

# Chapitre 5

## Familles normales

### Théorème de représentation conforme de Riemann

Nous avons établi dans les chapitres précédents les principales propriétés des fonctions holomorphes : développement en série, formule de Cauchy, principes du maximum et des zéros isolés, étude des singularités et théorème des résidus.

La formule de Cauchy nous a permis d'étudier la limite (en supposant qu'elle existe) de suites de fonctions holomorphes. Nous allons nous concentrer dans ce chapitre sur l'existence de telles limites (famille normale) et nous en déduirons le théorème de Riemann qui réduit l'étude des domaines simplement connexes de  $\mathbb{C}$  à celle du disque unité.

#### 1. ETUDE DE SUITES DE FONCTIONS HOLOMORPHES

Soit  $D$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ . On considère l'espace  $\mathcal{O}(D)$  des fonctions holomorphes sur  $D$ . Si “.” désigne la multiplication externe par un scalaire et “ $\times$ ” la multiplication interne, l'objet  $(\mathcal{O}(D), +, \cdot, \times)$  est une algèbre. Elle a une structure d'espace topologique, en munissant  $\mathcal{O}(D)$  de la topologie  $\tau$  de la convergence uniforme sur tout compact. Nous allons montrer que l'espace  $\mathcal{O}(D)$  est alors un espace de Fréchet, c'est-à-dire qu'on peut le munir d'une distance  $d$  définissant la topologie  $\tau$  et que l'espace métrique  $(\mathcal{O}(D), d)$  est complet.

Nous commençons par rappeler le théorème :

**Théorème 1.** *Soit  $(f_n)_n$  une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert  $D$  de  $\mathbb{C}$ , convergeant uniformément sur tout compact de  $D$  vers une fonction  $f$  définie sur  $D$ , à valeurs dans  $\mathbb{C}$ .*

*Alors  $f$  appartient à  $\mathcal{O}(D)$  et pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , la suite des dérivées  $p$ -ièmes  $(f_n^{(p)})_n$  converge vers  $f^{(p)}$  uniformément sur tout compact de  $D$ .*

**Démonstration.** C'est la formule de Cauchy (voir chapitre 2). ■

L'étude des suites amène naturellement à l'étude des séries et des produits infinis, que nous rappelons :

**Corollaire 1.** *Soit  $(f_n)_n$  une suite d'éléments de  $\mathcal{O}(D)$ . On suppose que la série  $\sum f_n$  converge uniformément sur tout compact de  $D$ . Alors la fonction  $f$  définie sur  $D$  par  $f(z) =$*

$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z)$  appartient à  $\mathcal{O}(D)$  et on a :

$$\forall p \in \mathbb{N}, f^{(p)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(p)}.$$

**Démonstration.** On applique le théorème 1 à la suite de fonction  $(f_1 + \dots + f_n)_n$ . ■

**Exemple 1.** Considérons  $f : z \mapsto \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{z + n\pi} \right)$  sur  $\mathbb{C}$ . Si  $K = \overline{D(0, R)}$ ,

la fonction  $z \mapsto \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2}$  n'a pas de pôle dans  $K$  si  $n\pi > R$  et la série entière associée ( $n \geq E(\pi) + 1$ ) converge normalement sur  $K$ . La fonction  $f$  est donc méromorphe sur  $\mathbb{C}$ . Elle est de plus périodique, de période  $\pi$ . Le résidu de  $f$  en  $n\pi$  vaut 1. Il en est de même de la fonction  $z \mapsto \cotan z$ . On en déduit que la fonction  $z \mapsto f(z) - \cotan z$  est holomorphe sur  $\mathbb{C}$ , périodique de période  $\pi$ . De plus, puisque  $\left| \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2} \right| \leq \frac{\pi + |y|}{y^2 + x^2\pi^2 - 2\pi|y| - \pi^2}$ , on en déduit que la fonction  $z \mapsto f(z) - \cotan z$  est bornée sur  $\mathbb{C}$ , d'où constante d'après le théorème de Liouville. On peut montrer que la constante est nulle et donc :

$$\cotan z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{z + n\pi} \right).$$

**Corollaire 2.** Soit  $(f_n)_n$  une suite d'éléments de  $\mathcal{O}(D)$ . On suppose que la série  $\sum (f_n - 1)$  converge uniformément sur tout compact de  $D$ . Alors le produit infini  $P = \prod_{n=0}^{+\infty} f_n$  converge uniformément sur tout compact de  $D$  et  $P$  appartient à  $\mathcal{O}(D)$ .

**Démonstration.** Elle est identique à celle de la proposition 1 du chapitre 3. ■

**Exemple 2.** Le produit infini  $P(z) = z \prod_{n=1}^{+\infty} \left( 1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2} \right)$  définit une fonction holomorphe sur  $\mathbb{C}$ . Sur  $\mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$ , on a :

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2z/n^2\pi^2}{1 - z^2/n^2\pi^2} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2} = \cotan z$$

d'après l'exemple 1. L'ensemble  $\mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$  étant connexe, il existe une constante  $c$  telle que  $P(z) = c \sin z$  sur  $\mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$ . La condition  $P(z) \sim z$  en 0 montre que  $c = 1$  et donc :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \sin z = z \prod_{n=1}^{+\infty} \left( 1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2} \right).$$

### Espace de Fréchet des fonctions holomorphes

On rappelle qu'une fonction  $p$  définie sur un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$  est une semi-norme si elle vérifie :

$$\begin{cases} \forall (x, y) \in E^2, & p(x + y) \leq p(x) + p(y) \\ \forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, & p(\lambda x) = \lambda p(x). \end{cases}$$

**Proposition 1.** *Si  $K$  est un compact de  $D$ , la fonction  $p_K$  définie sur  $\mathcal{O}(D)$  par  $p_K(f) = \sup_K |f|$  est une semi-norme sur  $\mathcal{O}(D)$ .*

**Démonstration.** Laissée au lecteur. ■

L'objet  $(\mathcal{O}(D), p_K)$  désigne l'espace  $\mathcal{O}(D)$  muni de la famille de semi-normes  $(p_K)_K$  où  $K$  parcourt l'ensemble des compacts inclus dans  $D$ . Une suite  $(f_n)_n$  de  $\mathcal{O}(D)$  converge alors vers une fonction  $f$  pour la topologie  $\tau$  (ie la topologie de la convergence uniforme sur tout compact) si pour tout compact  $K$  de  $D$  on a :  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_K(f_n - f) = 0$ . La famille de semi-normes  $(p_K)_K$  définit donc la topologie  $\tau$  et nous noterons maintenant  $(\mathcal{O}(D), p_K)$  l'espace topologique  $\mathcal{O}(D)$  muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

**Définition 1.** *Un espace topologique  $E$  est dit de Fréchet s'il existe une distance  $d$  sur  $E$  définissant la topologie de  $E$  et telle que l'espace métrique  $(E, d)$  est complet.*

On a alors le théorème suivant :

**Théorème 2.** *L'espace  $(\mathcal{O}(D), p_K)$  est un espace de Fréchet.*

**Démonstration.** La démonstration se fait en deux étapes. Nous démontrons dans un premier temps que la topologie  $\tau$  est donnée par une famille **dénombrable** de semi-normes **séparantes**. Nous construisons dans un second temps la distance voulue et montrons qu'elle définit bien la topologie  $\tau$ .

Etape 1. Pour tout entier naturel  $n$ , soit  $K_n = \{z \in D : \text{dist}(z, dD) \geq 1/n\}$ . La suite  $(K_n)_n$  est une suite d'exhaustion de  $D$ , ie vérifie  $K_{n+1} \subset K_n$  et  $\cup_{n \in \mathbb{N}} K_n = D$ .

**Lemme 1.** *La famille de semi-normes  $(p_{K_n})_n$  définit la topologie  $\tau$  de la convergence uniforme sur l'espace  $\mathcal{O}(D)$ .*

**Démonstration.** Pour qu'une suite  $(f_j)_j$  de fonctions holomorphes converge uniformément vers sur tout compact de  $D$  vers une fonction holomorphe  $f$ , il est nécessaire qu'elle converge vers  $f$  uniformément sur tout compact  $K_n$ , ce qui s'écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{j \rightarrow \infty} |f_j - f| = 0.$$

La réciproque vient du fait que la suite  $(K_n)_n$  est une exhaustion de  $D$ . Si  $K$  est un compact de  $D$ , il existe un entier  $n_0$  tel que l'on ait :  $K \subset K_{n_0}$ . La convergence de  $(f_j)_j$ , uniforme sur  $K_{n_0}$  entraîne la convergence uniforme de  $(f_j)_j$  vers  $f$  sur  $K$ .

Etape 2. Définissons sur  $\mathcal{O}(D) \times \mathcal{O}(D)$  la fonction  $d$  par :

$$d(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_{K_n}(f - g)}{1 + p_{K_n}(f - g)}.$$

Le lemme suivant permet de terminer la démonstration du théorème 2 :

**Lemme 2.** (i) La fonction  $d$  est une distance sur  $\mathcal{O}(D)$ .

(ii) Une suite  $(f_j)_j$  de fonctions définies sur  $D$  converge vers une fonction  $f$  uniformément sur tout compact de  $D$  si et seulement si  $\lim_{j \rightarrow \infty} d(f_j, f) = 0$ .

(iii) L'espace métrique  $(\mathcal{O}(D), d)$  est complet.

**Démonstration du lemme 2.** La partie (i) est laissée au lecteur.

Partie (ii). Si  $\lim_{j \rightarrow \infty} d(f_j, f) = 0$ , pour tout  $n \geq 0$ , on a :

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_{K_n}(f_j - f)}{1 + p_{K_n}(f_j - f)} = 0$$

ce qui donne :  $\lim_{j \rightarrow \infty} p_{K_n}(f_j - f) = 0$ .

Réciproquement supposons :  $\lim_{j \rightarrow \infty} p_{K_n}(f_j - f) = 0$  pour tout entier  $n$ . La série définie par  $d$  étant normalement convergente (car majorée par la série de terme général  $\frac{1}{2^n}$ ), pour tout réel  $\varepsilon > 0$  il existe un entier  $n_0$  tel que :

$$\sum_{n \geq n_0} \frac{1}{2^n} \frac{p_{K_n}(f_j - f)}{1 + p_{K_n}(f_j - f)} < \varepsilon$$

uniformément en  $j$ .

De plus, il existe un entier  $j_0$  tel que pour  $j \geq j_0$  et pour tout  $n \leq n_0$  on ait :

$$\frac{1}{2^n} \frac{p_{K_n}(f_j - f)}{1 + p_{K_n}(f_j - f)} < \frac{\varepsilon}{n_0}$$

par hypothèse.

Ainsi, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $j_0$  tel que  $d(f_j, f) < 2\varepsilon$  pour  $j \geq j_0$  :  $\lim_{j \rightarrow \infty} d(f_j, f) = 0$ . Ceci achève la démonstration de la partie (ii) du lemme 2.

Partie (iii). Soit  $(f_j)_j$  une suite de Cauchy d'éléments de  $\mathcal{O}(D)$ , c'est-à-dire une suite vérifiant la condition :

$$\lim_{j, k \rightarrow \infty} d(f_j, f_k) = 0.$$

La suite  $(f_j)_j$  est une suite de Cauchy dans l'espace des fonctions continues sur  $D$ , muni de la convergence de la topologie uniforme sur tout compact de  $D$ . Elle converge donc uniformément sur tout compact de  $D$  vers une fonction  $f$  continue sur  $D$ . Les fonctions  $f_j$  étant holomorphes, la fonction  $f$  est holomorphe (théorème 1) ce qui achève la démonstration du lemme 2 et donc du théorème 2. ■

Nous avons vu dans le théorème 1 que la limite d'une suite de fonctions holomorphes est holomorphe (attention au sens de limite). Nous allons voir maintenant une condition suffisante d'existence de "point" d'accumulation :

**Définition 2.** Une famille  $\mathcal{F}$  de fonctions définies sur un ouvert  $D$  de  $\mathbb{C}$  est dite **normale** si de toute suite  $(f_n)_n$  de  $\mathcal{F}$  on peut en extraire une sous-suite qui converge (pour la topologie  $\tau$ ) ou qui tend vers l'infini uniformément sur tout compact de  $D$ .

Nous avons alors la caractérisation suivante des familles normales :

**Théorème 3.** Une famille  $\mathcal{F}$  de fonctions holomorphes sur un ouvert  $D$  de  $\mathbb{C}$  est normale si et seulement si pour tout compact  $K$  de  $D$  il existe une constante  $M$  telle que :

$$|f'(z)| \leq M(1 + |f(z)|^2)$$

pour tout  $z$  dans  $D$  et  $f$  dans  $\mathcal{F}$ .

**Démonstration.** Supposons qu'il existe une suite  $(f_n)_n$  de fonctions de  $\mathcal{F}$  et un compact  $K$  de  $D$  tels que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f'_n(z)|}{1 + |f_n(z)|^2} = +\infty$ .

Si  $(f_{n_k})_k$  est une sous-suite de  $(f_n)_n$  convergeant vers une fonction holomorphe  $f$ , le théorème 1 entraîne que la quantité  $\frac{|f'_{n_k}(z)|}{1 + |f_{n_k}(z)|^2}$  converge vers  $\frac{|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2}$ , ce qui est contradictoire.

De même, si  $(f_{n_k})_k$  converge uniformément vers l'infini sur tout compact de  $D$ , on peut considérer la suite de fonctions  $(g_{n_k})_k$  définie par  $g_{n_k} = 1/f_{n_k}$ . De l'égalité :

$$\frac{|g'_{n_k}(z)|}{1 + |g_{n_k}(z)|^2} = \frac{|f'_{n_k}(z)|}{1 + |f_{n_k}(z)|^2},$$

on obtient encore une contradiction puisque la suite  $(g_{n_k})_k$  converge uniformément vers 0 sur tout compact de  $D$ .

Réciproquement : supposons que pour tout compact  $K$  de  $D$  il existe une constante  $M$  telle que :

$$|f'(z)| \leq M(1 + |f(z)|^2)$$

pour tout  $z$  dans  $D$  et  $f$  dans  $\mathcal{F}$ .

**Lemme 3.** Tout point  $z_0$  de  $D$  admet un voisinage  $U_0$  tel que pour tout  $f$  dans  $\mathcal{F}$  on ait :

$$|f(z_0)| < A \Rightarrow |f| < 2A \text{ dans } U_0$$

$$|f(z_0)| > B \Rightarrow |f| > B/2 \text{ dans } U_0.$$

Noter qu'on peut prendre pour  $U_0$  un disque centré en  $z_0$ .

**Démonstration du lemme 3.** Soit  $D_0$  un disque centré en  $z_0$ , dont l'adhérence est incluse dans  $D$ . Par hypothèse, il existe  $M_0$  telle que  $|f'(z)| \leq M_0(1 + |f(z)|^2)$  pour tout  $z$  dans  $D_0$  et tout  $f$  dans  $\mathcal{F}$ . Soit  $\alpha$  un réel strictement positif vérifiant  $\alpha < \frac{A}{M_0(1 + 4A^2)}$ . Nous allons montrer que  $U_0 = D(z_0, \alpha)$ .

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un point  $z_1$  dans  $U_0$  et une fonction  $f$  dans  $\mathcal{F}$  tels que  $|f(z_1)| = 2A$ . On peut supposer de plus que pour tout  $z$  dans  $[z_0, z_1[$ ,  $|f(z)| < 2A$ . Ainsi  $|f'(z)| < M_0(1 + 4A^2)$  sur  $[z_0, z_1[$  et donc :

$$A \leq |f(z_1) - f(z_0)| < M_0\alpha(1 + 4A^2) < A.$$

La démonstration est identique si  $|f(z_0)| > B$  en considérant  $g = 1/f$ , ce qui termine la démonstration du lemme 3.

Nous pouvons terminer la démonstration du théorème 3. D'après le lemme 3, l'ensemble des points  $z$  de  $D$  tels que la famille  $\mathcal{F}$  est uniformément bornée en  $z$  est un ouvert et l'ensemble des points  $z$  de  $D$  tels qu'il existe une suite  $(f_n)_n$  d'éléments de  $\mathcal{F}$  vérifiant  $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(z)| = +\infty$  est aussi un ouvert. L'ouvert  $D$  étant connexe, l'un des deux ensembles est nécessairement vide :  $\mathcal{F}$  est soit bornée soit non bornée en tout point. Dans ce dernier cas, le théorème est démontré. Si  $\mathcal{F}$  est bornée en un point  $z_0$  et si  $K$  est un compact contenant le point  $z_0$ , on peut recouvrir  $K$  par un nombre fini d'ouverts vérifiant le lemme 3 : la famille  $\mathcal{F}$  est uniformément bornée sur  $K$ . Elle est donc uniformément bornée sur tout compact de  $D$ . Pour finir la démonstration, il suffit donc de supposer maintenant que  $\mathcal{F}$  est uniformément bornée sur tout compact de  $D$  et de montrer que si  $(f_n)_n$  est une suite de  $\mathcal{F}$ , on peut en extraire une sous-suite uniformément convergente.

**Lemme 4.** *Soit  $(f_n)_n$  une suite de fonctions uniformément bornées sur tout compact de  $D$ . On peut en extraire une sous-suite uniformément convergente.*

**Démonstration du lemme 4.** Soit  $(\zeta_k)_k$  une suite de points de  $D$  dense dans  $D$  (une telle suite existe bien). Nous commençons par extraire de  $(f_n)_n$  une sous-suite convergente en tout point  $\zeta_k$  par le procédé diagonal : la suite  $(f_n(\zeta_1))_n$  est bornée et on peut en extraire une sous-suite  $(f_{n_{1k}})_k$  telle que  $f_{n_{1k}}(\zeta_1)$  converge. De même, la suite  $(f_{n_{1k}}(\zeta_2))_k$  est bornée et on peut extraire de  $(f_{n_{1k}})_k$  une sous-suite  $(f_{n_{2k}})_k$  telle que la suite  $(f_{n_{2k}}(\zeta_2))_k$  converge. La suite  $(f_{n_{kk}})_k$  est alors une suite extraite de  $(f_n)_n$  et converge en tout point  $\zeta_k$ . Nous allons montrer que cette sous-suite est uniformément convergente sur tout compact de  $D$  en utilisant la condition

$$(1) \quad \frac{|f'|}{1 + |f|^2} \text{ borné.}$$

Soit  $K$  un compact quelconque de  $D$  et  $\varepsilon$  un réel positif donné. La suite  $(f_n)_n$  étant uniformément bornée sur  $K$ , la condition 1 entraîne l'existence d'un réel  $C$  tel que  $|f'_n| \leq C$  sur  $K$ , uniformément en  $n$ . Recouvrons  $K$  par des disques de rayon inférieur à  $\varepsilon/6C$ . Si  $z$  et  $z'$  sont deux points quelconques dans un tel disque, on a :  $|f(z) - f(z')| < \varepsilon/3$ . Le nombre de tels disques rencontrant  $K$  étant fini, on choisit dans chacun de ces disques un point  $\zeta_k$ . Ces points sont en nombre fini (appelons les  $\zeta_1, \dots, \zeta_p$ ) et il existe donc un entier  $n_0$  tel que pour tous  $n, m \geq n_0$  et tout  $1 \leq k \leq p$ , on ait :

$$|f_n(\zeta_k) - f_m(\zeta_k)| < \varepsilon/3.$$

Il vient pour tout  $z$  dans  $K$  et tous  $n, m \geq n_0$ , en choisissant  $\zeta_k$  vérifiant toutes les conditions précédentes :

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leq |f_n(z) - f_n(\zeta_k)| + |f_n(\zeta_k) - f_m(\zeta_k)| + |f_m(\zeta_k) - f_m(z)| < \varepsilon.$$

La suite  $(f_n)_n$  est donc uniformément de Cauchy sur  $K$  : elle converge uniformément sur  $K$ . Ceci termine la démonstration du lemme 4 et donc du théorème. ■

**Exemple 3.** 1. La famille  $(\exp(nz))_n$  n'est pas normale.  
2. Toute famille de polynômes est normale.

Le **théorème d'Hurwitz** est un corollaire immédiat du théorème 3 :

**Corollaire 3.** *Si toutes les fonctions d'une famille normale  $\mathcal{F}$  ne s'annulent pas, toute limite éventuelle est soit identiquement nulle soit ne s'annule pas.*

**Démonstration.** Soit  $(f_n)_n$  une suite de  $\mathcal{F}$ , convergeant vers une fonction  $f$ . Considérons la suite  $(g_n)_n$  où  $g_n = 1/f_n$ . L'égalité :

$$\frac{|g'_n|}{1 + |g_n|^2} = \frac{|f'_n|}{1 + |f_n|^2}$$

montre, en accord avec le théorème 3, que la suite  $(g_n)_n$  est normale. Elle admet donc une sous-suite  $(g_{n_k})_k$  qui soit tend vers l'infini (la suite  $(f_{n_k})_k$  tend alors vers 0 et  $f$  est identiquement nulle) soit converge vers une fonction  $g$ . Dans ce dernier cas,  $f = 1/g$  et  $f$  ne peut donc pas s'annuler. ■

Le théorème suivant, appelé **théorème de Montel**, donne une condition suffisante à la normalité d'une famille de fonctions holomorphes :

**Théorème 4.** *Toute famille  $\mathcal{F}$  de fonctions holomorphes sur un domaine  $D$  de  $\mathbb{C}$ , uniformément bornée sur tout compact de  $D$ , est normale.*

Noter que sous les hypothèses du théorème 4 la famille  $\mathcal{F}$  ne peut pas tendre vers l'infini : il suffit donc de montrer que de toute suite de  $\mathcal{F}$  on peut en extraire une sous-suite uniformément convergente.

**Démonstration.** La démonstration de ce théorème a été faite dans la démonstration du théorème 3. ■

## 2. THÉORÈME DE REPRÉSENTATION CONFORME DE RIEMANN

Nous terminons ce chapitre par le théorème de représentation conforme de Riemann. Ce théorème est une particularité de la théorie des fonctions holomorphes d'une variable complexe (ce phénomène n'est plus présent en plusieurs variables complexes, théorie que nous n'aborderons pas cette année). La démonstration que nous présentons permet de voir le théorème de Riemann comme une application de la théorie des familles normales.

**Définition 3.** *Une fonction holomorphe  $f$  définie sur un domaine  $D_1$  à valeurs dans un domaine  $D_2$  est appelée **biholomorphisme de  $D_1$  sur  $D_2$**  si elle est bijective de  $D_1$  sur  $D_2$ , la fonction  $g = f^{-1}$  étant holomorphe de  $D_2$  sur  $D_1$  ie  $g$  est un biholomorphisme de  $D_2$  sur  $D_1$ .*

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le **théorème de représentation conforme de Riemann** :

**Théorème 5.** *Soit  $D$  un domaine simplement connexe de  $\mathbb{C}$ , différent de  $\mathbb{C}$ . Il existe un biholomorphisme de  $D$  sur le disque unité  $\Delta$  de  $\mathbb{C}$ .*

L'existence d'un biholomorphisme entre deux ouverts de  $\mathbb{C}$  est une condition très forte; elle implique en particulier que les deux ouverts sont homéomorphes et donc que si l'un est simplement connexe, l'autre l'est nécessairement. Il est donc nécessaire dans le théorème 5 de considérer des domaines simplement connexes dans le plan.

Il est immédiat qu'il n'existe pas de biholomorphisme de  $\mathbb{C}$  sur  $\Delta$  : d'après le théorème de Liouville, une telle fonction serait constante.

Nous déterminerons dans le prochain envoi le groupe d'automorphismes (ie de biholomorphismes d'un domaine sur lui-même) du disque unité et de  $\mathbb{C}$ . En étudiant leur structure, nous retrouverons qu'il n'existe pas de biholomorphisme de  $\Delta$  sur  $\mathbb{C}$ .

**Démonstration du théorème 4.** Nous allons procéder en trois étapes. Le premier but est de trouver une famille normale  $\mathcal{F}$  de fonctions de  $D$  dans  $\Delta$ . Dans un second temps, nous montrerons qu'il existe une suite de fonctions de  $\mathcal{F}$  uniformément convergente vers une fonction  $f$  de  $\mathcal{F}$ . Nous montrerons enfin que  $f$  est un biholomorphisme de  $D$  sur  $\Delta$ . Nous demanderons en particulier à la dérivée de la fonction  $f$  de ne pas s'annuler : c'est de cette façon que nous allons définir la famille  $\mathcal{F}$  :

**Définition de la famille  $\mathcal{F}$ :** Soit  $z_0$  un point de  $D$ . On considère la famille  $\mathcal{F}$  des fonctions  $f$  holomorphes injectives de  $D$  dans  $\Delta$  vérifiant :  $f(z_0) = 0$ ,  $f'(z_0) > 0$ .

Il faut noter que d'après le théorème 4, la famille  $\mathcal{F}$  est normale puisqu'à valeurs dans l'ouvert borné  $\Delta$ . De toute suite  $(f_n)_n$  de  $\mathcal{F}$ , on pourra extraire une sous-suite uniformément convergente (il n'est pas possible qu'elle tende vers l'infini, puisqu'à valeurs dans  $\Delta$ ). Toute limite éventuelle est bien évidemment à valeurs dans  $\overline{\Delta}$ . La condition  $f_n(z_0) = 0$  entraîne que  $f(z_0) = 0$ , ce qui interdit à la fonction  $f$  d'atteindre le cercle unité par le principe du maximum. On a ainsi construit une fonction de  $D$  dans  $\Delta$ . Le problème vient du fait que la fonction  $f$  peut être constante si on choisit la suite  $(f_n)_n$  arbitrairement. La condition  $f'(z_0) > 0$  nous servira à faire "un bon choix". Il faut remarquer que la condition  $f'_n(z_0) > 0$  n'entraîne pas que la fonction limite est bijective, la dérivée  $f'(z_0)$  pouvant être nulle!

Toutes les bases sont maintenant établies. Nous n'avons cependant pas montré que la famille  $\mathcal{F}$  n'est pas vide alors que nous avons considéré des éléments de cette famille!

**Lemme 5.** *La famille  $\mathcal{F}$  est non vide.*

**Démonstration du lemme 5.** Soit  $a$  un point de  $\mathbb{C} \setminus D$ . La fonction  $z \mapsto z - a$  ne s'annulant pas sur  $D$ , il existe une fonction  $F$  holomorphe sur  $D$  telle que  $\exp(F(z)) = z - a$  sur  $D$  (corollaire 2 chapitre 4). La fonction  $F$  est injective et ne peut pas prendre deux valeurs distinctes de  $2i\pi$ . En particulier,  $F$  ne prend pas la valeur  $F(z_0) + 2i\pi$ . Il existe de plus un disque  $D(F(z_0), r)$  dont toutes les valeurs sont prises (la fonction  $F$  est ouverte). Il existe



donc un disque  $D(F(Z_0) + 2i\pi, r)$  dont aucune valeur n'est prise sur  $D$ . En particulier, on a pour tout point  $z$  de  $D$  :  $|F(z) - F(z_0) - 2i\pi| > r$ . La fonction  $h : z \mapsto (F(z) - F(z_0) - 2i\pi)^{-1}$  est donc holomorphe injective sur  $D$  et vérifie :  $|h(z)| \geq 1/r$  sur  $D$ . La fonction  $g : z \mapsto \frac{r}{1 + r|h(z_0)|} \frac{h'(z_0)}{h'(z_0)} (h(z) - h(z_0))$  appartient alors à  $\mathcal{F}$ . ■

**Lemme 6.** *Il existe une suite d'éléments de  $\mathcal{F}$  uniformément convergente vers une fonction  $f$  de  $\mathcal{F}$ .*

**Démonstration du lemme 6.** Par hypothèse, il existe une suite  $(g_n)_n$  de  $\mathcal{F}$  telle que la suite  $(g'_n(z_0))_n$  converge vers  $M = \sup_{f \in \mathcal{F}} f'(z_0)$ . Noter que  $M$  peut être a priori infini. Soit  $(f_n)_n$  une sous-suite de  $(g_n)_n$  uniformément convergente vers une fonction  $f$ . Il reste à montrer que la fonction  $f$  appartient à  $\mathcal{F}$ . D'après le principe du maximum, la fonction  $f$  est à valeurs dans  $\Delta$  puisque  $f(z_0) = 0$ . Elle est de plus injective. En effet, si  $z'$  est un point de  $D$  et si  $D' = D \setminus \{z'\}$ , la famille  $\mathcal{G} = \{z \in D' \mapsto g(z) - g(z'), g \in \mathcal{F}\}$  est une famille normale car uniformément bornée par 2. Les fonctions de  $\mathcal{G}$  ne s'annulent pas sur  $D'$  (toutes les fonctions de  $\mathcal{F}$  sont injectives sur  $D$ ), toute limite éventuelle de suites de  $\mathcal{G}$  est soit identiquement nulle, soit ne s'annule pas sur  $D'$ . La fonction  $G : z \mapsto f(z) - f(z')$  est une limite et la condition  $f'(z_0) = M > 0$  montre que  $G$  ne s'annule pas sur  $D'$ . Ainsi,  $f$  est injective :  $f$  appartient à  $\mathcal{F}$ . ■

**Lemme 7.** *La fonction  $f$  est un biholomorphisme de  $D$  sur  $\Delta$ .*

**Démonstration du lemme 7.** D'après le lemme 6, il suffit de prouver que  $f$  est surjective de  $D$  sur  $\Delta$ . Supposons par l'absurde qu'il existe une valeur  $\lambda_0$  de  $\Delta$  qui ne soit pas prise par  $f$ . Le domaine  $D$  étant simplement connexe, soit  $H$  telle que  $\exp(H(z)) = \frac{f(z) - \lambda_0}{1 - \lambda_0 f(z)}$  sur  $D$ . On a :

$$\exp(\operatorname{Re} H(z)) = |\exp(H(z))| = \left| \frac{f(z) - \lambda_0}{1 - \lambda_0 f(z)} \right| = \left| \frac{f(z) - \lambda_0}{1 - \overline{f(z)} \lambda_0} \right|.$$

Pour  $z$  fixé dans  $D$ , la fonction  $\lambda \mapsto \frac{f(z) - \lambda}{1 - \overline{f(z)} \lambda}$  est holomorphe au voisinage du disque unité  $\Delta$  de  $\mathbb{C}$ . Le principe du maximum donne :

$$\sup_{|\lambda| < 1} \left| \frac{f(z) - \lambda}{1 - \overline{f(z)} \lambda} \right| = \sup_{|\lambda|=1} \left| \frac{f(z) - \lambda}{1 - \overline{f(z)} \lambda} \right| = \sup_{|\lambda|=1} \frac{|f(z) - \lambda|}{|\lambda - \overline{f(z)}|} = 1.$$

La partie réelle de  $H$  est donc négative sur  $D$  ce qui entraîne que la fonction  $J$  définie sur  $D$  par :

$$J(z) = \frac{H(z) - \overline{H(z_0)}}{H(z) + \overline{H(z_0)}}$$

vérifie :

$$|J(z)| < 1 \text{ et } J'(z_0) = -M \frac{1 - |\lambda_0|^2}{2|\lambda_0| \log |\lambda_0|}.$$

La fonction  $j : z \mapsto J(z) \frac{|J'(z_0)|}{J'(z_0)}$  est donc un élément de  $\mathcal{F}$  et sa dérivée en  $z_0$  vaut :

$$j'(z_0) = M \frac{1 - |\lambda_0|^2}{2|\lambda_0| \log(1/|\lambda_0|)}.$$

La fonction  $t \mapsto \frac{1-t^2}{2t \ln(1/t)}$  étant strictement supérieure à 1 sur  $]0, 1[$ ,  $j'(z_0)$  est strictement supérieure à  $M$ , ce qui est contradictoire.

Ceci achève la démonstration du lemme 7 et donc du théorème 5. ■

La puissance du théorème de Riemann vient de sa généralité. Il est cependant possible dans certains cas de déterminer explicitement le biholomorphisme entre certains domaines et le disque unité.

**Exemple 4.** Montrer que  $f : z \mapsto \frac{1-z}{1+z}$  est un biholomorphisme de  $\Delta$  sur le demi-plan  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ . Si  $\varphi$  est une détermination de la racine carrée, montrer que  $f \circ \varphi$  est un biholomorphisme de  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$  sur  $\Delta$ .