$, $b(t)\equiv 0$ et $a(t)\equiv -1$ (voir la section 2.4.4 du cours).

2. *Déterminer des réels a et b tels que la fonction $\varphi : t\mapsto a/t + b/t^2$ soit solution de $(\star)$ sur $]0,+\infty[$.*

On a

$$\varphi'(t) = -a/t^2 - 2b/t^3.$$

En reportant, on voit que φ vérifie l'équation différentielle de Riccatti $(\star)$ si et seulement si

$$a(a-1)\,t^2 + 2b(a-1)\,t + b^2 \equiv 1.$$

Le choix de $a=1$ et $b=1$ convient. On prend donc $\varphi(t) = 1/t + 1/t^2$.

3. *En introduisant le changement de fonction inconnue consistant à poser $y(t) = \varphi(t) + 1/z(t)$, φ étant la fonction définie au* **(2)***, montrer que la résolution de l'équation $(\star)$ en y se ramène à la résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre en z.*

On a
$$\varphi'(t) - \frac{z'(t)}{z^2(t)} = \frac{1}{t^4} - (\varphi(t))^2 - \frac{1}{(z(t))^2} - 2\,\frac{\varphi(t)}{z(t)}.$$
Comme φ est solution particulière de l'EDO $(\star)$, il reste juste, après multiplication par la fonction $(z(t))^2$:
$$z'(t) = 1 + 2\,\varphi(t)\,z(t).$$
Si l'équation de Riccati $(\star)$ est posée avec comme espace des états l'ouvert
$$U := \Big\{(t,y) \in]0,\infty[\times\mathbb{R}\,;\; y - \varphi(t) \neq 0\Big\},$$
il est licite de poser
$$y(t) - \varphi(t) = 1/z(t)$$
et la résolution de l'EDO $(\star)$ lorsque U est pris comme espace des états se ramène bien à la résolution de l'EDO linéaire du premier ordre :
$$z'(t) = 1 + 2\,\varphi(t)\,z(t).$$

4. *Soit $t_0 > 0$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, avec $y_0 \neq \varphi(t_0)$, φ étant toujours la fonction définie au* **(2)**. *Déterminer en fonction de t_0 et y_0 l'expression, ainsi que l'intervalle de vie, de la solution du problème de Cauchy :*
$$t^4(y'(t) + y^2(t)) = 1 \quad \text{avec condition initiale : } y(t_0) = y_0.$$

On a
$$y_0 - \varphi(t_0) = y_0 - 1/t_0 - 1/t_0^2 = \frac{t_0^2 y_0 - t_0 - 1}{t_0^2}.$$
On pose donc
$$z_0 = z_0(t_0, y_0) := \frac{1}{y_0 - \varphi(t_0)} = \frac{t_0^2}{t_0^2 y_0 - t_0 - 1}.$$
La solution générale de l'équation linéaire sans second membre
$$z'(t) - 2\,\varphi(t)\,z(t) = 0$$
au voisinage de t_0 est
$$z(t) = C\,t^2 e^{-2/t}, \quad \text{où } C \in \mathbb{R}$$
(puisque $z'(t)/z(t) = (\log|z(t)|)' = 2/t + 2/t^2 = (2\log|t| - 2/t)'$). La méthode de variation des constantes (voir la section 2.4.1 du cours), pour calculer la solution que l'on cherche, conduit à intégrer $C'(t)\,t^2 e^{-2/t} = 1$, soit
$$C'(t) = \frac{1}{t^2}\,e^{2/t}$$
avec la condition initiale $C(t_0)\,t_0^2\,e^{-2/t_0} = z_0$, soit
$$C(t) = z_0 \frac{e^{2/t_0}}{t_0^2} + \int_{t_0}^{t} \frac{e^{2/\tau}}{\tau^2}\,d\tau = z_0 \frac{e^{2/t_0}}{t_0^2} + \Big[\frac{-e^{2/\tau}}{2}\Big]_{t_0}^{t}.$$
La solution cherchée est donc la fonction définie par
$$y(t) = \varphi(t) + \frac{1}{z_{y_0}(t)},$$
où
$$z_{y_0}(t) = t^2 e^{-2/t} \times \Big(z_0 \frac{e^{2/t_0}}{t_0^2} + \frac{e^{2/t_0} - e^{2/t}}{2}\Big).$$

Si l'on pose

$$K_{t_0,y_0} = z_0 \frac{e^{2/t_0}}{t_0^2} + \frac{e^{2/t_0}}{2},$$

la fonction z_{y_0} s'écrit

$$z_{y_0}(t) = t^2 e^{-2/t}\Big(K_{t_0,y_0} - \frac{e^{2/t}}{2}\Big).$$

L'intervalle de vie de la solution cherchée y est le plus grand intervalle ouvert contenant t_0 sur laquelle la fonction z_{y_0} ainsi trouvée ne s'annule pas, c'est à dire le plus grand intervalle ouvert contenant t_0 sur lequel

$$2K_{t_0,y_0} - \exp(2/t)$$

ne s'annule pas. Deux cas sont à distinguer :

— si $K_{t_0,y_0} \leq 1/2$, cet intervalle de vie est $]0,+\infty[$ (car on a $e^{2/t} > 1$ pour tout $t > 0$) ;

— si l'on a $K_{t_0,y_0} > 1/2$, l'intervalle de vie doit admettre nécessairement comme borne le nombre $\tau = 2/\log(2\,K_{t_0,y_0}) > 0$ (qu'il ne saurait contenir). C'est alors le plus grand intervalle ouvert contenant t_0 et ne contenant pas ce nombre $2/\log(2\,K_{t_0,y_0}) > 0$; cet intervalle de vie se trouve limité alors par le fait que cette valeur $2/\log(2\,K_{t_0,y_0})$ doit en être une borne (d'un côté ou de l'autre de t_0).

Exercice 6. *Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. *Soit Σ la surface de $\mathbb{R}^3$ définie par les conditions $x^2 + y^2 = 1$ et $0 \leq z \leq 3$. Calculer l'intégrale de la fonction $(x,y,z) \mapsto x+1$ sur la surface Σ (par rapport à la mesure de Lebesgue sur cette surface), c'est-à-dire, avec les notations du cours :*

$$\iint_\Sigma (x+1)\, d[\mathrm{vol}_{2,\Sigma}].$$

La surface sur laquelle on intègre est une portion de cylindre. Elle est paramétrée par $\theta \in [0,2\pi]$ et $z \in [1,3]$ par

$$x = \cos(\theta),\ \ y = \sin(\theta),\ \ z = z.$$

Soit

$$\sigma\ : (\theta, z) \mapsto \big(\cos(\theta), \sin(\theta), z\big).$$

On a

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\theta} \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial z} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$d[\mathrm{vol}_{2,\Sigma}](\theta, z) = \left\| \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \right\| d\theta dz = d\theta\, dz.$$

On a donc

$$\iint_\Sigma (x+1)\, d[\mathrm{vol}_{2,\Sigma}] = \int_1^3 \int_0^{2\pi} (r\cos\theta + 1)\, d\theta dz = 4\pi.$$

2. *En utilisant la formule de Green-Ostrogradski, calculer le flux au travers de la demi-sphère $\{x^2+y^2+z^2=1\,,\ z\geq 0\}$, la normale pointant vers les $z>0$, du champ de vecteurs $\vec{F}(x,y,z)=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}-z\,\vec{k}$.*

La divergence de ce champ de vecteurs $\vec{F}=(P,Q,R)$ est constante et égale à

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\equiv 1.$$

D'après la formule de Green-Ostrogradski (Théorème 1.9 du cours), le flux sortant à calculer est égal à l'intégrale triple de la divergence du champ dans la demi-sphère (pleine) $\{x^2+y^2+z^2\leq 1\,;\,z\geq 0\}$. Comme la divergence du champ $\vec{F}$ est constante et égale à 1, le flux à calculer est égal au volume de cette hémisphère, soit $2\pi/3$.

3. *Vérifier que la courbe paramétrée par*

$$\theta\in[0,2\pi]\longmapsto(\cos^3\theta,\sin^3\theta) \qquad (**)$$

(que l'on appelle une astroïde) est une courbe fermée (on dit aussi un lacet) qui n'a pas de point double (c'est-à-dire que le paramétrage $(**)$ restreint à $[0,2\pi[$ est injectif) et enserre donc un domaine borné D du plan. Vérifier que l'aire A de ce domaine D est égale à l'intégrale curviligne

$$A=\frac{1}{2}\int_\gamma (xdy-ydx).$$

Calculer la valeur de A.

Comme l'application $x\mapsto x^3$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans lui-même et que $\theta\in[0,2\pi[\mapsto(\cos(\theta),\sin(\theta))\in\mathbb{R}^2$ est une application injective, l'application

$$\theta\in[0,2\pi[\mapsto M(\theta)=\big((\cos(\theta))^3,(\sin(\theta))^3\big)$$

est injective : en effet, si $M(\theta_1)=M(\theta_2)$, avec $0\leq\theta_1,\theta_2<2\pi$, on a $\cos(\theta_1)=\cos(\theta_2)$ et $\sin(\theta_1)=\sin(\theta_2)$, donc $\theta_1=\theta_2$. L'astroïde ainsi paramétrée n'a donc pas de point double. Le calcul de l'aire du domaine D enserré par cette courbe se fait en utilisant la formule de Stokes (voir l'exemple 1.19 du cours). On a

$$A=\mathrm{Aire}(D)=\int_\gamma (x\,dy)=\int_\gamma(-y\,dx)=\frac{1}{2}\int_\gamma(x\,dy-y\,dx)$$

si $\gamma:\theta\in[0,2\pi]\longmapsto(\cos^3\theta,\sin^3\theta)$. On a donc, puisque

$$dy=3(\sin(\theta))^2\,\cos(\theta)\,d\theta,\quad dx=-3(\cos(\theta))^2\,\sin(\theta)\,d\theta,$$

et donc

$$x\,dy-y\,dx=(\cos(\theta))^2(\sin(\theta))^2\,d\theta$$

le long du chemin paramétré γ. On en déduit :

$$A=\frac{3}{8}\int_0^{2\pi}(\sin(2\theta))^2\,d\theta=\frac{3}{16}\int_0^{4\pi}(\sin(u))^2\,du=\frac{3\pi}{8}.$$

ANNEXE E

Annales 2012-2013, Texte et corrigé du DS

Durée 1 heure 30. Polycopié de cours autorisé (à l'exception de tout autre document)

Exercice 1 (questions de cours).

(1) *Rappelez ce que signifie le fait qu'un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ est mesurable (au sens de Lebesgue) ? Tous les sous-ensembles E de $\mathbb{R}$ sont-ils mesurables ? Si ce n'est pas le cas, est-il aisé d'expliciter un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui ne soit pas mesurable (au sens de Lebesgue) ?*

Un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est dit *intégrable* s'il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, un compact K_ε de $\mathbb{R}$ et un ouvert O_ε de $\mathbb{R}$ tels que la mesure de $O_\varepsilon \setminus K_\varepsilon$ (calculée comme l'inf des mesures des ouverts cet ensemble) soit inférieure ou égale à ε. L'ensemble E est dit *mesurable* si son intersection avec tout segment $[-R, R]$ (pour tout $R > 0$) est intégrable. Il existe des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ non mesurables (le paradoxe de Banach-Tarski le révèle), mais en exhiber un nécessite d'invoquer l'axiome du choix [1]. Un tel sous-ensemble non-mesurable de $\mathbb{R}$ n'est donc pas concrètement « explicitable ».

(2) *Soit $I = [a, b]$ (avec $a < b$ réels) un segment de $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction « explicitable » (ou aussi « mesurable » au sens de Lebesgue), c'est-à-dire telle que l'image réciproque $f^{-1}(I)$ de tout intervalle I de $\mathbb{R}$ soit un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}$ (au sens de Lebesgue). Que signifie le fait que f soit intégrable au sens de Lebesgue sur $[a, b]$ et comment est définie alors l'intégrale*

$$\int_{[a,b]} f(t)\, dt$$

au sens de Lebesgue ? (répondez à cette question d'abord le cas où f prend ses valeurs uniquement dans $[0, \infty[$, puis ensuite dans le cas où f est de signe quelconque sur $[a, b]$).

Si f est une fonction mesurable positive sur $[a, b]$, on dit que f est intégrable au sens de Lebesgue sur $[a, b]$ si

$$\sup_{h>0} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} kh \, \mathrm{Vol}_1 \Big\{ t \in [a, b]\,;\, f(t) \in [kh, (k+1)h[\Big\} \Big) < +\infty.$$

L'intégrale de Lebesgue $\int_{[a,b]} f(t)\, dt$ de f sur $[a, b]$ est alors définie comme cette borne supérieure. Si f est mesurable de signe quelconque, f est dite

1. Étant donnée une collection $(A_\iota)_\iota$ de sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}$, il existe un processus de choix permettant de « choisir » un élément x_ι dans chacun des sous-ensembles A_ι. Si l'ensemble d'indexation de la famille $(A_\iota)_\iota$ est fini ou infini dénombrable, ceci se fait sans problème algorithmiquement, mais si ce n'est pas le cas, il faut admettre (c'est un axiome) qu'un tel processus de choix est implémentable. De toutes manières, il ne pourra jamais l'être « explicitement ».

intégrable sur $[a,b]$ si les deux fonctions positives $f^+ := \sup(f,0)$ et $f^- := \sup(-f,0)$ le sont ; l'intégrale de Lebesgue $\int_{[a,b]} f(t)\,dt$ de f sur $[a,b]$ est alors définie comme la différence des intégrales de Lebesgue de f^+ et f^- (fonctions mesurables positives sur $[a,b]$) sur $[a,b]$.

(3) *Soit $f\ : [a,b] \to \mathbb{R}$ comme dans la question* **2**. *On suppose de plus f bornée en valeur absolue sur $[a,b]$. Que signifie le fait que f soit intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$? Explicitez un procédé numérique classique permettant de calculer de manière approchée (lorsque $f\ : [a,b] \to \mathbb{R}$ est supposée continue) la valeur de l'intégrale au sens de Riemann $\int_a^b f(t)\,dt$.*

Dire que f est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$ (f étant supposée réelle et bornée en valeur absolue sur $[a,b]$, comme c'est le cas ici) signifie que, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver des fonctions *en escalier* φ_ε et ψ_ε sur $[a,b]$, encadrant la fonction f sur $[a,b]$ (*i.e.*, $\varphi_\varepsilon(t) \leq f(t) \leq \psi_\varepsilon(t)$ pour tout $t \in [a,b]$) et telles que

$$\int_a^b (\psi_\varepsilon(t) - \varphi_\varepsilon(t))\,dt \leq \varepsilon \quad \forall\, \varepsilon > 0$$

(*cf.* le cours d'Analyse 1 en S2). Lorsque f est continue, la *méthode des trapèzes*[2]

$$\int_a^b f(t)\,dt \simeq \frac{b-a}{N}\Big(\frac{f(a)}{2} + \sum_{j=1}^{N-1} f(a + j(b-a)/N) + \frac{f(b)}{2}\Big)$$

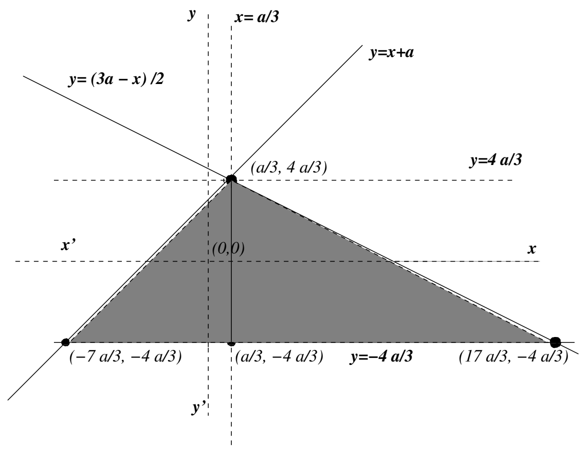
(lorsque N tend vers $+\infty$) fournit le procédé numérique le plus clasique pour calculer l'intégrale de Riemann d'une fonction continue $f\ : [a,b] \to \mathbb{R}$.

(4) *Une fonction $f\ : [a,b] \to \mathbb{R}$, explicitable et bornée en valeur absolue sur $[a,b]$, est-elle intégrable au sens de Lebesgue sur $[a,b]$? Est-elle intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$? Justifiez chaque fois votre réponse avec un exemple dès que cette réponse s'avère négative.* La réponse à la première question est oui en vertu de la clause de domination (Remarque **??** du cours) puisqu'une fonction positive constante sur $[a,b]$ est intégrable au sens de Lebesgue sur ce segment. La réponse à la seconde question est en revanche non : la fonction valant 1 lorsque x est rationnel, 0 sinon, n'est pas intégrable au sens de Riemann sur $[0,1]$ (voir le cours d'Analyse 1, exemple 3.2 du polycopié en ligne de ce cours) ; comme c'est une fonction positive bornée par 1, elle est en revanche intégrable au sens de Lebesgue sur $[0,1]$ (d'intégrale de Lebesgue nulle sur $[0,1]$ car les nombres rationnels constituent un sous-ensemble de mesure de Lebesgue nulle sur $[0,1]$ puisqu'il s'agit d'un sous-ensemble dénombrable de $[0,1]$).

Exercice 2. *Pour les deux intégrales données ci-dessous (la fonction f étant chaque fois supposée bornée), dites pourquoi on peut renverser l'ordre d'intégration et faites le explicitement en dessinant d'abord dans les deux cas le domaine $E \subset \mathbb{R}^2$ sur lequel*

---

2. Voir la section 3.4.2 dans le polycopié du cours d'Analyse 1 `http://www.math.u-bordeaux1.fr/~yger/analyse1.pdf` en ligne. Plus généralement, pour tout ce qui concerne l'intégration au sens de Riemann, vous pouvez vous référer au chapitre 3 de ce polycopié.



porte l'intégration de f, considérée comme une fonction des deux variables x et y :

$$\int_{-4a/3}^{4a/3}\Big(\int_{y-a}^{3a-2y} f(x,y)\,dx\Big)\,dy \quad \text{(lorsque } a>0 \text{ est un paramètre fixé) ;}$$

$$\int_0^4 \left(\chi_{[0,1]}(x)\int_{-\sqrt{x}}^{(2|x|)^{1/3}} f(x,y)\,dy + \chi_{[1,4]}(x)\int_{x-2}^{(2|x|)^{1/3}} f(x,y)\,dy\right)dx$$

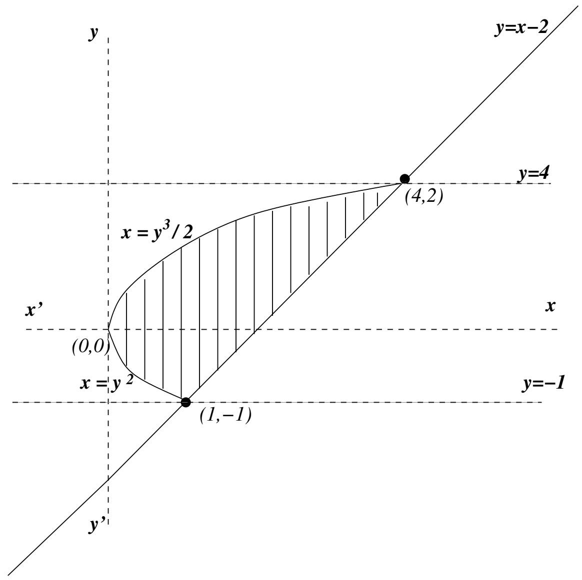
(*on rappelle que, si E est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, χ_E désigne la fonction valant* 1 *sur E et* 0 *sur $\mathbb{R}\setminus E$*).

`Première intégrale.` Le domaine sur lequel s'effectue la première intégration (double) est le domaine borné entre les deux droites d'équations respectives $y=x+a$ et $y=(3a-x)/2$ et les droites horizontales d'équations $y=-4a/3$ et $y=4a/3$. Or les deux droites d'équations $y=x+a$ et $y=(3a-x)/2$ se coupent précisément au point d'abscisse x_0 telle que $x_0-a=(3a-x_0)/2$, *i.e.* $3x_0/2=a/2$, soit $x_0=a/3$, et d'ordonnée $y_0=x_0+a=4a/3$. Les points d'intersection de la droite d'équation $y=-4a/3$ avec respectivement les droites d'équation $y=x+a$ et $y=(3a-x)/2$ ont pour abscisses respectives $x=-4a/3-a=-7a/3$ et $x=17a/3$. Le domaine d'intégration (en (x,y)) est le domaine en grisé sur la figure ci-dessous.

Comme f est bornée sur le domaine d'intégration (qui est aussi borné), on peut intervertir l'intégration par rapport à x et l'intégration par rapport à y du fait du Théorème de Fubini (théorème 1.5 du polycopié). L'intégrale devient donc :

$$\int_{-7a/3}^{a/3}\Big(\int_{-4a/3}^{x+a} f(x,y)\,dy\Big)\,dx + \int_{a/3}^{17a/3}\Big(\int_{-4a/3}^{(3a-x)/2} f(x,y)\,dy\Big)\,dx.$$

`Seconde intégrale.` Le domaine sur lequel s'effectue la seconde intégration est le domaine limité inférieurement par le graphe de la parabole d'équation $y=-\sqrt{x}$ au dessus de $x\in[0,1]$, puis par la droite affine d'équation $y=x-2$ au dessus de $x\in]1,4]$ (notons que la parabole et la droite se coupent au point $(1,-1)$) ; il est limité supérieurement par le graphe de la cubique d'équation $y=(2x)^{1/3}$ au dessus de $x\in[0,4]$. On note que le point $(4,2)$ est un point d'intersection de cette cubique



avec la droite affine d'équation $y = x - 2$. Le domaine d'intégration (en (x, y)) est cette fois le domaine hachuré sur la figure ci-dessous.

Comme f est bornée sur le domaine d'intégration (qui est aussi borné), on peut intervertir l'intégration par rapport à x et l'intégration par rapport à y du fait du Théorème de Fubini (théorème **??** du polycopié). L'intégrale devient donc :

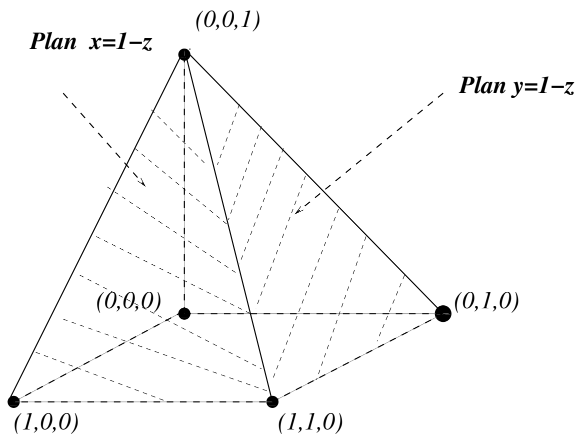
$$\int_{-1}^{0} \Big(\int_{y^2}^{y+2} f(x,y)\,dx \Big)\,dy + \int_{0}^{2} \Big(\int_{y^3/2}^{y+2} f(x,y)\,dx \Big)\,dy.$$

Exercice 3. *Soit G le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par :*

$$G := \Big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x + z \leq 1,\ y + z \leq 1 \Big\}.$$

(1) *Dessinez le domaine G sur un schéma (en perspective) en trois dimensions (précisez bien dans un premier temps les équations des plans affines intervenant dans la description de la frontière de ce domaine). Le domaine G est-il borné ?*

Le domaine G est une pyramide (pentaèdre, *i.e.* polyèdre convexe à cinq faces, de sommets les cinq points $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ et $(0,1,1)$, la « base » étant le carré $[0,1] \times [0,1]$ du plan « horizontal » $x0y$. Les équations des plans affines intervenant dans la frontière du domaine G sont, outre les trois plans de coordonnées $\{x = 0\}$, $\{y = 0\}$, $\{z = 0\}$, les deux plans « obliques » d'équations respectives $\{x + z = 1\}$ et $\{y + z = 1\}$. Le domaine G (qui est une pyramide pleine) est donc borné. Voir le dessin ci-dessous.



(2) *Calculez l'intégrale triple*

$$I := \iiint_G \frac{1}{(x+y+z)^3}\, dx\, dy\, dz$$

en indiquant quel théorème du cours vous invoquez pour effectuer ce calcul.
D'après le théorème de Fubini-Tonelli (Théorème **??** du polycopié), on a :

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \Big(\int_0^{1-z} \Big(\int_0^{1-z} \frac{dx}{(x+y+z)^3} \Big)\, dy \Big)\, dz \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^1 \Big(\int_0^{1-z} \Big[\frac{1}{(x+y+z)^2} \Big]_{x=0}^{x=1-z} dy \Big)\, dz \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \Big(\int_0^{1-z} \frac{dy}{(y+z)^2} - \int_0^{1-z} \frac{dy}{(y+1)^2} \Big)\, dz \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^1 \Big(\Big[\frac{1}{y+z} \Big]_{y=0}^{y=1-z} - \Big[\frac{1}{y+1} \Big]_{y=0}^{y=1-z} \Big)\, dz \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \Big(\frac{1}{z} - \frac{1}{2-z} \Big)\, dz \\
&= \Big[\ln(z) + \ln(2-z) \Big]_{z=0}^{z=1} = +\infty.
\end{aligned}$$

On obtient donc ici $I = +\infty$.

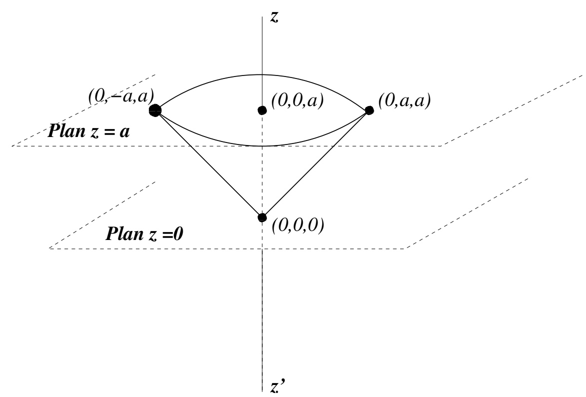
Exercice 4. *Soit $a > 0$ un paramètre fixé et C_a le domaine de $\mathbb{R}^3$ défini par*

$$C_a := \Big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, 0 < \sqrt{x^2+y^2} \le z \le a \Big\}$$

Dessinez en perspective le domaine C_a (et dites de quel type de domaine il s'agit, puis si ce domaine est borné ou non), puis calculez ensuite, en utilisant le changement de variables qui vous semble le mieux approprié, l'intégrale triple

$$I_a := \iiint_{C_a} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, dx\, dy\, dz\,.$$

Le domaine C_a est un secteur de cône de révolution (plein), d'axe le demi-axe vertical $0z$, d'ouverture $\pi/4$. Le secteur considéré est le secteur du cône (dont le



sommet est l'origine) limité par le plan horizontal d'équation $z = a$ (voir la figure ci-dessous).

En utilisant le changement de variables consistant à utiliser les coordonnées cylindriques $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$, et le théorème de Fubini-Tonelli (Théorème **??** du polycopié), l'intégrale I_a s'écrit (puisque $dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz$ et que $du/2 = rdr$ si $r = u = r^2$) :

$$\begin{aligned}
I_a &= \int_0^a \Big(\int_0^z \frac{r^2}{\sqrt{r^2+z^2}}\,rdr \times \int_0^{2\pi} d\theta\Big)\,dz = \pi \int_0^a \Big(\int_0^{z^2} \frac{u}{\sqrt{u+z^2}}\,du\Big)\,dz \\
&= \pi \int_0^a \Big(\int_0^{z^2} \frac{(u+z^2)-z^2}{\sqrt{u+z^2}}\,du\Big)\,dz \\
&= 2\pi \int_0^a \Big[\frac{1}{3}(u+z^2)^{3/2} - z^2(u+z^2)^{1/2}\Big]_0^{z^2}\,dz \\
&= 2\pi \int_0^a \Big(\frac{2\sqrt{2}-1}{3} - (\sqrt{2}-1)\Big)\,z^3\,dz = \frac{\pi(2-\sqrt{2})\,a^4}{6}\,.
\end{aligned}$$

ANNEXE F

Annales 2012-2013, Texte et corrigé de l'examen de session 1

Durée 3 heures. Polycopié de cours autorisé (à l'exception de tout autre document)

Exercice 1.

(1) *Soit $a > 0$. Dessiner le domaine D_a du plan défini par :*

$$D_a := \{(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2\,;\ \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq \sqrt{a},\ x + y \leq a\}.$$

Pour représenter le domaine D_a, il est commode de poser $u = \sqrt{x}$, $v = \sqrt{y}$, et de représenter d'abord le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par les conditions :

$$u \geq 0,\ v \geq 0,\ u + v \geq a,\ u^2 + v^2 \leq a. \qquad (*)$$

Le domaine $\{u \geq 0,\ v \geq 0,\ u^2 + v^2 \leq a\}$ est l'intersection du disque $D(0, \sqrt{a})$ avec le premier quadrant. Le domaine $\{u + v \geq a\}$ est le demi-plan situé au dessus de la droite passant par les points $(\sqrt{a}, 0)$ et $(0, \sqrt{a})$. Le domaine Δ de $\mathbb{R}^2$ défini par les conditions $(*)$ est donc le sous-ensemble du quart de disque $\{u \geq 0,\ v \geq 0,\ u^2 + v^2 \leq a\}$ situé au dessus de la corde joignant les points $(\sqrt{a}, 0)$ et $(0, \sqrt{a})$. Le domaine D_a s'obtient en prenant l'image de Δ par l'application $(u,v) \mapsto (u^2, v^2)$: l'arc de cercle joignant les points $(\sqrt{a}, 0)$ et $(0, \sqrt{a})$ est transformé en le segment joignant les points $(a, 0)$ et $(0, a)$, tandis que la corde joignant les deux points $(\sqrt{a}, 0)$ et $(0, \sqrt{a})$ est transformée en un arc de conique [1] joignant les points $(a, 0)$ et $(0, a)$ et situé (dans le premier quadrant) sous le segment joignant $(a, 0)$ à $(0, a)$ (d'équation $y = (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2$, où $x \in [0, a]$). Voir le figure ci-dessous.

(2) *Calculer la surface du domaine D_a.* On a, en utilisant le théorème de Fubini-Tonelli :

$$\begin{aligned}
\text{Aire}(D_a) &= \iint_{D_a} dxdy = \int_0^a \Big(\int_{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2}^{a-x} dy\Big)\, dx \\
&= \int_0^a \Big(a - x - (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2\Big)\, dx \\
&= 2\int_0^a (\sqrt{a}\sqrt{x} - x)\, dx = 2\Big(\sqrt{a} \times \frac{a^{3/2}}{3/2} - a^2/2\Big) = a^2/3.
\end{aligned}$$

1. Une conique est une courbe définie par une équation cartésienne polynomiale en (x, y) de degré total égal à 2 ; les coniques sont les paires de droites sécantes, les paraboles, les ellipses ou les hyperboles (ce sont en fait les quatre types de sections planes d'un cône de révolution) ; il s'agit ici d'un arc d'une branche d'hyperbole (d'équation globale $(y - a - x)^2 = 4ax$), comme le tracé sous `Maple` avec `implicitplot` le confirme.

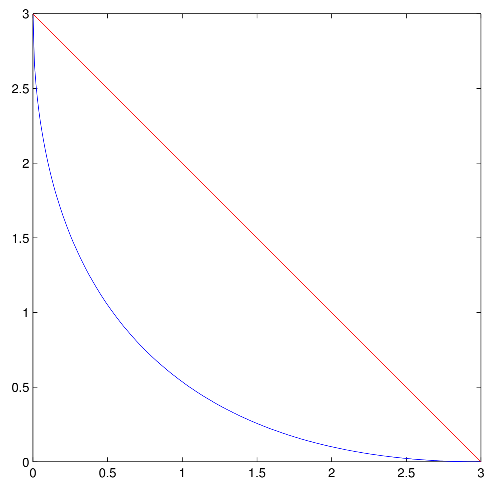


FIGURE F.1. Le domaine D_a (avec ici $a = 3$)

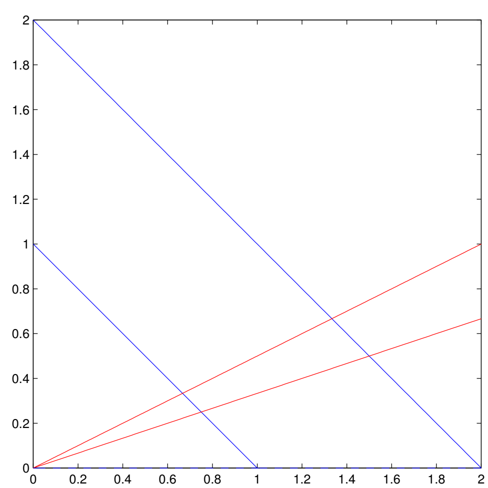


FIGURE F.2. Le domaine D

Exercice 2.

(1) *Dessinez le domaine D du plan défini par :*

$$D := \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2\,;\, 1 \leq x + y \leq 2,\ 3y - x \geq 0,\ x - 2y \leq 0\}.$$

Le domaine D est le polygone borné délimité par les quatre droites représentées sur la figure ci dessous.

(2) *Soit a un nombre réel. Vérifier que*

$$\iint_D e^{-x}\, e^{-y}\, x^{a-1} y^{-a}\, dxdy = \frac{e-1}{e^2} \int_{1/3}^{1/2} \frac{u^{-a}}{u+1}\, du.$$

On effectue le changement de variables consistant à poser $u = y/x$ et $v = x + y$. L'application $(u, v) \to (x, y)$ est en effet un C^1-difféomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ dans lui-même : en effet, les conditions

$$u > 0,\ v > 0,\ y/x = u,\ x + y = v$$

sont équivalentes aux conditions :

$$x > 0,\ y > 0,\ x = \frac{x+y}{1+u} = \frac{v}{1+u},\ y = ux = \frac{uv}{1+u}.$$

Le jacobien de la transformation

$$(u, v) \mapsto (x, y)$$

vaut :

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \end{vmatrix} (u, v) &= \frac{1}{\begin{vmatrix} \partial u/\partial x & \partial u/\partial y \\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y \end{vmatrix} (x(u, v), y(u, v))} \\
&= \frac{x^2(u, v)}{x(u, v) + y(u, v)} = \frac{x(u, v)}{1+u}.
\end{aligned}$$

Il faut donc remplacer $dx\, dy/x$ par $du\, dv/(1 + u)$ dans le changement de variables. On a donc, en utilisant la formule de changement de variables (Théorème **??** du cours), puis le théorème de Fubini-Tonelli :

$$\begin{aligned}
\iint_D e^{-x}\, e^{-y}\, x^{a-1} y^{-a}\, dxdy &= \iint_D e^{-x}\, e^{-y}\, (y/x)^{-a}\, \frac{dxdy}{x} \\
&= \int\!\!\int_{\substack{1/3 \le u \le 1/2 \\ 1 \le v \le 2}} e^{-v} u^{-a}\, \frac{dudv}{1+u} \\
&= \int_1^2 e^{-v}\, dv \times \int_{1/3}^{1/2} \frac{u^{-a}}{1+u}\, du \\
&= \Big[- e^{-v} \Big]_1^2 \times \int_{1/3}^{1/2} \frac{u^{-a}}{1+u}\, du \\
&= \frac{e-1}{e^2} \int_{1/3}^{1/2} \frac{u^{-a}}{u+1}\, du.
\end{aligned}$$

(3) *Vérifier*[2] *que la fonction*

$$a \in \mathbb{R} \longmapsto \int_{1/3}^{1/2} \frac{u^{-a}}{u+1}\, du$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa fonction dérivée sous la forme d'une intégrale fonction du paramètre a.

On peut ici appliquer le théorème de dérivation des intégrales fonction d'un paramètre (ici a) (section **??** du cours). En effet, pour tout $u \in [1/3, 1/2]$, la fonction

$$a \in \mathbb{R} \mapsto \frac{u^{-a}}{1+u} = \exp(-a \log u)) \times \frac{1}{1+u}$$

2. Par rapport à l'énoncé donné à l'examen, on a modifié ici u^{a-1} sous l'intégrale en u^{-a} (par souci de cohérence avec une erreur faite intialement dans l'énoncé de la question 2 et rectifiée dans ce texte).

est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée :

$$a \in \mathbb{R} \mapsto \log u \, \exp(-a \log u)) \times \frac{1}{1+u} = \log u \, \frac{u^{-a}}{1+u} .$$

Pour tout $R > 0$, la fonction continue

$$(u,a) \in [1/3, 1/2] \times [-R, R] \longmapsto \log u \times \frac{u^{-a}}{1+u}$$

est dominée en valeur absolue sur $[1/3, 1/2] \times [-R, R]$ par une constante $M(R)$. La clause (**??**) du cours est donc ici remplie et la fonction

$$a \in \mathbb{R} \longmapsto \int_{1/3}^{1/2} \frac{u^{-a}}{u+1} \, du$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, sa fonction dérivée étant la fonction

$$a \in \mathbb{R} \longmapsto \int_{1/3}^{1/2} \log u \; \times \frac{u^{-a}}{u+1} \, du$$

Exercice 3.

(1) *Soit a un nombre réel positif. On note Σ_a la surface de $\mathbb{R}^3$ paramétrée par*

$$(\theta, z) \in [0, 2\pi] \times [0, 1] \longmapsto \begin{pmatrix} a \cosh(z/a) \, \cos\theta \\ a \cosh(z/a) \, \sin\theta \\ z \end{pmatrix}$$

où la fonction cosh est définie par $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$. *Pourquoi cette surface est-elle une surface de révolution autour de l'axe $z'Oz$? On complète la surface Σ_a en lui adjoignant les deux disques horizontaux*

$$\begin{aligned} D_0 &:= \{(x,y,z)\,;\, x^2 + y^2 \leq a^2, \; z = 0\} \\ D_1 &:= \{(x,y,z)\,;\, x^2 + y^2 \leq a^2 \cosh^2(1/a), \; z = 1\} . \end{aligned}$$

Représenter le domaine borné U_a de $\mathbb{R}^3$ limité par la surface Σ_a ainsi complétée par les deux disques horizontaux D_0 et D_1.

En coordonnées cylindriques (r, θ, z) (*cf.* l'exemple **??** des notes, l'axe étant l'axe $z'Oz$, r désignant la distance à cet axe, θ la longitude mesurée depuis le plan xOz et z l'altitude), la surface est donnée comme

$$\Sigma_a := \{(r, \theta, z)\,;\, r = a\cosh(z/a), \; \theta \in [0, 2\pi], \; z \in [0, 1]\}.$$

Comme l'équation cartésienne s'exprime sous la forme $r = f_a(z)$, où f_a désigne une fonction positive, il s'agit bien d'une surface de révolution autour de l'axe par rapport auquel est effectué le repérage cylindrique, en l'occurrence ici l'axe $z'Oz$ [3]. Pour représenter Σ_a, il suffit de tracer dans le

3. La surface d'équation $r = a\cosh(z/a)$, où $z \in \mathbb{R}$ (en coordonnées cylindriques) est appelée *caténoïde* (ici de révolution autour de l'axe $z'Oz$), $a > 0$ désignant ici un paramètre. La portion de surface Σ_a proposée ici ($z \in [0, 1]$) est donc une ≪ tranche ≫ d'un tel caténoïde. La courbe qui engendre cette surface par rotation est une *chainette* du plan yOz. Pour réaliser cette portion de caténoïde Σ_a, il suffit d'immerger deux cercles (l'un de rayon $a = f_a(0) = a\cosh(0/a)$, l'autre de rayon $f_a(1) = a\cosh(1/a)$, dans un bain d'eau savonneuse (en les gardant centrés au même point, disons l'origine de $\mathbb{R}^3$), puis de percer la bulle centrale afin de décoller les deux cercles. La surface (dite ≪ minimale ≫) alors matérialisée par le film de savon est la surface Σ_a dès que les cercles se trouvent séparés d'une distance verticale égale à 1.

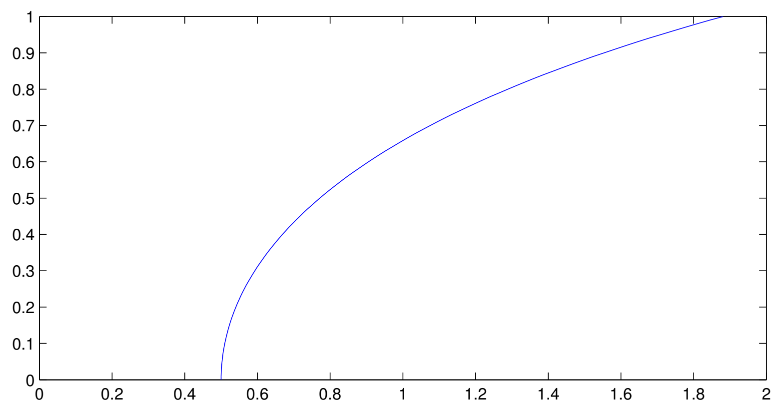


FIGURE F.3. Le tracé de la chainette $y = f_{1/2}(z)$ dans le plan yOz, $0 \leq z \leq 1$

plan yOz (par exemple), la courbe d'équation

$$y = f_a(z) = a\cosh(z/a), \quad z \in [0,1],$$

(c'est donc une portion de *chainette*, la courbe que modélise par exemple les caténaires d'une ligne ferroviaire, car il s'agit de la forme qu'épouse un fil pesant suspendu entre deux extrémités fixes de même cote) puis de faire tourner la courbe (ainsi tracée dans le plan yOz) en faisant tourner ce plan autour de l'axe de révolution $z'Oz$. Les deux disques D_0 (dans le plan $z = 0$) et D_1 (dans le plan $z = 1$) ferment bien la surface respectivement aux altitudes $z = 0$ et $z = 1$ puisque les rayons de ces disques sont respectivement $r_0 = a = a\cosh(0) = f_a(0)$ et $r_1 = a\cosh(1/a) = f_a(1)$. On a représenté la chainette sur la figure F.3 ci-dessous (pour $a = .5$). La surface de révolution Σ_a est obtenue en faisant tourner le plan yOz autour de son axe vertical ; c'est la nappe de révolution générée par la courbe ainsi en rotation autour de l'axe vertical. Le domaine U_a (pour $a = .5$) a été représenté (de manière « transparente [4] ») sur la figure F.4 ci-dessous (on a figuré en blanc sa projection sur le plan xOy, à savoir le disque $D(0, f_{1/2}(1))$, projection du disque D_1) :

(2) *Calculer, en un point (x,y,z) du bord de U_a (on distinguera le cas où ce point est dans Σ_a du cas où ce point est dans l'union des deux disques horizontaux) le vecteur unitaire normal au bord de U_a en ce point, dirigé vers l'extérieur de U_a (lorsque $(x,y,z) \in \Sigma_a$, on exprimera ce vecteur normal en fonction des valeurs des paramètres (θ, z) spécifiant la position du point (x,y,z)).*

On a, pour tout $(\theta, z) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\begin{pmatrix} a\cosh(z/a)\,\cos\theta \\ a\cosh(z/a)\,\sin\theta \\ z \end{pmatrix} = a\cosh(z/a)\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. La figure a été pour ce corrigé réalisée avec le logiciel de calcul scientifique `MATLAB`, mais bien sûr, on n'exigeait dans le problème qu'un tracé grossier à la main.

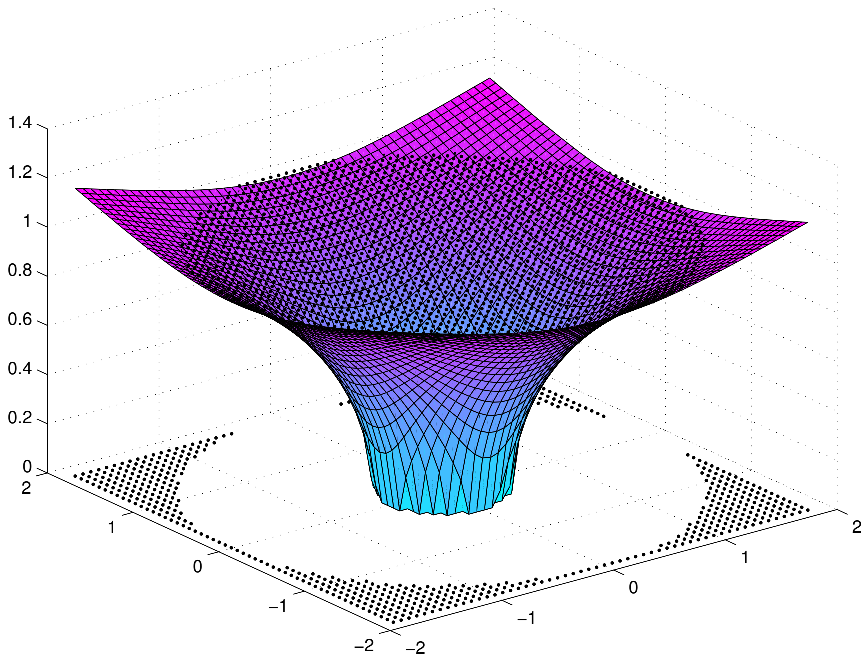


FIGURE F.4. Le domaine $U_{1/2}$ (section de caténoïde plein)

D'autre part :

$$\frac{\partial}{\partial z}\begin{pmatrix} a\cosh(z/a)\,\cos\theta \\ a\cosh(z/a)\,\sin\theta \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sinh(z/a)\,\cos\theta \\ \sinh(z/a)\,\sin\theta \\ 1 \end{pmatrix},$$

où

$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Le produit extérieur de ces deux vecteurs (dans cet ordre, la dérivée par rapport à θ, suivie de la dérivée par rapport à z) est égal à

$$a\cosh(z/a)\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ -\sinh(z/a) \end{pmatrix}$$

Ce vecteur est un vecteur de norme $a\cosh^2(z/a)$ puisque

$$1 + \sinh^2(z/a) = \cosh^2(z/a).$$

Comme la dernière composante à une coordonnée strictement négative et que la courbe d'équation $y = f_a(z)$ présente une branche parabolique dans la direction du demi-axe $0y$ (la concavité est tournée « vers le bas »), le vecteur

$$a\cosh(z/a)\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ -\sinh(z/a) \end{pmatrix}$$

(lorque $(x,y,z) = (a\cosh(z/a)\cos\theta, a\cosh(z/a)\,\sin\theta, z)$ est le point de Σ_a repéré par les paramètres (θ, z)) pointe bien vers l'extérieur du domaine U_a. Le vecteur normal extérieur unitaire à U_a en ce point est donc le vecteur :

$$\frac{1}{\cosh(z/a)}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ -\sinh(z/a)\end{pmatrix}.$$

Lorsque le point (x,y,z) est un point de D_0, le vecteur normal extérieur unitaire à U_a est $-\vec{k}$, tandis que c'est $\vec{k}$ lorsque (x,y,z) est un point de D_1.

(3) *Calculer le flux sortant du champ de vecteurs*

$$\vec{F} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} = \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

au travers du bord de U_a.

Le flux sortant (de U_a) du champ de vecteurs au travers du disque D_0 est égal à

$$-\pi a^2 \times \langle \vec{F}(x,y,0), \vec{k}\rangle = 0.$$

Le flux sortant (de U_a) du champ de vecteurs au travers du disque D_1 est égal à

$$\pi a^2 \cosh^2(1/a) \times \langle \vec{F}(x,y,1), \vec{k}\rangle = \pi\, a^2 \cosh^2(1/a).$$

Le flux sortant de U_a au travers de Σ_a est égal à l'intégrale :

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix}a\,\cosh(z/a)\,\cos\theta\\ a\cosh(z/a)\,\sin\theta\\ z\end{pmatrix}, a\cosh(z/a)\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ -\sinh(z/a)\end{pmatrix}\right\rangle dz\,d\theta,$$

c'est-à-dire à

$$2\pi a\int_0^1 \Big(a\cosh^2(z/a) - z\cosh(z/a)\sinh(z/a)\Big)\,dz.$$

Or on a

$$\int_0^1 a\cosh^2(z/a)\,dz = \frac{a}{4}\int_0^1 (e^{2z/a} + e^{-2z/a} + 2)\,dz$$

et (en utilisant une intégration par parties) :

$$\int_0^1 z\cosh(z/a)\sinh(z/a)\,dz = \frac{1}{4}\int_0^1 z\,(e^{2z/a} - e^{-2z/a})\,dz$$

$$= \frac{a}{8}(e^{2/a} + e^{-2/a}) - \frac{a}{8}\int_0^1 (e^{2z/a} + e^{-2z/a})\,dz.$$

Le calcul du flux sortant de U_a au travers de la portion de surface Σ_a vaut donc :

$$\frac{3\pi a^2}{4}\int_0^1 (e^{2z/a} + e^{-2z/a})\,dz + \pi\,a^2 - \frac{\pi a^2}{4}(e^{2/a} + e^{-2/a})$$

$$= \pi\,a^2\Big(\frac{3a-2}{8}\,e^{2/a} - \frac{3a+2}{8}\,e^{-2/a} + 1\Big).$$

En atteste la vérification de ce calcul effectuée avec l'aide du logiciel `MAPLE` :

```
> f:= x -> 2*Pi*a*(a*(cosh(x/a))^2 - x*sinh(x/a)*cosh(x/a));
> int(f(x),x=0..1);

(1/8)*Pi*a^2*(3*a*exp(4/a)+8*exp(2/a)-3*a-2*exp(4/a)-2)
      *exp(-2/a)
```

Le calcul du flux demandé s'obtient donc en ajoutant à cette contribution (celle correspondant à la portion de surface Σ_a) celle correspondant au disque D_1, soit $\pi\, a^2(e^{2/a} + e^{-2/a} + 2)/4$. Au final, le flux demandé vaut :

$$\Phi = \pi\, a^2 \left(\frac{3a}{8}\,(e^{2/a} + e^{-2/a}) + \frac{3}{2}\right) = \frac{3\pi\, a^2}{4}(a\cosh(2/a) + 2).$$

Notons qu'il s'agit d'un nombre positif.

(4) *Rappeler l'énoncé de la formule de Stokes pour un domaine borné de l'espace (formulation de Green-Ostrogradski ou encore de la divergence) et déduire du calcul de flux effectué à la question* **3** *la valeur du volume du domaine U_a.*

C'est le Théorème **??** du cours que l'on demande de rappeler ici : ≪ *le flux sortant d'un champ de vecteurs $\vec{F}$ au travers de la frontière d'un domaine volumique borné U est égal à l'intégrale de volume sur U de la divergence de ce champ de vecteurs* ≫. Dans notre cas, la divergence du champ de vecteurs est constante et égale à 3. Le flux Φ est donc, d'après la formule de Green-Ostrogradski, égal à trois fois le volume de U_a. On a donc

$$\mathrm{vol}(U_a) = \frac{\pi\, a^2}{4}(a\cosh(2/a) + 2)\,.$$

Exercice 4.

On considère l'équation différentielle du premier ordre (du type équation de Bernoulli)

$$t\, y'(t) + 2\, y(t) = -(t^3\, \cos t)\, y^2(t). \qquad (*)$$

Soit $t_0 > 0$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Le but de l'exercice est de déterminer, avec son intervalle ouvert de définition $I \subset]0, +\infty[$, l'unique solution maximale

$$y\ : t \in I \subset]0, +\infty[\mapsto y(t)$$

de l'EDO $(*)$, de classe C^1 sur son intervalle ouvert de définition I (contenant t_0), telle que de plus $y(t_0) = y_0$.

(1) *L'équation $(*)$ est-elle une équation différentielle linéaire du premier ordre ?*
Non, car elle s'exprime sous forme résoluble en y' sous la forme

$$y'(t) = -\frac{2}{t}\, y(t) - (t^2 \cos t)\, y^2(t)$$

et que la fonction

$$(t, Y) \mapsto F(t, Y) = -\frac{2}{t}\, Y - (t^2 \cos t)\, Y^2$$

figurant au membre de droite est quadratique en Y, et non affine en cette variable.

(2) *Déterminer un changement de fonction inconnue $y \to z$ qui permette de ramener la résolution de $(*)$ à celle d'une EDO de la forme :*

$$z'(t) = A(t)\, z(t) + B(t) \qquad (**)$$

(où A et B sont des fonctions que l'on précisera).

Comme il s'agit (on l'a d'ailleurs rappelé dans l'énoncé) d'une équation de Bernoulli (avec d'ailleurs ici $\alpha = 2$, si l'on reprend les notations de la section **??** du cours), le changement de fonction inconnue $y \to z$ à opérer ici est $y \to z = y^{1-2} = y^{-1}$ (pourvu que $y_0 \neq 0$). Tant que $y(t)$ reste non nul, on a $y'(t) = -z'(t)/z^2(t)$ et l'EDO $(*)$ devient

$$-\frac{z'(t)}{z^2(t)} = -\frac{2}{t}\,\frac{1}{z(t)} - t^2\,\cos t\,\frac{1}{z^2(t)},$$

soit :

$$z'(t) = \frac{2}{t}\,z(t) + t^2\,\cos t = A(t)z(t) + B(t)$$

avec $A(t) = 2/t$ et $B(t) = t^2\,\cos t$.

(3) *Soit $z_0 \in \mathbb{R}$. Déterminer la solution de $(**)$ telle que $z(t_0) = z_0$.*

L'équation linéaire homogène est $z' = A(t)\, z(t) = (2/t) \times z(t)$ et a pour solution générale

$$t \in]0, +\infty[\longmapsto z(t) = C\, t^2$$

lorsque l'espace des états est $]0, +\infty[\times\mathbb{R}$ (contenant le point (t_0, z_0) correspondant aux conditions initiales). La méthode de variation des constantes (pour la résolution de l'EDO non homogène) conduit à

$$C'(t)\, t^2 = B(t) = t^2\,\cos t$$

soit $C(t) = \sin t + c$, avec $c \in \mathbb{R}$. La solution générale de l'EDO $(**)$ (lorsque l'espace des états est $]0, +\infty[\times\mathbb{R}$) est donc :

$$t \in]0, +\infty[\longmapsto (\sin t + c)\, t^2,\ \ c \in \mathbb{R}.$$

Pour que $z(t_0) = z_0$, il faut ajuster la constante réelle c de manière à ce que

$$(\sin t_0 + c)\, t_0^2 = z_0,$$

soit

$$c = c(t_0, z_0) = \frac{z_0 - t_0^2\,\sin t_0}{t_0^2} = -\sin t_0 + \frac{z_0}{t_0^2}.$$

(4) *Déduire de la question **3** l'expression de la solution maximale $y\ : I \to \mathbb{R}$ de $(*)$ (avec $I \subset]0, +\infty[$) telle que $y(t_0) = y_0$ (on distinguera les cas $y_0 = 0$ et $y_0 \neq 0$). Quel est l'intervalle de définition de cette fonction y ?*

Si $y_0 = 0$, la fonction identiquement nulle sur $]0, +\infty[$ est l'unique solution maximale de l'EDO

$$y'(t) = -\frac{2}{t}\,y(t) - t^2\,\cos t\, y^2(t).$$

Si $y_0 \neq 0$, la solution de l'EDO $(*)$ telle que $y(t_0) = y_0$ est donnée au voisinage de t_0 par

$$y(t) = \frac{1}{(\sin t + c(t_0, z_0))\, t^2}$$

avec
$$c(t_0, z_0) = -\sin t_0 + \frac{z_0}{t_0^2} = -\sin t_0 + \frac{1}{y_0\, t_0^2}.$$
Son intervalle de vie est le plus petit intervalle ouvert contenant t_0 et sur lequel la fonction
$$t \mapsto \sin t - \sin t_0 + \frac{1}{y_0\, t_0^2}$$
ne s'annule pas. Cet intervalle de vie est donc $]\alpha, \beta[$, où α et β sont les deux points les plus proches de t_0 tels que
$$\sin\alpha = \sin\beta = \sin t_0 - \frac{1}{y_0\, t_0^2}.$$

Exercice 5.

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle du second ordre sur $\mathbb{R}$ (à coefficients constants, mais avec second membre) :
$$y''(t) + 2\,y'(t) + 2\,y(t) = \sin(at)\, e^{-t} \quad \forall t \in \mathbb{R}\,. \tag{†}$$

(1) *Déterminer toutes les fonctions $y\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 solutions de l'équation différentielle homogène :*
$$y''(t) + 2\,y'(t) + 2\,y(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}\,. \tag{††}$$
(on cherchera à déterminer une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des solutions de l'EDO (††) après avoir précisé quelle est la dimension de ce $\mathbb{R}$-espace vectoriel).

D'après l'étude des EDO linéaires (section **??** du polycopié, voir aussi le cours de MISMI [5], section 3.9.3), le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des solutions de l'EDO homogène (††) est de dimension 2 : en effet, étant donné un point $t_0 \in \mathbb{R}$ (arbitraire) et un couple (y_0, y_0') de nombres réels, il existe une et une seule solution $y\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2, solution de (††), et telle que de plus $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y_0'$. Pour trouver une base de solutions, on cherche les racines de l'équation caractéristique :
$$z^2 + 2z + 2 = 0.$$
Les deux racines (complexes conjuguées) sont ici $z = -1 \pm i$ (le discriminant réduit du trinôme valant $-1 = i^2$). Les deux fonctions
$$t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{-t}\, e^{\pm it}$$
sont des fonctions $\mathbb{R}$-linéairement indépendantes, solutions de l'EDO (††), mais malheureusement à valeurs complexes ; une base de solutions (à valeurs réelles cette fois) est fournie en prenant leur partie réelle commune $t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{-t}\cos t$ et leur partie imaginaire (commune au signe près) $t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{-t}\sin t$.

(2) *Soit λ un nombre complexe différent de $-1 \pm i$. Déterminer (en la cherchant sous la forme $t \mapsto c_\lambda\, e^{\lambda t}$, avec $c_\lambda \in \mathbb{C}$ constante convenable) une solution particulière à valeurs complexes de l'EDO*
$$y''(t) + 2\,y'(t) + 2\,y(t) = e^{\lambda t} \quad \forall t \in \mathbb{R}\,.$$

5. http://www.math.u-bordeaux1.fr/~yger/coursmismi.pdf

En déduire, dans le cas où $a \neq \pm 1$, une solution particulière

$$y_a \ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

de l'équation (†) *(remarquer pour cela que* $\sin(at)\, e^{-t} = \mathrm{Im}\,(e^{(-1+ai)t})$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$*).*

L'action de l'opérateur différentiel $d^2/dt^2 + 2\,d/dt + 2\,\mathrm{Id}$ sur $t \mapsto e^{\lambda t}$ donne

$$\Big(d^2/dt^2 + 2\,d/dt + 2\,\mathrm{Id}\Big)[e^{\lambda t}] = (\lambda^2 + 2\lambda + 2)\, e^{\lambda t}.$$

Si l'on choisit

$$c_\lambda = \frac{1}{\lambda^2 + 2\lambda + 2},$$

la fonction $t \mapsto c_\lambda\, e^{\lambda t}$ est solution de l'EDO

$$y''(t) + 2\,y'(t) + 2\,y(t) = e^{\lambda t}.$$

En particulier, si $\lambda = -1 + ia$ avec $a \neq \pm 1$, on a

$$\lambda^2 + 2\,\lambda + 2 = (1 - a^2 - 2ia) + 2(-1 + ia) + 2 = 1 - a^2 \neq 0\,.$$

La fonction

$$w_{-1+ia} \ : t \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{e^{-t}\, e^{iat}}{1 - a^2}$$

est donc solution de l'EDO :

$$y''(t) + 2\,y'(t) + 2\,y(t) = e^{-t}\, e^{iat}.$$

En prenant la partie imaginaire des deux membres de cette identité, on constate que la partie imaginaire de w_{-1+ia}, soit

$$y_a \ : t \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{e^{-t}\, \sin(at)}{1 - a^2}$$

est une solution particulière de l'EDO (†).

(3) *Soit* $\lambda = -1 \pm i$ *et* $u_\lambda \ : t \in \mathbb{R} \longmapsto t\, e^{\lambda t}$*. Calculer la fonction*

$$t \mapsto u_\lambda''(t) + 2\,u_\lambda'(t) + 2\,u_\lambda(t)\,.$$

En déduire une solution particulière y_1 *de l'EDO* (†) *lorsque* $a = 1$ *ainsi qu'une solution particulière* y_{-1} *de l'EDO* (†) *lorsque* $a = -1$.

Un calcul immédiat montre que, si $\lambda = -1 \pm i$ (et donc $\lambda^2 + 2\,\lambda + 2 = 0$), alors

$$u_\lambda''(t) + 2\,u_\lambda'(t) + 2\,u_\lambda(t) = 2\,(\lambda + 1)\, e^{\lambda t} = \pm 2i\, e^{(-1\pm i)\,t}.$$

Si $\lambda = -1 + i$, on trouve en particulier

$$u_{-1+i}''(t) + 2\,u_{-1+i}'(t) + 2\,u_{-1+i}(t) = 2\,e^{-t}(-\sin t + i\,\cos t).$$

En prenant la partie réelle des deux membres de cette identité, on voit que la fonction

$$t \mapsto y_1(t) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,(u_{-1+i}(t)) = -\frac{t\,\cos t}{2}\, e^{-t}$$

est donc une solution particulière de l'EDO (†) lorsque $a = 1$. La fonction $y_{-1} = -y_1$ est une solution particulière de l'EDO (†) lorsque $a = -1$.

(4) *Soit $a = 1$. Déterminer la solution y de l'équation (†) telle que $y(0) = 1$ et $y(1) = 0$.*

La solution générale de l'EDO (†) lorsque $a = 1$ est la somme de la solution particulière y_1 et de la solution générale de l'EDO (††) lorsque $a = 1$. Cette solution générale s'écrit donc (du fait des résultats établis aux questions **1** et **3**) :

$$y(t) = \Big((\alpha - t/2)\,\cos t + \beta\,\sin t\Big)\,e^{-t}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}\,.$$

Comme $y(0) = 1$, on a $\alpha = 1$. Pour que $y(1) = 0$, il convient de choisir β tel que

$$\beta\,\sin 1 + \frac{\cos 1}{2} = 0,$$

soit

$$\beta = -\frac{\text{cotan}1}{2}\,.$$

ANNEXE G

Annales 2012-2013, Texte et corrigé de l'examen de session 2

Durée 3 heures. Polycopié de cours autorisé (à l'exception de tout autre document)

Exercice 1

(1) *Soit $a > 0$. Dessiner le domaine D_a du plan défini par :*

$$D_a := \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \,;\, x^{1/3} + y^{1/3} \geq a^{1/3},\ x + y \leq a\}.$$

Lorsque $x \geq 0$ et $y \geq 0$, la condition $x^{1/3} + y^{1/3} \geq a^{1/3}$ équivaut à $y^{1/3} \geq a^{1/3} - x^{1/3}$. Lorsque de plus on impose $x + y \leq a$, le nombre $a^{1/3} - x^{1/3}$ est positif ou nul et la paire de conditions imposées pour définir D_a équivaut aux conditions :

$$x \geq 0,\ y \geq 0,\ (a^{1/3} - x^{1/3})^3 \leq y \leq a - x.$$

Pour représenter ce domaine D_a, il convient donc de représenter le graphe des deux fonctions $x \mapsto (a^{1/3} - x^{1/3})^3$ et $x \mapsto a - x$ au dessus du segment $[0, a]$, ce qui est fait sur la figure G.1 ci-dessous lorsque $a = 3$.

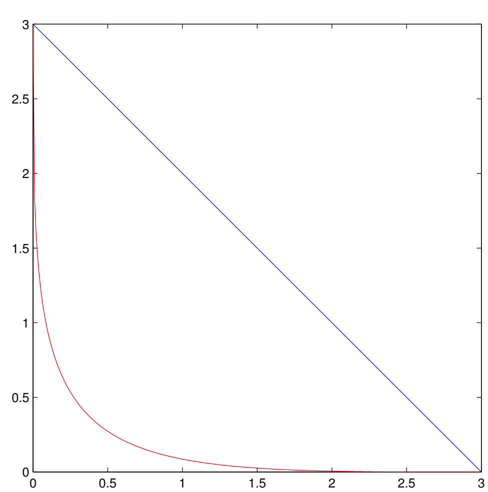


FIGURE G.1. Le domaine D_a de l'exercice **1** (avec ici $a = 3$)

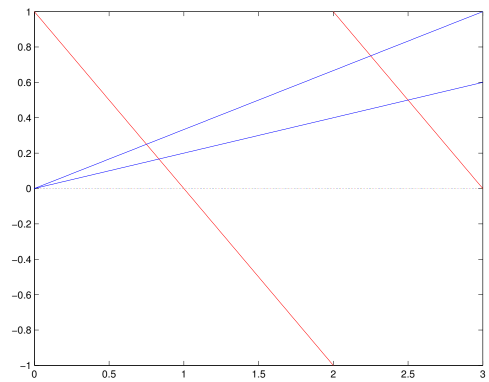


FIGURE G.2. Le domaine D de l'exercice **2**

(2) *Calculer la surface du domaine D_a.* L'aire de D_a vaut, compte tenu de la figure et du théorème de Fubini-Tonelli :

$$\begin{aligned}
\text{aire}(D_a) &= \int_0^a \Big(\int_{(a^{1/3}-x^{1/3})^3}^{a-x} dy\Big)\, dx \\
&= \int_0^a \Big((a-x) - (a^{1/3}-x^{1/3})^3\Big)\, dx \\
&= \Big[\frac{(a-x)^2}{2}\Big]_a^0 - \int_0^{a^{1/3}} (a^{1/3}-u)^3\, d(u^3) \\
&= \frac{a^2}{2} - 3\int_0^{a^{1/3}} (a^{1/3}-u)^3\, u^2\, du = \frac{9a^2}{20}
\end{aligned}$$

(on a utilisé la formule du changement de variables avec $x \leftrightarrow u^3$ pour passer de la ligne 2 à la ligne 3).

Exercice 2

(1) *Dessinez le domaine D du plan défini par :*

$$D := \{(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2\,;\, 1 \le x+y \le 3,\ x-3y \ge 0,\ x-5y \le 0\}.$$

Il suffit de tracer les quatre droites limitant le domaine D, c'est-à-dire les droites d'équation $y = 1-x$, $y = 3-x$, $y = x/3$, $y = x/5$. Le domaine D est alors l'intérieur du polygone borné dont la frontière est incluse dans l'union de ces quatre droites, voir la figure G.2.

(2) *Soit ω un nombre réel. Vérifier que*

$$\iint_D \frac{1}{x+y}\, \sin\Big(\omega\Big(\frac{y}{x}\Big)\Big)\, \frac{dxdy}{x} = \ln(3) \int_{1/5}^{1/3} \frac{\sin(\omega t)}{t+1}\, dt.$$

On effectue le changement de variables consistant à poser $t = y/x$ et $v = x+y$. L'application $(t,v) \to (x,y)$ est en effet un C^1-difféomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ dans lui-même : en effet, les conditions

$$t > 0,\ v > 0,\ y/x = t,\ x+y = v$$

sont équivalentes aux conditions :

$$x > 0,\ y > 0,\ x = \frac{x+y}{1+t} = \frac{v}{1+t},\ y = tx = \frac{tv}{1+t}.$$

Le jacobien de la transformation

$$(t, v) \mapsto (x, y)$$

vaut :

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} \partial x/\partial t & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial t & \partial y/\partial v \end{vmatrix} (t, v) &= \frac{1}{\begin{vmatrix} \partial t/\partial x & \partial t/\partial y \\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y \end{vmatrix} (x(t,v), y(t,v))} \\ &= \frac{x^2(t,v)}{x(t,v) + y(t,v)} = \frac{x(t,v)}{1+t}.\end{aligned}$$

Il faut donc remplacer $dx\,dy/x$ par $dt\,dv/(1+t)$ dans le changement de variables. On a donc, en utilisant la formule de changement de variables (Théorème 1.3 du cours), puis le théorème de Fubini-Tonelli :

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{1}{x+y} \sin\Big(\omega\Big(\frac{y}{x}\Big)\Big) dxdy &= \int\int_{\substack{1/5 \leq t \leq 1/3 \\ 1 \leq v \leq 3}} \frac{\sin(\omega t)}{v} \frac{dtdv}{1+t} \\ &= \int_1^3 \frac{dv}{v} \times \int_{1/5}^{1/3} \frac{\sin(\omega t)}{1+t}\, dt \\ &= \Big[\ln v\Big]_1^3 \times \int_{1/5}^{1/3} \frac{\sin(\omega t)}{1+t}\, dt \\ &= \ln(3) \int_{1/5}^{1/3} \frac{\sin(\omega t)}{t+1}\, dt.\end{aligned}$$

(3) *Vérifier que la fonction*

$$F\ : \omega \in \mathbb{R} \longmapsto \int_{1/5}^{1/3} \frac{\sin(\omega t)}{t+1}\, dt$$

est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et montrer que

$$F''(\omega) = -F(\omega) + \int_{1/5}^{1/3} (1-t)\, \sin(\omega t)\, dt.$$

Soit $t \in [1/5, 1/3]$. La fonction

$$\omega \mapsto \sin(\omega t)$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et ses dérivées sont $t \mapsto (-1)^k\, t^{2k+1} \cos(\omega t)$ lorsque l'ordre de dérivation $2k+1$ est impair et $t \mapsto (-1)^k t^{2k} \sin(\omega t)$ lorsque l'ordre de dérivation est pair. La dérivée d'ordre p est majorée en tout cas par $t \mapsto t^p$ sur $[1/5, 1/3]$. Comme

$$\int_{1/5}^{1/3} \frac{t^p}{1+t}\, dt < \infty \qquad \forall\, p \in \mathbb{N},$$

le théorème de dérivation des intégrales fonction d'un paramètre (ici ω) (section 1.4.2 du cours) s'applique et l'on peut affirmer que F est de classe C^2 (même en fait C^∞) et que :

$$\begin{aligned}\forall\, \omega \in \mathbb{R},\ F''(\omega) &= -\int_{1/5}^{1/3} \frac{t^2 \sin(\omega t)}{1+t}\, dt \\ &= -\int_{1/5}^{1/3} \frac{(t^2 - 1 + 1)\, \sin(\omega t)}{1+t}\, dt \\ &= -F(\omega) + \int_{1/5}^{1/3} (1-t)\, \sin(\omega t)\, dt.\end{aligned}$$

(4) *Former l'équation différentielle linéaire du second ordre dont F est solution en calculant explicitement l'intégrale figurant au membre de droite de la formule établie à la question* **3**. Une intégration par parties immédiate fournit :

$$\int_{1/5}^{1/3} (1-t)\, \sin(\omega t)\, dt =$$
$$= \frac{1}{15}\, \frac{\omega\big(12\cos(\omega/5) - 10\cos(\omega/3)\big) + 15(\sin(\omega/5) - \sin(\omega/3))}{\omega^2}.$$

On note que le membre de droite de cette égalité est une fonction de ω de classe C^∞ partout (y compris en $\omega = 0$). On note pour simplifier cette fonction Φ. l'EDO du second ordre dont F est solution est donc

$$y''(\omega) + y(\omega) = \Phi(\omega) \qquad \forall\, \omega \in \mathbb{R}.$$

(5) *Exprimer en fonction de cette fonction F et des paramètres nécessaires la solution générale (réelle) de l'EDO linéaire du second ordre obtenue à la question* **4**. La solution générale de l'EDO du second ordre homogène et à coefficients constants $y'' + y \equiv 0$ est

$$\omega \longmapsto \alpha\, \cos(\omega) + \beta\, \sin(\omega)$$

puisque les racines de l'équation caractéristique $X^2 + 1 = 0$ sont $\pm i$. La solution générale de l'EDO $y'' + y \equiv \Phi$ s'obtient donc en ajoutant à cette solution générale une solution particulière de cette EDO, par exemple la fonction F. La solution générale de l'EDO $y'' + y \equiv \Phi$ est donc

$$\omega \in \mathbb{R} \mapsto F(\omega) + \alpha\, \cos(\omega) + \beta\, \sin(\omega), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3

(1) *Soit $a > 0$. On note Σ_a la surface de $\mathbb{R}^3$ paramétrée par*

$$(\theta, z) \in [0, 2\pi] \times [0, a] \longmapsto \begin{pmatrix} z^2 \cos\theta \\ z^2 \sin\theta \\ z \end{pmatrix}$$

Pourquoi cette surface est-elle une surface de révolution autour d'un axe ? Préciser lequel. On complète la surface Σ_a en lui adjoignant le disque horizontal

$$D_a := \{(x, y, z)\,;\, x^2 + y^2 \le a^4,\ z = a\}\,.$$

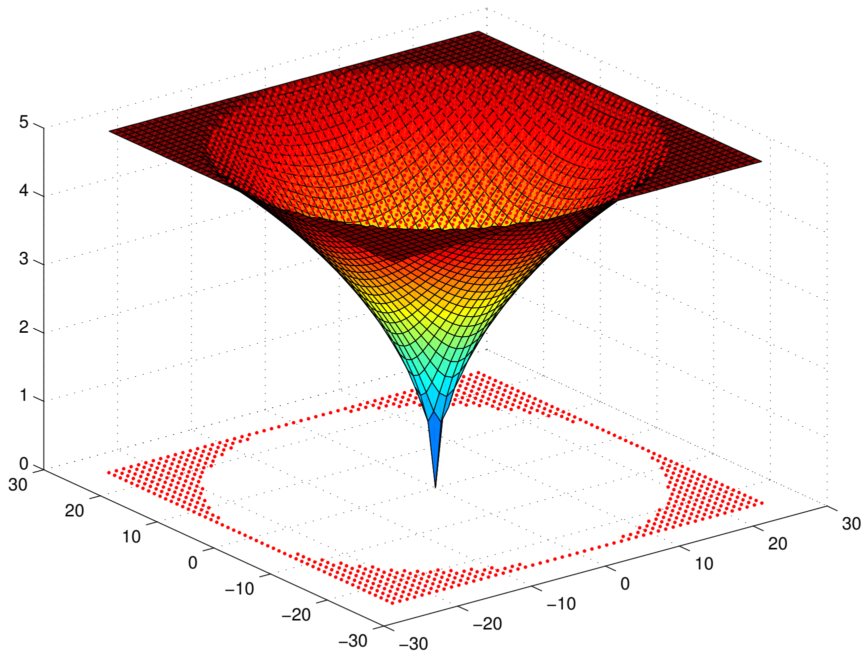


FIGURE G.3. Le domaine U_5 (section de paraboloïde plein)

Représenter le domaine borné U_a de $\mathbb{R}^3$ limité par la surface Σ_a ainsi complétée par le disque horizontal D_a. En coordonnées cylindriques (r, θ, z) (*cf.* l'exemple 1.15 des notes, l'axe étant l'axe $z'Oz$, r désignant la distance à cet axe, θ la longitude mesurée depuis le plan xOz et z l'altitude), la surface est donnée comme

$$\Sigma_a := \{(r, \theta, z)\,;\, r = z^2, \theta \in [0, 2\pi],\ z \in [0, a]\}.$$

Comme l'équation cartésienne s'exprime sous la forme $r = f(z)$, où f désigne une fonction positive, il s'agit bien d'une surface de révolution autour de l'axe par rapport auquel est effectué le repérage cylindrique, en l'occurrence ici l'axe $z'Oz$. La courbe que l'on met en révolution autour de l'axe $z'Oz$ est l'arc de parabole d'équation $x = z^2$, $z \in [0, a]$ dans le plan xOz. La section de cette surface Σ_a par le plan horizontal d'équation $z = a$ est le cercle de centre $(0, 0, a)$ et de rayon a^2 situé dans ce plan horizontal. En complétant Σ_a par le disque horizontal D_a, on réalise bien une surface fermée puisque l'intersection de Σ_a avec le plan horizontal d'équation $z = 0$ se réduit au point $(0, 0, 0)$. Voir la figure G.3.

(2) *Calculer, en un point (x, y, z) du bord de U_a (on distinguera le cas où ce point est dans Σ_a du cas où ce point est dans l'union des deux disques horizontaux) le vecteur unitaire normal au bord de U_a en ce point, dirigé vers l'extérieur de U_a (lorsque $(x, y, z) \in \Sigma_a$, on exprimera ce vecteur normal en fonction des valeurs des paramètres (θ, z) spécifiant la position du point (x, y, z)).*

Lorsque le point (x,y,z) est un point de D_a, le vecteur normal unitaire pointant vers l'extérieur de U_a est le vecteur $\vec{k}=(0,0,1)$. Supposons maintenant que (x,y,z) soit un point de Σ_a de paramètres (θ,z). On a, pour tout $(\theta,z)\in\mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\begin{pmatrix} z^2\,\cos\theta \\ z^2\sin\theta \\ z\end{pmatrix} = z^2\begin{pmatrix}-\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0\end{pmatrix}$$

D'autre part :

$$\frac{\partial}{\partial z}\begin{pmatrix} z^2\,\cos\theta \\ z^2\,\sin\theta \\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\,z\,\cos\theta \\ 2\,z\,\sin\theta \\ 1\end{pmatrix} ,$$

Le produit extérieur de ces deux vecteurs (dans cet ordre, la dérivée par rapport à θ, suivie de la dérivée par rapport à z) est égal à

$$z^2\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta \\ -2\,z\end{pmatrix}$$

Ce vecteur est un vecteur de norme $z^2\sqrt{1+4\,z^2}$. Le vecteur unitaire demandé est donc

$$\frac{1}{\sqrt{1+4\,z^2}}\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta \\ -2\,z\end{pmatrix}$$

En effet, comme la dernière composante à une coordonnée strictement négative et que la courbe d'équation $r=f(z)$ présente une branche parabolique dans la direction du demi-axe $0r$ (la concavité est tournée « vers le bas »), ce vecteur unitaire pointe bien vers l'extérieur de U_a.

(3) *Calculer le flux sortant du champ de vecteurs*

$$\vec{F} = x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k} = \begin{pmatrix}x \\ y \\ z\end{pmatrix}$$

au travers du bord de U_a. Ce flux se calcule (d'après le cours et les calculs faits à la question **2**) comme la somme :

$$\begin{aligned} & \text{Aire}\,(D_a)\times a + \text{flux sortant au travers de}\,\Sigma_a \\ = \quad & \pi a^5 + \int_0^a\int_0^{2\pi}\left\langle z^2\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta \\ -2\,z\end{pmatrix} , \begin{pmatrix}z^2\,\cos\theta \\ z^2\,\sin\theta \\ z\end{pmatrix}\right\rangle d\theta\,dz \\ = \quad & \pi\,a^5 - \int_0^a\int_0^{2\pi} z^4\,d\theta\,dz = \frac{3\,\pi\,a^5}{5}. \end{aligned}$$

(on ajoute en effet le flux sortant au travers du disque horizontal D_a et le flux sortant au travers de la surface Σ_a).

(4) *Rappeler l'énoncé de la formule de Stokes pour un domaine borné de l'espace (formulation de Green-Ostrogradski ou encore de la divergence) et déduire du calcul de flux effectué à la question* **3** *la valeur du volume du domaine U_a.*

C'est le Théorème 1.9 du cours que l'on demande de rappeler ici : ≪ *le flux sortant d'un champ de vecteurs $\vec{F}$ au travers de la frontière d'un domaine volumique borné U est égal à l'intégrale de volume sur U de la divergence de ce champ de vecteurs* ≫. Dans notre cas, la divergence du champ de vecteurs est constante et égale à 3. Le flux Φ est donc, d'après la formule de Green-Ostrogradski, égal à trois fois le volume de U_a. On a donc

$$\mathrm{vol}(U_a) = \frac{\pi\, a^5}{5}.$$

Exercice 4

On considère l'équation différentielle du premier ordre

$$t\, y'(t) + y(t) = t\, y^3(t) \qquad (*)$$

Soit $t_0 > 0$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Le but de l'exercice est de déterminer, avec son intervalle ouvert de définition $I \subset]0, +\infty[$, l'unique solution maximale

$$y\ : t \in I \subset]0, +\infty[\mapsto y(t)$$

de l'EDO $(*)$, de classe C^1 sur son intervalle ouvert de définition I (contenant t_0), telle que de plus $y(t_0) = y_0$.

(1) *L'équation $(*)$ est-elle une équation différentielle linéaire du premier ordre ? De quel type est cette équation ?* Ce n'est pas une EDO linéaire du fait de la présence du teme $t\, y^3(t)$. En revanche, il s'agit d'une équation de Bernoulli (avec $\alpha = 3$) car on peut l'écrire si l'on prend comme espace des états $U =]0, \infty[\times \mathbb{R}$ sous la forme

$$y'(t) = -\frac{y(t)}{t} + y^3(t).$$

(2) *Déterminer un changement de fonction inconnue $y \to z$ qui permette de ramener la résolution de $(*)$ à celle d'une EDO de la forme :*

$$z'(t) = A(t)\, z(t) + B(t) \qquad (**)$$

(où A et B sont des fonctions que l'on précisera). Comme $\alpha = 3$, on sait que le changement de variables approprié consiste à poser $z = y^{1-3} = y^{-2}$. On trouve donc

$$z'(t) = -2\, \frac{y'(t)}{y^3(t)} = -2 + \frac{2}{t\, y^2(t)} = -2 + 2\, \frac{z(t)}{t}.$$

C'est une EDO (cette fois linéaire) de la forme voulue avec $A(t) = 2/t$ et $B(t) = -2$.

(3) *Soit $z_0 \in \mathbb{R}$. Déterminer la solution de $(**)$ telle que $z(t_0) = z_0$.* La solution générale de l'EDO sans second membre

$$z'(t) - 2\, \frac{z(t)}{t} \equiv 0$$

est

$$z(t) = C\, t^2, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

La méthode de variation des constantes donne ici

$$C'(t)\, t^2 = -2,$$

soit

$$C(t) = \frac{2}{t} + \gamma, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

La solution générale de l'EDO $(**)$ est donc

$$z(t) = 2\,t + \gamma\, t^2.$$

Pour que $z(t_0) = z_0$, il faut choisir

$$\gamma = \gamma(t_0, z_0) = \frac{z_0 - 2\,t_0}{t_0^2}.$$

(4) *Déduire de la question* **3** *l'expression exacte de la solution maximale* $y : I \subset]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *de* $(*)$ *telle que* $y(t_0) = y_0$ *(on distinguera les cas* $y_0 = 0$ *et* $y_0 \neq 0$*). Quel est l'intervalle de définition de cette fonction* y *?* Si $y_0 = 0$, la fonction identiquement nulle sur $]0, +\infty[$ est (d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, théorème 2.2 du cours) l'unique solution de l'EDO $(*)$ telle que $y(t_0) = 0$. Si $y_0 \neq 0$, on pose $z_0 = 1/y_0^2$. La solution y cherchée est la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{(2\,t + \gamma(t_0, z_0)\, t^2)^2}, \quad \gamma(t_0, z_0) = \frac{z_0 - 2\,t_0}{t_0^2}$$

(d'après le résultat établi à la question **3**). L'intervalle de vie de cette solution est le plus grand intervalle ouvert de $]0, +\infty[$ contenant t_0 et sur lequel t ne prend pas la valeur $-2/\gamma(t_0, z_0)$. On note que, du fait que $z_0 \neq 0$, on a toujours $\gamma(t_0, z_0) \neq -2/t_0$, *i.e.* $t_0 \neq -2/\gamma(t_0, z_0)$. Il convient de discuter.

— dans le cas où $z_0 - 2t_0 = 1/y_0^2 - 2t_0 \geq 0$, cet intervalle est $]0, +\infty[$ tout entier car $-2/\gamma(t_0, z_0) \leq 0$ dans ce cas ;

— dans le cas où $z_0 - 2t_0 > 0$, on a $\gamma(t_0, z_0) > -2/t_0$, *i.e.* $t_0 > -2/\gamma(t_0, z_0)$ et l'intervalle de vie de la solution est $] - 2/\gamma(t_0, z_0), +\infty[$.

Exercice 5

Soit $a \in \mathbb{R}$. *On considère l'équation différentielle du second ordre sur* $\mathbb{R}$ *(à coefficients constants, mais avec second membre) :*

$$y''(t) - 5\,y'(t) + 6\,y(t) = t\,e^t \quad \forall\, t \in \mathbb{R}\,. \qquad (\dagger)$$

(1) *Déterminer toutes les fonctions* $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de classe* C^2 *solutions de l'équation différentielle homogène :*

$$y''(t) - 5\,y'(t) + 6\,y(t) = 0 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}\,. \qquad (\dagger\dagger)$$

(on cherchera à déterminer une base du $\mathbb{R}$*-espace vectoriel des solutions de l'EDO* $(\dagger\dagger)$ *après avoir précisé quelle est la dimension de ce* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel).* D'après l'étude des EDO linéaires (section 2.4.2 du polycopié, voir aussi le cours de MISMI [1], section 3.9.3), le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des solutions de l'EDO homogène $(\dagger\dagger)$ est de dimension 2 : en effet, étant donné un point $t_0 \in \mathbb{R}$ (arbitraire) et un couple (y_0, y_0') de nombres réels, il existe une et une seule solution $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2, solution de $(\dagger\dagger)$, et telle que de plus $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y_0'$. Pour trouver une base de solutions, on cherche les racines de l'équation caractéristique :

$$z^2 - 5z + 6 = 0.$$

1. http://www.math.u-bordeaux1.fr/~yger/coursmismi.pdf

Les deux racines (ici réelles) sont $z = 2$ et $z = 3$ (le discriminant du trinôme valant 1). Les deux fonctions

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{2t}, \quad t \in \mathbb{R} \mapsto e^{3t}$$

sont des fonctions $\mathbb{R}$-linéairement indépendantes, solutions de l'EDO (††). La solution générale de (††) (à valeurs réelles) est donc

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \alpha\, e^{2t} + \beta\, e^{3t}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

(2) *Déterminer une solution particulière de l'EDO* (†) *(on la cherchera sous la forme $t \mapsto z(t)\, e^t$, où z désigne une fonction inconnue).* Soit D l'opérateur différentiel d/dt. On a

$$D[z(t)\, e^t] = (z(t) + z'(t))\, e^t, \quad D^2[z(t)e^t] = (z(t) + 2z'(t) + z''(t))\, e^t.$$

On a donc

$$(D^2 - 5D + 6)[z(t)e^t] = (z''(t) - 3\, z'(t) + 2z(t))\, e^t.$$

Pour trouver une solution particulière de (†) de la forme $t \mapsto z(t)\, e^t$, il suffit de trouver une solution particulière $t \mapsto z(t)$ de l'EDO

$$z''(t) - 3z'(t) + 2z(t) = t \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

On cherche cette solution sous la forme $t \mapsto at + b$, ce qui donne

$$-3a + 2(at + b) = t \quad \forall\, t \in \mathbb{R},$$

soit, par identification $a = 1/2$ et $b = 3/4$. La solution particulière de l'EDO (†) ainsi trouvée est

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \left(\frac{t}{2} + \frac{3}{4}\right) e^t.$$

(3) *Déterminer la solution y de l'équation* (†) *qui satisfasse aux contraintes $y(0) = 1$ et $y(\ln(2)) = 0$.* La solution générale de l'EDO (†) est, d'après les résultats établis aux questions **1** et **2** :

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \alpha e^{2t} + \beta e^{3t} + \left(\frac{t}{2} + \frac{3}{4}\right) e^t, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Pour que cette solution satisfasse $y(0) = 1$, il faut que

$$\alpha + \beta + 3/4 = 1.$$

Pour que cette solution satisfasse $y(\ln(2)) = 0$, il faut que

$$4\alpha + 8\beta + 2\Big(\frac{\ln(2)}{2} + \frac{3}{4}\Big) = 0,$$

soit

$$\alpha + 2\beta + \frac{2\ln(2) + 3}{8} = 0.$$

On obtient

$$\beta = -\frac{2\ln(2) + 5}{8}, \quad \alpha = \frac{1}{4} - \beta = \frac{7 + 2\ln(2)}{8}.$$

Bibliographie

[anal1] A. Yger, polycopié du cours d'Analyse 1, 2012-2013

http://www.math.u-bordeaux1.fr/~yger/analyse1.pdf

[L3An] J.P. Marco (ed.) *Mathématiques L3*, Analyse, Pearson Education, Paris, 2009.

[MathL2] J.P. Marco, P. Thieullen & J.A. Weil (ed.), *Mathématiques L2*, Pearson Education, Paris, 2007.

[Mismi] A. Yger, Mathématiques de base, Cours de MISMI, 2007-2008, http://www.math.u-bordeaux1.fr/∼yger/coursmismi.pdf

[Vial] G. Vial, Le système proie-prédateur de Volterra-Lotka, Mars 2011, disponible en ligne sur :

http://lama.univ-savoie.fr/~labart/generated/fichiers/MATH705/gvial_volterra.pdf

[Ycalc] A. Yger, Calcul Scientifique et Symbolique, polycopié de l'UE N1MA3003, 2011-2012, http://www.math.u-bordeaux1.fr/∼yger/CSSL.pdf

[Yint] A. Yger, Théorie de l'intégration, polycopié de l'UE MHT512, 2010-2011, http://www.math.u-bordeaux1.fr/∼yger/mht512.pdf