Exercices sur les intégrales généralisées

1. Calculer les inégrales généralisées suivantes :

$$a)\ \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+e^x)(1+e^{-x})} \qquad b)\ \int_0^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx \qquad c)\ \int_0^{1} \ln x\,dx$$

$$d)\ \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx \qquad e)\ \int_0^{1} \frac{\ln x}{(1+x)^2}\,dx \qquad f)\ \int_0^{\infty} x^n e^{-x}\,dx \quad (n\in\mathbf{N})$$

$$g)\ \int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx \qquad h)\ \int_a^{\infty} \frac{dx}{x(x+r)} (a>0,\ r>0) \qquad i)\ \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2x dx}{\sqrt{\sin 2x}}$$

2. Montrer que les intégrales suivantes convergent :

$$a)\ \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,e^{-\sqrt{x^2+x+1}}\,dx \quad b)\ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \ln(1+\sin x)\,dx \quad c)\ \int_0^{\infty} e^{-t^2}\,dt \quad d)\ \int_0^{\infty} \frac{1+\sin t}{1+\sqrt{t^3}}\,dt\ .$$

3. Déterminer pour quelles valeurs du couple $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ les intégrales suivantes sont convergentes. (On dessinera dans le plan l'ensemble des couples (α,β) pour lesquels il y a convergence).

$$a)\ \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}(1+x^{\beta})} \quad b)\ \int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x^{\alpha})}{x^{\beta}}\,dx \quad c)\ \int_0^{\infty} \frac{(1+t)^{\alpha}-t^{\alpha}}{t^{\beta}}\,dt\ .$$

4. Etudier pour quelles valeurs de $n\in\mathbb{N}$ l'intégrale $I(n)=\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\ln x}{x^n}\,dx$ converge et calculer $I(n)$ dans ce cas.

5. Soit $I(\lambda)=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{\lambda})}$. Montrer que $I(\lambda)$ converge pour tout réel λ et calculer cette intégrale en utilisant le changement de variable $t=1/x$.

6. Soit $I=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}\,dt$.

a) Montrer que I est convergente.

b) Pour $\varepsilon>0$, établir, en posant $x=2t$, la relation $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}\,dt=\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon}\frac{e^{-t}}{t}\,dt$.

c) En déduire la valeur de I.

7. Soit $J=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\,dx$.

a) Montrer que J est convergente et que l'on a $J = \int_0^{\pi/2} \ln \cos x \, dx$.

b) Montrer que $2J = \int_0^{\pi/2} \ln \frac{\sin 2x}{2} \, dx$, et en déduire la valeur de J.

8. Montrer que les intégrales suivantes sont semi-convergentes :

$$a) \int_\pi^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \, dx \quad b) \int_{-1}^\infty \cos(x^2) \, dx \text{ (poser } u = x^2) \quad c) \int_\pi^\infty x^2 \sin(x^4) \, dx \ .$$

9. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue et périodique dont l'intégrale $\int_0^\infty f(x) \, dx$ est convergente. Montrer que f est la fonction nulle. (Raisonner par l'absurde : supposer que $f(c) \neq 0$ pour un certain réel c, et montrer que le critère de Cauchy est alors contredit).

10. Soit f une fonction uniformément continue de $[\, a, \infty \,[$ dans $\mathbb{R}$, telle que l'intégrale $\int_a^\infty f(x) \, dx$ converge. Montrer que $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ (montrer que sinon le critère de Cauchy serait contredit).

11. Soit f une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, quand x tend vers $\pm\infty$, on ait $f'(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

a) Démontrer que les limites L et ℓ de f en $+\infty$ et $-\infty$ respectivement existent.

b) On suppose en outre que, pour tout x réel, on a $|f'(x)| \leq \frac{1}{x^2+1}$. Montrer que $|L - \ell| \leq \pi$.

12. Soit f une fonction décroissante de $[\, a, \infty \,[$ dans $\mathbb{R}^+$.

a) Montrer que si l'intégrale $\int_a^\infty f(t) \, dt$ converge, alors $\lim_{x \to \infty} x f(x) = 0$.

(Remarquer que l'on a, si $x \geq a$, l'inégalité : $x f(2x) \leq \int_x^{2x} f(t) \, dt$).

b) Montrer par un contre-exemple que la réciproque est fausse.

13. Déterminer la limite des suites (a_n) définies ci-dessous :

$$a) \ a_n = \int_0^\infty \frac{\arctan(nx)}{n(1+x^2)} \, dx \ , \ b) \ a_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n} \ , \ c) \ a_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} \ , \ d) \ a_n = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{n+1}{n}\, x\right)}{1+x^2} \, dx \ .$$

14. Etudier pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale $J_n = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^3+1)^n}$ converge. Calculer J_1, puis montrer que si $n \geq 2$, on a $J_{n+1} = \frac{3n-1}{3n} J_n$. En déduire J_n si $n \geq 1$.

Corrigé

1. a) On a
$$\frac{1}{(1+e^x)(1+e^{-x})} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\ .$$
Cette expression est de la forme $u'/(1+u)^2$ et admet comme primitive $-1/(1+u)$. Donc
$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+e^x)(1+e^{-x})} = \left[-\frac{1}{1+e^x}\right]_0^\infty = \frac{1}{2} - \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{2}\ .$$

b) Une primitive de $e^{-\sqrt{x}}/\sqrt{x}$ est $-2e^{-\sqrt{x}}$, donc
$$\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \Big[-2e^{-\sqrt{x}}\Big]_0^\infty = 2(\lim_{x\to 0} e^{-\sqrt{x}} - \lim_{x\to\infty} e^{-\sqrt{x}}) = 2\ .$$

c) Une primitive de $\ln x$ est $x\ln x - x$. Donc
$$\int_0^1 \ln x\,dx = \Big[x\ln x - x\Big]_0^1 = -1 - \lim_{x\to 0}(x\ln x - x) = -1\ ,$$
car la limite de $x\ln x$ est nulle en 0.

d) En intégrant par parties
$$\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = -\frac{\ln x}{x} + \int\frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\ ,$$
donc
$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right]_1^\infty = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right) + 1 = 1\ .$$

e) En intégrant par parties
$$\int \frac{\ln x}{(1+x)^2}\,dx = -\frac{\ln x}{1+x} + \int\frac{dx}{x(1+x)}\ .$$
Mais en décomposant la fraction rationnelle
$$\frac{1}{x(1+x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}\ ,$$
on obtient
$$\int \frac{\ln x}{(1+x)^2}\,dx = -\frac{\ln x}{1+x} + \ln x - \ln(1+x) = \frac{x\ln x}{1+x} - \ln(1+x)\ .$$
Alors
$$\int_0^1 \frac{\ln x}{(1+x)^2}\,dx = \left[\frac{x\ln x}{1+x} - \ln(1+x)\right]_0^1 = -\ln 2 - \lim_{x\to 0}\left(\frac{x\ln x}{1+x} - \ln(1+x)\right) = -\ln 2\ .$$

f) Posons $I_n = \int\limits_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$. Puisque les fonctions intégrées sont positives, la fonction F_n définie par

$$F_n(\alpha) = \int\limits_0^\alpha x^n e^{-x}\,dx\ ,$$

est croissante et possède une limite finie ou non à $+\infty$.
En intégrant par parties, si $n \geq 1$.

$$\int x^n e^{-x}\,dx = -x^n e^{-x} + \int n x^{n-1} e^{-x}\,dx\ .$$

Mais

$$\lim_{x\to\infty} x e^{-x} = 0\ .$$

Il en résulte que

$$\lim_{\alpha\to\infty} \int\limits_0^\alpha x^n e^{-x}\,dx = n \lim_{\alpha\to\infty} \int\limits_0^\alpha x^{n-1} e^{-x}\,dx\ ,$$

et donc

$$I_n = n I_{n-1}\ .$$

Mais, d'après b),

$$I_0 = \int\limits_0^\infty e^{-x}\,dx = 1\ ,$$

donc l'intégrale I_n converge et

$$I_n = n(n-1)\cdots 1 \cdot I_0 = n!\ .$$

g) Comme $\arctan x$ a pour dérivée $1/(1+x^2)$, on a

$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\,(\arctan x)^2\ ,$$

et

$$\int\limits_0^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\,(\arctan x)^2\right]_0^\infty = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}\,(\arctan x)^2 = \frac{\pi^2}{8}\ .$$

h) La fraction rationnelle se décompose facilement, puisque

$$\frac{1}{x(x+r)} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+r}\right)\ ,$$

et admet sur $[\,a,\,\infty\,[$ la primitive $\dfrac{1}{r}\,\ln\dfrac{x}{x+r}$. Donc

$$\int\limits_a^\infty \frac{dr}{x(x+r)} = \left[\frac{1}{r}\,\ln\frac{x}{x+r}\right]_a^\infty = \frac{1}{r}\left(\ln\frac{a+r}{a} + \lim_{x\to\infty} \ln\frac{x}{x+r}\right) = \frac{1}{r}\,\ln\frac{a+r}{a}\ .$$

i) Une primitive de $\cos 2x/\sqrt{\sin 2x}$ est $\sqrt{\sin 2x}$, donc

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos 2x dx}{\sqrt{\sin 2x}} = \left[\sqrt{\sin 2x}\right]_0^{\pi/2} = \lim_{x\to\pi/2} \sqrt{\sin 2x} - \lim_{x\to 0} \sqrt{\sin 2x} = 0\ .$$

2. a) Au voisinage de 0 on a

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{-\sqrt{x^2+x+1}} \sim \frac{e^{-1}}{\sqrt{x}}\ ,$$

donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{-\sqrt{x^2-x+1}}\, dx$ converge par comparaison à $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}}$.

Lorsque $x > 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{-\sqrt{x^2+x+1}} \leq e^{-x}\ .$$

Et l'intégrale $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{-\sqrt{x^2+x+1}}\, dx$ converge par comparaison à $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x} dx$.

b) Cherchons un équivalent de $\ln(1+\sin x)\, dx$ au voisinage de $-\pi/2$. Posons $u = x + \pi/2$. Alors

$$\ln(1+\sin x) = \ln(1-\cos u) = \ln\left(\frac{u^2}{2} + \circ(u^2)\right) = 2\ln u\, \left(1 + \frac{\ln(1/2 + \circ(1))}{2\ln u}\right) \sim 2\ln u\ .$$

Mais l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln u\, du$ converge (Voir ex 1c) et $\ln u$ est négative. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \ln(1+\sin x)\, dx$ converge.

c) On peut donner deux arguments montrant la convergence de l'intégrale.

1) Lorsque $t > 1$, on a $t^2 > t$, donc $e^{-t^2} < e^{-t}$, et l'intégrale $\displaystyle\int^\infty e^{-t^2} dt$ converge par comparaison à l'intégrale $\displaystyle\int^\infty e^{-t} dt$.

2) Lorsque t tend vers l'infini $t^2 e^{-t^2}$ admet 0 comme limite, donc est majoré par 1 sur un intervalle $[\,a,\ +\infty\,[$. Alors $e^{-t^2} \leq 1/t^2$, et l'intégrale $\displaystyle\int^\infty e^{-t^2} dt$ converge par comparaison à l'intégrale $\displaystyle\int^\infty \frac{dt}{t^2}$.

d) On a, si $t > 0$,

$$0 \leq \frac{1+\sin t}{1+\sqrt{t^3}} \leq \frac{2}{t^{3/2}}\ ,$$

et l'intégrale $\displaystyle\int^\infty \frac{1+\sin t}{1+\sqrt{t^3}}\, dt$ converge par comparaison à l'intégrale $\displaystyle\int^\infty \frac{dt}{t^{3/2}}$.

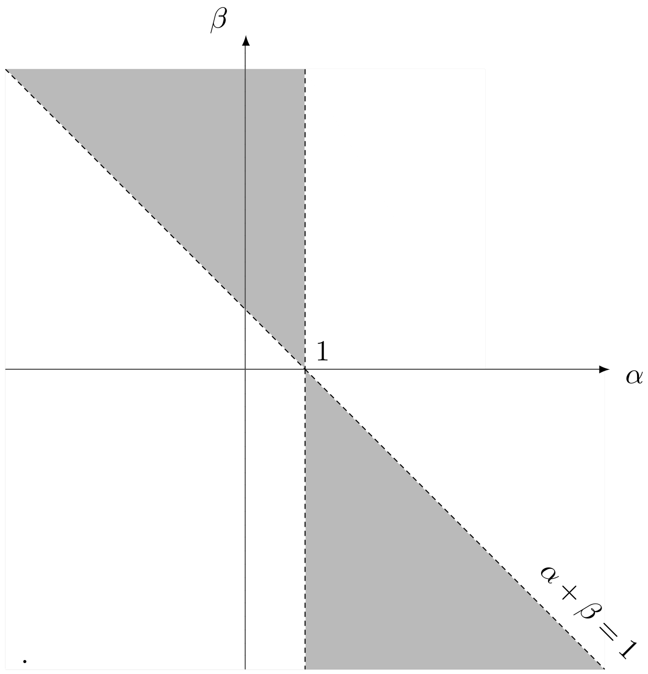
3. a) Cherchons un équivalent simple en 0 et en $+\infty$ de la fonction f définie sur $]\,0,\ \infty\,[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha(1+x^\beta)}\ .$$

Le résultat dépend du signe de β. On peut résumer ce que l'on obtient dans le tableau suivant :

	$\sim f(x)$ en 0	$\sim f(x)$ en $+\infty$	condition de convergence de $\int_0^1 f(x)\,dx$	condition de convergence de $\int_1^\infty f(x)\,dx$
$\beta > 0$	$\dfrac{1}{x^\alpha}$	$\dfrac{1}{x^{\alpha+\beta}}$	$\alpha < 1$	$\alpha + \beta > 1$
$\beta = 0$	$\dfrac{1}{2x^\alpha}$	$\dfrac{1}{2x^\alpha}$	$\alpha < 1$	$\alpha > 1$
$\beta < 0$	$\dfrac{1}{x^{\alpha+\beta}}$	$\dfrac{1}{x^\alpha}$	$\alpha + \beta < 1$	$\alpha > 1$

L'ensemble des couples (α, β) pour lesquels l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ est le domaine du plan limité par les droites d'équation $\alpha + \beta = 1$ et $\alpha = 1$ (exclues). On ne peut jamais avoir $\beta = 0$.



b) Même méthode. Les équivalents dépendent du signe de α cette fois.
Remarquons que si $\alpha > 0$, x^α tend vers 0 en 0 donc

$$\ln(1 + x^\alpha) \sim x^\alpha \ ,$$

et si $\alpha < 0$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \ln(1 + x^\alpha) &= \ln(x^\alpha) + \ln(1 + x^{-\alpha}) \\ &= \alpha \ln x \left(1 + \frac{\ln(1 + x^{-\alpha})}{\alpha \ln x}\right) \ , \end{aligned}$$

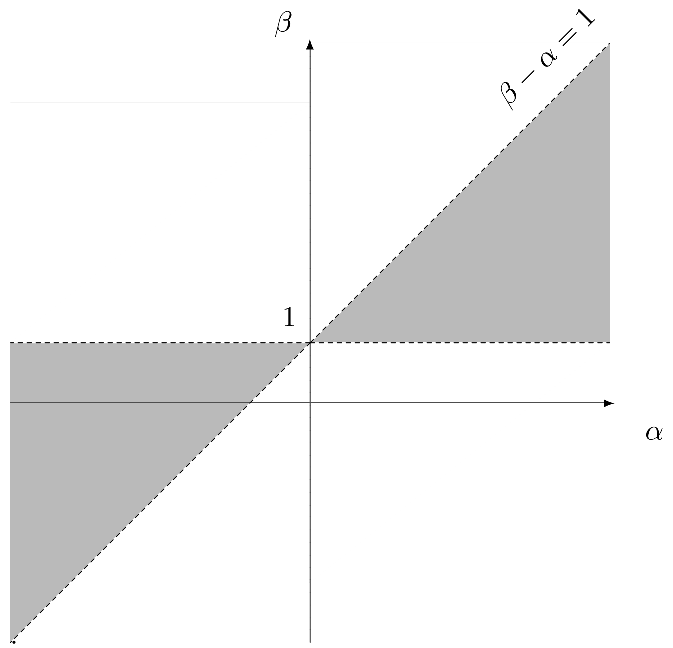
et donc

$$\ln(1+x^\alpha) \sim \alpha \ln x\ .$$

On a des résultats inversés en $+\infty$. On peut résumer ce que l'on obtient dans le tableau suivant :

	$\sim f(x)$ en 0	$\sim f(x)$ en $+\infty$	condition de convergence de $\int_0^1 f(x)\,dx$	condition de convergence de $\int_1^\infty f(x)\,dx$
$\alpha > 0$	$\dfrac{1}{x^{\beta-\alpha}}$	$\alpha\dfrac{\ln x}{x^\beta}$	$\beta - \alpha < 1$	$\beta > 1$
$\alpha = 0$	$\dfrac{\ln 2}{x^\beta}$	$\dfrac{\ln 2}{x^\beta}$	$\beta < 1$	$\beta > 1$
$\alpha < 0$	$\alpha\dfrac{\ln x}{x^\beta}$	$\dfrac{1}{x^{\beta-\alpha}}$	$\beta < 1$	$\beta - \alpha > 1$

L'ensemble des couples (α, β) pour lesquels l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ est le domaine du plan limité par les droites d'équation $\beta - \alpha = 1$ et $\beta = 1$ (exclues). On ne peut jamais avoir $\alpha = 0$.



c) Posons

$$f(t) = \frac{(1+t)^\alpha - t^\alpha}{t^\beta}\ .$$

Si $\alpha = 0$ la fonction f est nulle et l'intégrale converge.

Si $\alpha \neq 0$ et si t tend vers l'infini, on écrit

$$(1+t)^\alpha - t^\alpha = t^\alpha \left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^\alpha - 1 \right) ,$$

et en faisant un développement limité en 0 par rapport à $1/t$, on obtient

$$(1+t)^\alpha - t^\alpha = t^\alpha \left(1 + \frac{\alpha}{t} + \circ\left(\frac{1}{t}\right) - 1\right) \sim \alpha t^{\alpha-1} .$$

Donc

$$f(t) \sim \frac{\alpha}{t^{\beta-\alpha+1}} ,$$

et l'intégrale $\int\limits_1^\infty f(t)\,dt$ converge si et seulement si $\beta - \alpha > 0$.

En 0, le résultat dépend du signe de α.

Si $\alpha < 0$

$$(1+t)^\alpha - t^\alpha = -t^\alpha \left(1 - t^{-\alpha}(1+t)^\alpha\right) \sim -t^\alpha ,$$

car $1 - t^{-\alpha}(1+t)^\alpha$ tend vers 1. On en déduit

$$f(t) \sim -\frac{1}{t^{\beta-\alpha}} ,$$

et l'intégrale $\int\limits_0^1 f(t)\,dt$ converge si et seulement si $\beta - \alpha < 1$.

Si $\alpha > 0$, la quantité $(1+t)^\alpha - t^\alpha$ tend vers 1 en 0, donc

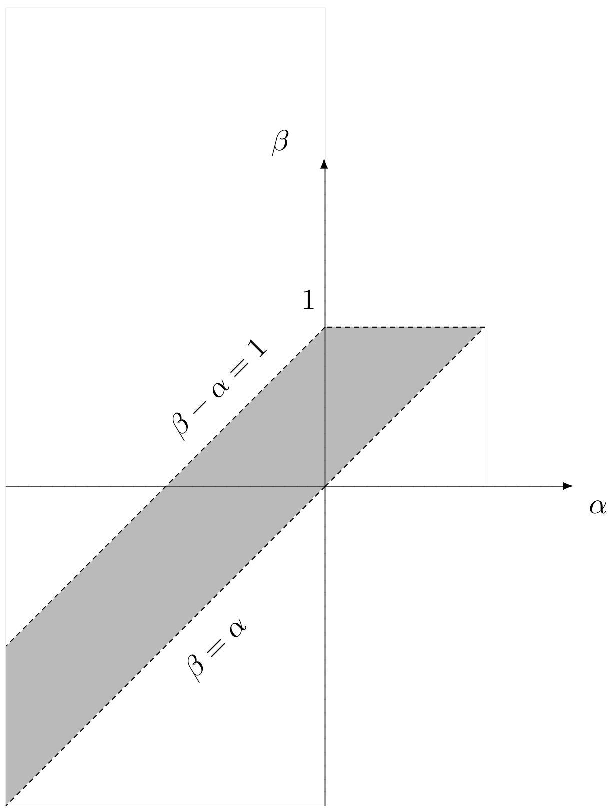
$$f(t) \sim \frac{1}{t^\beta} ,$$

et l'intégrale $\int\limits_0^1 f(t)\,dt$ converge si et seulement si $\beta < 1$.

On a donc le tableau suivant :

	$\sim f(t)$ en 0	$\sim f(t)$ en $+\infty$	condition de convergence de $\int\limits_0^1 f(t)\,dt$	condition de convergence de $\int\limits_1^\infty f(t)\,dt$
$\alpha > 0$	$\frac{1}{t^\beta}$	$\frac{\alpha}{t^{\beta-\alpha+1}}$	$\beta < 1$	$\beta - \alpha > 0$
$\alpha < 0$	$-\frac{1}{t^{\beta-\alpha}}$	$\frac{\alpha}{t^{\beta-\alpha+1}}$	$\beta - \alpha < 1$	$\beta - \alpha > 0$

Les couples (α, β) répondant à la question sont les points du domaine limité par les droites d'équation $\beta = 1$, $\beta = \alpha$ et $\beta = \alpha + 1$ (bords exclus), auxquels on peut ajouter la droite d'équation $\alpha = 0$.



4. On a une intégrale de Bertrand $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^n(\ln x)^{-1}}$ qui converge si et seulement si $n \geq 2$.

Si $n \geq 1$, intégrons par parties $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^n}\,dx$. On a

$$\int \frac{\ln x}{x^n}\,dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1}\,\ln x - \int \frac{x^{-n+1}}{-n+1}\,\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1}\,\ln x - \frac{x^{-n+1}}{(n-1)^2}\ ,$$

et donc

$$I(n) = \left[\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\,\ln x - \frac{x^{-n+1}}{(n-1)^2}\right]_1^{\infty} = \frac{1}{(n-1)^2}\ .$$

5. Soit, pour $x > 0$, $f_\lambda(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)(1+x^\lambda)}$.

On a

$$0 \leq f_\lambda(x) = \frac{1}{1+x^2}\ ,$$

et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ converge. Il résulte du théorème de comparaison que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^\lambda)}$ converge.

En posant $t = 1/x$, on a $x = 1/t$ donc $dx = -dt/t^2$, et l'on obtient

$$I(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{t^\lambda\,dt}{(t^2+1)(t^\lambda+1)}\ .$$

Alors, en additionnant, puisque toutes les intégrales convergent,

$$2I(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{dt}{(t^2+1)(t^\lambda+1)} + \int_0^{\infty} \frac{t^\lambda\,dt}{(t^2+1)(t^\lambda+1)} = \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2+1} = \Big[\arctan t\Big]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}\ .$$

6. a) En effectuant un développement limité en 0, on a

$$e^{-t} - e^{-2t} = 1 - t - (1 - 2t) + \circ(t) = t + \circ(t) \ ,$$

donc

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} = 1 \ ,$$

et la fonction se prolonge par continuité en 0. Il en résulte que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\, dt$ converge.

D'autre part, si $t \geq 1$, on a

$$0 \leq \frac{e^{-t}}{t} \leq e^{-t} \quad \text{et} \quad 0 \leq \frac{e^{-2t}}{t} \leq e^{-2t} \ ,$$

et puisque les intégrales $\displaystyle\int_1^\infty e^{-t}\, dt$ et $\displaystyle\int_1^\infty e^{-2t}\, dt$ convergent, les intégrales $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-t}}{t}\, dt$ et $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-2t}}{t}\, dt$ convergent également. Donc la différence $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\, dt$ converge.

b) Transformons $\displaystyle\int_\varepsilon^\infty \frac{e^{-2t}}{t}\, dt$ par le changement de variable $x = 2t$. On obtient

$$\int_\varepsilon^\infty \frac{e^{-2t}}{t}\, dt = \int_{2\varepsilon}^\infty \frac{e^{-t}}{t}\, dt \ ,$$

d'où

$$\int_\varepsilon^\infty \frac{e^{-t}}{t}\, dt - \int_{2\varepsilon}^\infty \frac{e^{-2t}}{t}\, dt = \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t}\, dt \ .$$

c) On cherche la limite lorsque ε tend vers 0 du membre de droite. En utilisant la première formule de la moyenne, il existe c_ε dans $[\,\varepsilon,\, 2\varepsilon\,]$ tel que

$$\int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t}\, dt = e^{-c_\varepsilon} \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{1}{t}\, dt = e^{-c_\varepsilon} \ln 2 \ .$$

Comme c_ε tend vers zéro d'après le théorème d'encadrement, il en résulte que $I = \ln 2$.

7. a) la fonction qui à x associe $\ln \sin x$ est continue sur $]\,0,\, \pi/2\,]$. On étudie ce qui se passe en 0. On a au voisinage de 0

$$\ln \sin x = \ln(x + \circ(x)) = \ln x + \ln(1 + \circ(1)) \ ,$$

donc

$$\ln \sin x = \ln x \left(1 + \frac{\ln(1 + \circ(1))}{\ln x}\right) \ .$$

Mais $1 + \dfrac{\ln(1+\circ(1))}{\ln x}$ tend vers 1 lorsque x tend vers 0, et donc

$$\ln \sin x \sim \ln x \ .$$

D'autre part l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln x \, dx$ converge (ex 1 c) et $\ln x$ est de signe constant au voisinage de 0. Donc l'intégrale J converge.

Le changement de variable $t = \pi/2 - x$ donne immédiatement

$$J = \int_0^{\pi/2} \ln \cos t \, dt \ ,$$

puisque $\cos(\pi/2 - x) = \sin x$.

b) Alors, puisque

$$\ln \sin x + \ln \cos x = \ln(\sin x \cos x) = \ln \frac{\sin 2x}{2} \ ,$$

on obtient

$$2J = \int_0^{\pi/2} \ln \frac{\sin 2x}{2} \, dx \ .$$

Ce que l'on peut écrire

$$2J = \int_0^{\pi/2} \ln \sin 2x \, dx - \int_0^{\pi/2} \ln 2 \, dx = \int_0^{\pi/2} \ln \sin 2x \, dx - \frac{\pi \ln 2}{2} \ .$$

Effectuons le changement de variable $u = 2x$ dans l'intégrale du membre de droite. On trouve

$$\int_0^{\pi/2} \ln \sin 2x \, dx = \int_0^{\pi} \ln \sin u \, \frac{du}{2} \ .$$

Mais le changement de variable $v = \pi - u$ donne, puisque $\sin(\pi - v) = \sin v$,

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \ln \sin u \, du = \int_0^{\pi/2} \ln \sin v \, dv \ .$$

Donc

$$\int_0^{\pi} \ln \sin u \, \frac{du}{2} = \int_0^{\pi/2} \ln \sin u \, du = J \ .$$

Finalement

$$2J = J - \frac{\pi \ln 2}{2} \ ,$$

et donc

$$J = -\frac{\pi \ln 2}{2} \ .$$

8. a) *Première méthode* En intégrant par parties

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2}\int \frac{\sin x}{\sqrt{x^{3/2}}}\,dx\ .$$

Or la fonction $x \mapsto \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$ admet une limite nulle en $+\infty$, et

$$\frac{|\sin x|}{\sqrt{x^{3/2}}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^{3/2}}}\ .$$

Donc l'intégrale $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{x^{3/2}}}\,dx$ converge absolument, donc converge. Il en résulte que l'intégrale $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$ converge.

Deuxième méthode En appliquant directement le critère d'Abel.
La fonction $x \mapsto 1/\sqrt{x}$ est décroissante et tend vers 0 à l'infini, par ailleurs

$$\left|\int_x^{x'} \cos t\,dt\right| = |\sin x' - \sin x| \leq 2\ ,$$

donc l'intégrale converge.

Pour montrer qu'elle ne converge pas absolument, on peut utiliser l'inégalité

$$|\cos x| \geq \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}\ .$$

Alors

$$(1)\qquad \int_\pi^x \frac{|\cos t|}{\sqrt{t}}\,dt \geq \int_\pi^x \frac{1+\cos 2t}{2\sqrt{t}}\,dt\ = \int_\pi^x \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt + \int_\pi^x \frac{\cos 2t}{2\sqrt{t}}\,dt\ .$$

Mais

$$\int_\pi^x \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = \sqrt{x} - \sqrt{\pi}\ ,$$

et ceci tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. Par contre, en posant $u = 2t$, on obtient

$$\int_\pi^x \frac{\cos 2t}{2\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{2\pi}^{2x} \frac{\cos u}{\sqrt{u}}\,du\ ,$$

et elle possède une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. Donc le membre de droite de l'inégalité (1) tend vers $+\infty$ et il en résulte que celui de gauche a la même limite. Par suite, l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^x \frac{|\cos t|}{\sqrt{t}}\,dt$ diverge.

b) Comme la fonction qui à x associe $\cos(x^2)$ est continue sur $[-1,\ +\infty[$, l'intégrale $\int\limits_{-1}^{\infty} \cos(x^2)\,dx$ converge si et seulement si l'intégrale $\int\limits_{\sqrt{\pi}}^{\infty} \cos(x^2)\,dx$ converge, et de même l'intégrale $\int\limits_{-1}^{\infty} |\cos(x^2)|\,dx$

converge si et seulement si l'intégrale $\int\limits_{\sqrt{\pi}}^{\infty} |\cos(x^2)|\,dx$ converge. En faisant le changement de variable $t = x^2$ on obtient,

$$\int\limits_{\sqrt{\pi}}^{\infty} \cos(x^2)\,dx = \int\limits_{\pi}^{\infty} \frac{\cos t}{2\sqrt{t}}\,dt\ ,$$

et également

$$\int\limits_{\sqrt{\pi}}^{\infty} |\cos(x^2)|\,dx = \int\limits_{\pi}^{\infty} \frac{|\cos t|}{2\sqrt{t}}\,dt\ .$$

Il en résulte que l'intégrale $\int\limits_{\sqrt{\pi}}^{\infty} \cos(x^2)\,dx$ est semi-convergente, et donc que l'intégrale $\int\limits_{-1}^{\infty} \cos(x^2)\,dx$ est également semi-convergente.

c) On effectue le changement de variable $u = x^4$. L'intégrale devient

$$\int\limits_{\pi}^{\infty} x^2\sin(x^4)\,dx = \int\limits_{\pi^4}^{\infty} \frac{\sin u}{u^{1/4}}\,du\ .$$

La situation est identique à celle de l'exercice a). La fonction qui à t dans $[\pi,\ \infty[$ associe $1/t^{1/4}$ est décroissante et tend vers 0 à l'infini. Par ailleurs

$$\left|\int\limits_{x}^{x'} \sin t\,dt\right| = |\cos x - \cos x'| \leq 2\ .$$

Donc la critère d'Abel permet de conclure que l'intégrale $\int\limits_{\pi}^{\infty} \frac{\sin u}{u^{1/4}}\,du$ converge.

Pour montrer qu'elle ne converge pas absolument, on peut utiliser l'inégalité

$$|\sin u| \geq \sin^2 u = \frac{1-\cos 2u}{2}\ .$$

et conclure comme dans a).

9. Raisonnons par l'absurde. S'il existe c dans $[0,\ \infty[$ tel que $f(c) \neq 0$, on peut, quitte à prendre la fonction $-f$, supposer que $f(c) > 0$. Comme f est continue en c, il existe un intervalle $[\alpha,\ \beta]$ inclus dans $[0,\ \infty[$ et non réduit à un point, tel que $f(x) > 0$ sur $[\alpha,\ \beta]$. Soit alors m le minimum de f sur $[\alpha,\ \beta]$. Ce minimum est atteint en un point de cet intervalle et donc $m > 0$. Si la fonction f est $T-$périodique, on a, pour tout entier n positif,

$$\int_{\alpha+nT}^{\beta+nT} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \geq m(\beta-\alpha)\ .$$

Puisque l'intégrale $\int\limits_{0}^{\infty} f(x)\,dx$ converge, le critère de Cauchy s'applique et il existe $A > 0$ tel que $A < X < Y$ implique

$$\left|\int\limits_{X}^{Y} f(x)\,dx\right| < m(\beta-\alpha)\ .$$

Mais comme la suite $(\alpha + nT)$ tend vers plus l'infini, il existe N tel que $n \geq N$ implique $\alpha + nT \geq X$. Dans ce cas

$$\int_{\alpha+nT}^{\beta+nT} f(x)\,dx = \left| \int_{\alpha+nT}^{\beta+nT} f(x)\,dx \right| < m(\beta - \alpha) \ .$$

On obtient bien une contradiction.

10. Raisonnons par l'absurde, et nions le fait que f tende vers 0 à l'infini. Il existe un nombre $\varepsilon > 0$, tel que pour tout nombre A, il existe $x_A \geq A$ tel que $|f(x_A)| \geq \varepsilon$.

En utilisant la continuité uniforme de f, il existe $\alpha > 0$ tel que, l'inégalité $|x - x'| \leq \alpha$, implique

$$|f(x) - f(x')| \leq \varepsilon/2 \ .$$

En particulier, si

$$x_A \leq t \leq x_A + \alpha \ ,$$

on a

$$|f(x_A) - f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \ ,$$

et donc

$$-\frac{\varepsilon}{2} \leq f(x_A) - f(t) \leq \frac{\varepsilon}{2} \ ,$$

ou encore

$$f(x_A) - \frac{\varepsilon}{2} \leq f(t) \leq f(x_A) + \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Si $f(x_A) > 0$, on a $f(x_A) \geq \varepsilon$ et

$$f(t) \geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} \ ,$$

donc

$$\left| \int_{x_A}^{x_A+\alpha} f(t)\,dt \right| = \int_{x_A}^{x_A+\alpha} f(t)\,dt \geq \frac{\alpha\varepsilon}{2} \ .$$

Si $f(x_A) < 0$, on a $-f(x_A) \geq \varepsilon$ et

$$f(t) \leq f(x_A) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} - \varepsilon = -\frac{\varepsilon}{2} \ ,$$

donc

$$\left| \int_{x_A}^{x_A+\alpha} f(t)\,dt \right| = -\int_{x_A}^{x_A+\alpha} f(t)\,dt \geq \frac{\alpha\varepsilon}{2} \ .$$

Il existe donc un nombre $\beta = \alpha\varepsilon/2$ pour lequel, pour tout A, on a trouvé deux nombres x_A et $x_A + \alpha$ vérifiant les inégalités $A \leq x_A \leq x_A + \alpha$ et

$$\left| \int_{x_A}^{x_A+\alpha} f(t)\,dt \right| \geq \beta \ .$$

Cela signifie que la propriété de Cauchy n'est pas satisfaite, donc que l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty f(t)\,dt$ diverge. D'où une contradiction.

11. a) L'égalité $f'(x) = O(1/x^2)$ signifie que la fonction $x \mapsto x^2 f'(x)$ est bornée au voisinage de l'infini, c'est-à-dire qu'il existe deux nombres $a > 0$ et $M > 0$, tels que, si $|x| \geq a$, on ait $x^2|f'(x)| \leq M$, soit

$$|f'(x)| \leq \frac{M}{x^2} \; .$$

On remarque que l'intégrale $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ converge. Donc, de l'inégalité précédente, on déduit que l'intégrale $\int_a^\infty f'(t)\,dt$ converge absolument donc converge. Mais

$$\int_a^\infty f'(x)\,dx = \lim_{X\to\infty} \int_a^X f'(x)\,dx = f(X) - f(a) \; .$$

Donc la fonction f a une limite en $+\infty$ qui vaut $\int_a^\infty f'(x)\,dx + f(a)$.

La démonstration est analogue à $-\infty$.

b) Si x et x' sont deux réels quelconques tels que $x < x'$, on a encore

$$|f(x) - f(x')| \leq \int_x^{x'} |f'(t)|\,dt \; ,$$

ce qui se majore par

$$\int_x^{x'} \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x' - \arctan x \; ,$$

mais puisque la fonction arctangente est comprise entre $-\pi/2$ et $+\pi/2$, on a finalement

$$|f(x') - f(x)| \leq \arctan x' - \arctan x \leq \pi \; .$$

En faisant tendre x vers $-\infty$ et x' vers $+\infty$, on obtient alors, par passage à la limite dans les inégalités

$$|L - \ell| \leq \pi \; .$$

12. a) Comme f décroit, on peut minorer $f(t)$ par $f(2x)$, lorsque t appartient à l'intervalle $[\,x,\, 2x\,]$. Alors

$$\int_x^{2x} f(t)\,dt \geq \int_x^{2x} f(2x)\,dt = xf(2x) \; .$$

On a donc, si $x > a/2$

$$0 \leq xf(x) \leq 2\int_{x/2}^{x} f(t)\,dt \; .$$

Comme l'intégrale converge, il existe, d'après le critère de Cauchy, un nombre A, tel que les inégalités $A \leq u \leq v$ impliquent

$$\left| \int_u^v f(t)\,dt \right| < \frac{\varepsilon}{2} \; .$$

Alors si $x \geq 2A$, on a $A \leq x/2 \leq x$, et

$$0 \leq xf(x) \leq 2 \int_{x/2}^{x} f(t)\,dt < \varepsilon \ .$$

On en déduit que $xf(x)$ tend vers 0 à l'infini.

b) La fonction f définie sur $[\,2,\,\infty\,[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x \ln x}\ ,$$

et telle que $xf(x)$ tende vers 0 à l'infini. On vérifie facilement qu'elle est décroissante. Par contre l'intégrale de f diverge, puisque

$$\int_2^x \frac{dx}{x \ln x} = \ln\ln x - \ln\ln 2$$

a pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

13. a) Pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$, posons $f_n(x) = \dfrac{\arctan(nx)}{n(1+x^2)}$.
Tout d'abord

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{1+x^2} = g(x)\ .$$

Comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} g(x)\,dx$ converge, il résulte du théorème de comparaison que toutes les intégrales $\displaystyle\int_0^{\infty} f_n(x)\,dx$ convergent.
Par ailleurs

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{\pi}{2n}\ ,$$

et donc la suite (f_n) converge uniformément, donc uniformément localement, vers la fonction nulle.
Alors le théorème de convergence dominée montre que la suite (a_n) converge vers $\int_0^{+\infty} 0\,dx = 0$.

b) Pour $x \in [\,0,\,1\,]$ et $n \geq 0$, posons $f_n(x) = 1/(1+x^n)$.
Tout d'abord

$$0 \leq f_n(x) \leq 1 = g(x)\ .$$

La fonction g et les fonctions f_n sont Riemann-intégrables sur $[\,0,\,1\,]$.
Par ailleurs la suite f_n converge simplement sur $[\,0,\,1\,[$ vers la fonction $f = 1$. Sur $[\,0,\,\alpha\,]$, avec $\alpha \in]\,0,\,1\,[$, on a

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{x^n}{1+x^n} \leq \alpha^n\ ,$$

et il en résulte que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[\,0,\,\alpha\,]$. La suite (f_n) converge donc uniformément localement vers f sur $[\,0,\,1\,[$.
Alors le théorème de convergence dominée montre que la suite (a_n) converge vers $\int_0^1 1\,dx = 1$.

c) Pour $x \in]\,1,\,+\infty\,[$ et $n \geq 0$, posons $f_n(x) = 1/(1+x^n)$.

Tout d'abord, si $n \geq 2$,

$$0 \leq f_n(x) \leq f_2(x) = g(x) \ .$$

Comme $\int\limits_1^\infty g(x)\,dx$ converge, il résulte du théorème de comparaison que toutes les intégrales $\int\limits_0^\infty f_n(x)\,dx$ convergent si $n \geq 2$.

Par ailleurs la suite f_n converge simplement sur $[\,1,\,\infty\,[$ la fonction $f = 0$. Sur $[\,\alpha,\,+\infty\,]$, avec $\alpha > 0$, on a

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{1+\alpha^n} \ ,$$

et il en résulte que la suite (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[\,\alpha,\,+\infty\,[$. La suite (f_n) converge donc uniformément localement vers f sur $]\,1,\,\infty\,[$.

Alors le théorème de convergence dominée montre que la suite (a_n) converge vers $\int\limits_0^1 0\,dx = 0$.

d) Pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$, posons $f_n(x) = \dfrac{\arctan \frac{n+1}{n}\,x}{1+x^2}$.

Tout d'abord

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{1+x^2} = g(x) \ .$$

Comme l'intégrale $\int\limits_0^\infty g(x)\,dx$ converge, il résulte du théorème de comparaison que toutes les intégrales $\int\limits_0^\infty f_n(x)\,dx$ convergent.

Par ailleurs, f_n tend simplement vers la fonction f qui à x associe $\dfrac{\arctan x}{1+x^2}$. Soit x dans l'intervalle $[\,0,\,\alpha\,]$, où $\alpha > 0$. On a

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \left| \arctan\left(1+\frac{1}{n}\right)\,x - \arctan x \right| \ .$$

En appliquant l'égalité des accroissements finis, il existe c dans $[\,0,\,\alpha\,]$ tel que

$$\left| \arctan\left(1+\frac{1}{n}\right)\,x - \arctan x \right| = \left| \left(1+\frac{1}{n}\right)\,x - x \right|\,\frac{1}{1+c^2} = \frac{x}{n(1+c^2)} \leq \frac{\alpha}{n} \ ,$$

et donc la suite (f_n) converge uniformément sur $[\,0,\,\alpha\,]$ donc uniformément localement sur $[\,0,\,+\infty\,[$, vers la fonction f.

Alors le théorème de convergence dominée montre que la suite (a_n) converge vers

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\,(\arctan x)^2\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi^2}{8} \ .$$

14. On a, à l'infini,

$$\frac{1}{(x^3+1)^n} \sim \frac{1}{x^{3n}} \ ,$$

et l'intégrale $\int\limits_0^\infty \dfrac{dx}{(x^3+1)^n}$ converge si et seulement si $3n > 1$, soit $n \geq 1$.

En utilisant la factorisation

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1) \ ,$$

la fraction rationnelle $\dfrac{1}{x^3+1}$, se décompose sous la forme

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2-x+1} \ .$$

On peut obtenir les coefficients de la manière suivante :

en multipliant par $x+1$ et en faisant tendre x vers -1, on obtient $a=1/3$;

en remplaçant x par 0, on trouve $1=a+c$ d'où $c=1-a=2/3$;

en multipliant par x et en faisant tendre x vers $+\infty$, on trouve $0=a+b$, d'où $b=-1/3$. Finalement

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{3(x+1)}+\frac{1}{3}\frac{-x+2}{x^2-x+1} \ ,$$

ce qui s'écrit encore

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{3(x+1)}-\frac{1}{6}\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{x^2-x+1} \ ,$$

On obtient alors comme primitive, pour $x\geq 0$,

$$\int\frac{dx}{x^3+1}=\frac{1}{3}\ln(x+1)-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \ .$$

(On rappelle qu'une primitive de $1/(ax^2+bx+c)$ où $\Delta=b^2-4ac<0$ est $\dfrac{2}{\sqrt{-\Delta}}\arctan\dfrac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}$).

Alors

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\frac{dx}{x^3+1} &= \left[\frac{1}{3}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]_0^\infty\\ &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} \ .\end{aligned}$$

Mais

$$\ln\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}=\ln\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} \ ,$$

et cette expression a pour limite 0 à $+\infty$. Par ailleurs $\arctan\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$ admet pour limite $\pi/2$ en $+\infty$, et

$$\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6} \ ,$$

d'où

$$\int_0^\infty\frac{dx}{x^3+1}=\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi\sqrt{3}}{9} \ .$$

Si $n \geq 1$, l'intégral J_n est donc convergente. En intégrant par parties,

$$J_n = \left[\frac{x}{(x^3+1)^n} \right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{3nx^3}{(x^3+1)^{n+1}}\, dx = \int_0^\infty \frac{3nx^3}{(x^3+1)^{n+1}}\, dx \ .$$

Mais

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{(x^3+1)^{n+1}}\, dx = \int_0^\infty \frac{x^3+1}{(x^3+1)^{n+1}}\, dx - \int_0^\infty \frac{1}{(x^3+1)^{n+1}}\, dx = J_n - J_{n+1} \ .$$

Donc

$$J_n = 3n(J_n - J_{n+1}) \ ,$$

d'où l'on déduit

$$J_{n+1} = \frac{3n-1}{3n} J_n \ .$$

Alors

$$J_n = \frac{3n-4}{3n-3} \cdots \frac{2}{3}\, J_1 = \frac{3n-4}{3n-3} \cdots \frac{2}{3}\, \frac{2\pi\sqrt{3}}{9} \ .$$