Fonctions intégrables

Exercice 1 - Fonction triangle - *Troisième année* - ⋆

Sans détailler les calculs, et en faisant notamment une intégration par parties, on a :

$$\int_{-1}^{0}(1+x)e^{-2i\pi\xi x}dx=\frac{i}{2\pi\xi}+\frac{1}{4\pi^2\xi^2}-\frac{e^{2i\pi\xi}}{4\pi^2\xi^2}.$$

De même, on trouve

$$\int_{0}^{1}(1-x)e^{-2i\pi\xi x}dx=\frac{-i}{2\pi\xi}+\frac{1}{4\pi^2\xi^2}-\frac{e^{-2i\pi\xi}}{4\pi^2\xi^2}.$$

On en déduit :

$$\hat{f}(\xi)=\frac{\sin^2(\pi\xi)}{\pi^2\xi^2}.$$

Exercice 2 - Calcul d'une transformée de Fourier par résolution d'une équation différentielle - *L3/Math Spé* - ⋆⋆

On remarque d'abord que f est bien définie pour tout x. En effet, on a

$$\left|\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}e^{itx}\right|\leq\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}.$$

Cette fonction est intégrable sur $[0,+\infty[$, car en 0 elle est équivalente à $\frac{1}{\sqrt{t}}$ qui est intégrable (intégrale de Riemann), et, au voisinage de $+\infty$, elle vérifie

$$\left|\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\right|\leq\frac{1}{t^2}.$$

Prouvons également que f est de classe C^1. Pour cela, on remarque que la fonction

$$g:(x,t)\mapsto\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}e^{itx}$$

admet en tout point de $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ une dérivée partielle par rapport à x égale à

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)=i\sqrt{t}e^{-t}e^{itx}.$$

De plus, on a, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right|\leq\sqrt{t}e^{-t}$$

et la fonction apparaissant à droite dans l'inégalité précédente est intégrable sur $]0,+\infty[$ (elle est continue en 0, et au voisinage de $+\infty$, elle est négligeable devant $1/t^2$). On en déduit par le théorème de dérivation des intégrales à paramètres que f est dérivable, avec

$$f'(x)=\int_0^{+\infty}i\sqrt{t}e^{-t}e^{itx}.$$

On exprime le membre de droite de cette égalité en fonction de f grâce à une intégration par parties, en posant $v(t)=\sqrt{t}$ et $u(t)=\frac{1}{ix-1}e^{(ix-1)t}$. Puisque $u(0)v(0)=0$ et $\lim_{t\to+\infty}u(t)v(t)=0$, on en déduit

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-i}{2(ix-1)}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}e^{itx}dt\\ &= \frac{-i(-ix-1)}{2(x^2+1)}f(x)\\ &= \frac{x+i}{2(x^2+1)}f(x). \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à résoudre cette équation différentielle. On l'écrit sous la forme

$$\frac{f'}{f}=\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{i}{2(x^2+1)}$$

ce qui donne

$$\ln|f|=\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+\frac{i}{2}\arctan(x)+K.$$

On en déduit qu'il existe une constante $C\in\mathbb{R}$ telle que

$$f(x)=C(x^2+1)^{1/4}\exp\left(\frac{i}{2}\arctan x\right).$$

On détermine la valeur de la constante C en calculant $f(0)=C$. On a par ailleurs

$$f(0)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt=2\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du$$

en effectuant le changement de variables $t=u^2$. Utilisant le rappel, on trouve que $C=\sqrt{\pi}$.

Exercice 3 - Semi-groupe de Poisson - *Troisième année* - $\star$

1. On a :

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_0^{+\infty}e^{(-\alpha-2i\pi\xi)x}dx+\int_{-\infty}^0 e^{(\alpha-2i\pi\xi)x}dx\\ &= \frac{1}{\alpha+2i\pi\xi}+\frac{1}{\alpha-2i\pi\xi}=\frac{2\alpha}{\alpha^2+4\pi^2\xi^2}. \end{aligned}$$

2. Pour $\alpha=2\pi$, $\hat{f}(\xi)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Cette fonction étant dans L^1, sa transformée de Fourier est $f(-x)$. La transformée de Fourier de $x\mapsto\frac{1}{1+x^2}$ est donc $x\mapsto\pi\times e^{-2\pi|x|}$.
3. On commence par calculer le produit de convolution. On a :

$$\begin{aligned} f\star f(x) &= \int_{\mathbb{R}}e^{-\alpha(|x-y|+|y|)}dy\\ &= \int_{-\infty}^0 e^{-\alpha(|x-y|-y)}+\int_0^{+\infty}e^{-\alpha(|x-y|+y)}dy. \end{aligned}$$

Si $x>0$, on a :

$$\begin{aligned} f\star f(x) &= \int_{-\infty}^{0} e^{-\alpha(x-2y)}dy+\int_0^x e^{-\alpha x}dy+\int_x^{+\infty} e^{-\alpha(2y-x)}dy\\ &= \frac{e^{-\alpha x}}{2\alpha}+xe^{-\alpha x}+e^{\alpha x}\frac{e^{-2\alpha x}}{2\alpha}\\ &= e^{-\alpha x}\left(x+\frac{1}{\alpha}\right). \end{aligned}$$

La fonction f étant paire, $f\star f$ l'est aussi, et on a donc $f\star f(x)=e^{-\alpha|x|}\left(|x|+1/\alpha\right)$. Maintenant, la transformée de Fourier de cette fonction, pour $\alpha=2\pi$ est $x\mapsto\frac{\pi^2}{(1+x^2)^2}$, puisque la transformée de Fourier transforme le produit de convolution de deux fonctions en produit usuel. On applique une fois encore la formule d'inversion de la transformée de Fourier (ce qui est légitime puisque toutes les fonctions sont intégrables). La transformée de Fourier de $x\mapsto\frac{1}{(1+x^2)^2}$ est la fonction $x\mapsto\dfrac{e^{-2\pi|x|}(|x|+1/2\pi)}{\pi^2}$.

4. Remarquons que la dérivée de la fonction $x\mapsto\frac{1}{1+x^2}$ est $x\mapsto\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$. En utilisant les formules habituelles sur l'influence de la dérivation sur le produit de convolution, on en déduit :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(\frac{x}{(1+x^2)^2}\right)(\xi) &= -\frac{1}{2}\mathcal{F}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\right)(\xi)\\ &= -\frac{1}{2}\times 2i\pi\xi\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)(\xi)=-i\pi^2\xi e^{-2\pi|\xi|}. \end{aligned}$$

Exercice 4 - Régularité - *Troisième année* - $\star$

Prouvons d'abord que $\hat f\in L^1(\mathbb{R})$. Puisque $\hat f$ est continue, $\hat f$ est bornée sur $[-1,1]$ ce qui justifie la convergence de $\int_{-1}^1|\hat f(\xi)|d\xi$. D'autre part, si $|\xi|\geq 1$, on a $|\hat f(\xi)|\leq|\xi\hat f(\xi)|$, ce qui prouve la convergence de $\int_1^{+\infty}|\hat f(\xi)|d\xi$ ainsi que celle de $\int_{-\infty}^{-1}|\hat f(\xi)|d\xi$. Maintenant, d'après la formule d'inversion de la transformée de Fourier, f est égale presque partout à la fonction

$$g(x)=\int_{\mathbb{R}}\hat f(\xi)e^{2i\pi\xi x}d\xi.$$

Mais il est clair que cette fonction g est de classe C^1 (ou bien parce qu'il s'agit de la transformée de Fourier conjuguée d'une fonction h tel que $x\mapsto xh(x)$ est intégrable, ou bien en dérivant directement sous le signe intégrale).

Exercice 5 - - *Troisième année* - $\star\star$

On note A l'espace vectoriel engendré par les translatées $(\tau_x f)$, et B son image dans $C_0(\mathbb{R}^n)$ par la transformée de Fourier. Soit $g\in B$, alors, l'effet de la transformée de Fourier sur une translation entraine l'existence d'un entier p, de complexes $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ et de réels $x_1,\dots,x_p$ tels que $g(t)=\lambda_1 e^{ix_1t}\mathcal{F}(f)(t)+\dots+\lambda_p e^{ix_pt}\mathcal{F}(f)(t)$. En particulier, g s'annule en x_0, et ainsi B n'est pas dense dans $C_0(\mathbb{R}^n)$. Si A était dense dans $L^1(\mathbb{R}^n)$, alors $\mathcal{F}(A)$ serait dense dans $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}^n))$, et donc (par transitivité) dense dans $C_0(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 6 - Non-surjectivité de la transformée de Fourier - *Troisième année* - $\star\star$

1. On découpe l'intégrale en 2, et on fait le changement de variables $u=-t$ dans la première intégrale :

$$\begin{aligned}\hat{f}(x) &= \int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-i2\pi xt}dt+\int_0^{+\infty} f(t)e^{-i2\pi xt}dt\\ &= -\int_0^{+\infty} f(t)e^{2i\pi xt}dt+\int_0^{+\infty} f(t)e^{-i2\pi xt}dt\\ &= -2i\int_0^{+\infty} f(t)\sin(2\pi xt)dt.\end{aligned}$$

2. D'abord, la fonction $u\mapsto \frac{\sin u}{u}$ est continue sur $[0,+\infty[$, une fois prolongée par 1 en 0. D'autre part, il est bien connu que, si la fonction $u\mapsto\frac{\sin u}{u}$ n'est pas intégrable, l'intégrale $\displaystyle\int_1^X \frac{\sin u}{u}du$ admet une limite quand $X\to+\infty$. Il suffit pour cela de faire une intégration par parties :

$$\int_1^X \frac{\sin u}{u}du=\left[\frac{-\cos u}{u}\right]_1^X-\int_1^X\frac{\cos u}{u^2}du,$$

la première quantité admettant une limite si X tend vers $+\infty$, tandis que la fonction $u\mapsto\frac{\cos u}{u^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$. Ceci justifie donc que la fonction ϕ est définie. D'autre part, elle est continue sur $[0,+\infty[$, car :

$$\phi(x+h)-\phi(x)=-\int_x^{x+h}\frac{\sin u}{u}du,$$

et ceci tend vers 0 si h tend vers 0. Enfin, ϕ admet 0 pour limite en $+\infty$: on en déduit qu'elle est bornée sur $[0,+\infty[$.

3. On a :

$$\int_1^R\frac{\hat{f}(t)}{t}dt=\int_1^R\left(\int_0^{+\infty}\frac{-2i}{t}f(x)\sin(2\pi xt)dt\right)dx.$$

Remarquons que $h(t,x)=\frac{-2i}{t}f(x)\sin(2\pi xt)$ est dans $L^1([1,R]\times[0,+\infty[)$: on a en effet

$$|h(t,x)|\leq\frac{2}{t}|f(x)|,$$

et la fonction majorante est clairement intégrable sur $[1,R]\times[0,+\infty[$. Utilisant le théorème de Fubini, on en déduit :

$$\begin{aligned}\int_1^R\frac{\hat{f}(t)}{t}dt &= \int_0^{+\infty}-2if(x)\left(\int_1^R\frac{\sin 2\pi xt}{t}dt\right)dx\\ &= \int_0^{+\infty}-2if(x)\left(\int_{2\pi x}^{2\pi Rx}\frac{\sin u}{u}du\right)dx.\end{aligned}$$

Or, $f(x)\left(\int_{2\pi x}^{2\pi Rx}\frac{\sin u}{u}du\right)\to f(x)\phi(2\pi x)$ si $R\to+\infty$. D'autre part, on a :

$$\int_{2\pi x}^{2\pi Rx}\frac{\sin u}{u}du=\phi(2\pi x)-\phi(2\pi Rx).$$

Comme la fonction ϕ est bornée sur $\mathbb{R}$, on obtient :

$$\left|f(x)\left(\int_{2\pi x}^{2\pi Rx}\frac{\sin u}{u}du\right)\right|\leq 2\|\phi\|_\infty|f(x)|.$$

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et on obtient :

$$\lim_{R\to+\infty}\int_1^R\frac{\hat{f}(t)}{t}dt=-2i\int_0^{+\infty}f(x)\phi(2\pi x)dx.$$

4. (a) C'est quasi-évident !

   (b) Remarquons que g est impaire. On note $h(x)=-f(-x)$. La transformée de Fourier de h vérifie :

$$\begin{aligned}\hat{h}(\xi) &= -\int_{\mathbb{R}}f(-x)e^{-2\pi i\xi x}dx\\ &= -\int_{\mathbb{R}}f(x)e^{2\pi i\xi x}dx\\ &= -g(-\xi)=g(\xi)=\hat{f}(\xi).\end{aligned}$$

   Par injectivité de la transformée de Fourier, on en déduit que $f(x)=-f(-x)$ pour presque tout x.

   (c) Au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\frac{g(t)}{t}\sim\frac{\pi}{4t\ln(t)},$$

   et il est bien connu que cette dernière fonction n'est pas intégrable (cas d'une intégrale de Bertrand divergente). Si g était la transformée de Fourier d'une fonction intégrable, par les questions précédentes, l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{g(t)}{t}dt$ convergerait. Ce n'est pas le cas : la transformation de Fourier n'est pas une surjection de $L^1(\mathbb{R})$ sur $C_0(\mathbb{R})$.

Exercice 7 - Transformée de Fourier et produit de convolution - *Troisième année* - $\star$

1. Puisque f et g sont dans $L^1(\mathbb{R})$, et que la transformée de Fourier transforme le produit de convolution en produit de fonctions, on a

$$\forall\xi\in\mathbb{R},\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)=\hat{f}(\xi).$$

   Puisque ceci est vrai pour toute fonction de $L^1(\mathbb{R})$, et qu'il existe des fonctions f de $L^1(\mathbb{R})$ telles que pour tout $\xi\in\mathbb{R}$, $\hat{f}(\xi)\neq 0$, on a $\hat{g}(\xi)=1$ pour tout $\xi\in\mathbb{R}$. Maintenant, on sait que la transformée de Fourier d'une fonction de $L^1(\mathbb{R})$ tend vers 0 à l'infini, il n'y a aucune fonction g telle que $\hat{g}(\xi)=1$ pour tout $\xi\in\mathbb{R}$.

2. On compose une fois encore par la transformée de Fourier. On a :

$$\forall\xi\in\mathbb{R},\hat{f}^2(\xi)=\hat{f}(\xi)\iff\hat{f}(\xi)(1-\hat{f}(\xi))=0.$$

   On en déduit que pour tout $\xi\in\mathbb{R}$, $\hat{f}(\xi)=0$ ou 1, mais comme $\hat{f}$ est continue, on a forcément $\hat{f}(\xi)=1$ pour tout ξ ou $\hat{f}(\xi)=0$ pour tout ξ. Comme auparavant, le cas identiquement égal à 1 est impossible, et donc $\hat{f}(\xi)=0$ pour tout ξ. Par injectivité de la transformée de Fourier, on en déduit que $f=0$ presque partout.

Exercice 8 - Semi-groupe de la chaleur - *Troisième année* - $\star$

On sait que si $f_a(x)=e^{-a\|x\|^2}$, alors on a $\hat{f}_a(x)=\left(\frac{\pi}{a}\right)^{n/2}e^{-\frac{\pi^2}{a}\|x\|^2}$. Il suffit maintenant d'observer que $q_t(x)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}f_{1/4t}(x)$. Il vient :

$$\hat{q}_t(x)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\sqrt{4\pi t}e^{-4\pi^2 tx}=e^{-4\pi^2tx^2}.$$

D'autre part, on a :

$$\mathcal{F}(q_t\star q_s)(x)=\hat{q}_t\hat{q}_s(x)=e^{-4\pi^2(s+t)x^2}=\mathcal{F}\left(q_{s+t}\right)(x).$$

Par injectivité de la transformée de Fourier, on en déduit que $q_t\star q_s=q_{s+t}$.

Exercice 9 - Une équation intégrale - *Troisième année* - $\star$

1. En posant $f(x)=e^{-|x|}$, il est clair que cette équation peut aussi s'écrire $u=f+\beta u\star f$.
2. On suppose qu'il existe une solution u intégrable. En appliquant la transformée de Fourier, on vérifie que $\hat{u}$ vérifie :

$$\hat{u}=\frac{\hat{f}}{1-\beta\hat{f}}=\frac{2}{(1-2\beta)+4\pi^2\xi^2},$$

où on a utilisé le fait que $\hat{f}(\xi)=\frac{2}{1+4\pi^2\xi^2}$. Dans le cas où $\beta\geq 1/2$, ceci définit une fonction qui n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle n'est même pas définie en un point. L'équation n'admet donc pas de solution. Si $\beta<1/2$, l'injectivité de la transformée de Fourier fait qu'il n'existe qu'une seule solution, qu'on détermine en inversant la formule précédente. On trouve :

$$u(x)=\frac{1}{\sqrt{1-2\beta}}e^{-\sqrt{1-2\beta}|x|}.$$

Exercice 10 - Equation de la chaleur - *Troisième année* - $\star\star\star$

1. (a) D'abord, on a

$$\mathcal{F}_x\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)(t,x)=\int_{\mathbb{R}}e^{-2i\pi\xi x}d\xi\frac{\partial u}{\partial t}(t,\xi)d\xi.$$

De la majoration $\left|\frac{\partial u}{\partial t}(t,\xi)\right|\leq g(\xi)$, on déduit que l'on peut permuter les symboles d'intégration et de dérivation, et finalement on a :

$$\mathcal{F}_x\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)(t,x)=\frac{\partial\mathcal{F}_x(u)}{\partial t}(t,x).$$

D'autre part, puisque $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial u}{\partial x}$ sont intégrables, on a aussi, par une double intégration par parties :

$$\mathcal{F}_x\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(t,x)=(2i\pi x)^2\mathcal{F}_x u(t,x).$$

(b) Le fait d'appliquer la transformée de Fourier sur l'équation initiale donne, pour x fixé :

$$v'(t)+4\pi^2x^2v(t)=0.$$

(c) On résoud cette question pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé. On trouve :

$$\hat{u}(t,x) = h(x)e^{-4\pi^2x^2t}.$$

Mais $u(0,x) = u_0(x)$ et donc on en déduit $\hat{u}(0,x) = \hat{u}_0(x)$, ce qui donne :

$$\hat{u}(t,x) = \hat{u}_0(x)e^{-4\pi^2x^2t}.$$

(d) Remarquons que l'on a :

$$\hat{u}(t,x) = \mathcal{F}\left(u_0 \star \phi_t\right),$$

où ϕ_t est la fonction donnée par l'énoncé. Par injectivité de la transformée de Fourier, on obtient

$$u(t,x) = u_0(x) \star \left[\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)\right].$$

2. Par les propriétés du produit de convolution, il est facile de vérifier que u est C^2 par rapport à x, la dérivée s'obtenant en dérivant la deuxième fonction intervenant dans le produit de convolution. En utilisant la décroissance très rapide de $x \mapsto e^{-x^2}$, on trouve que toutes les dérivées sont intégrables. Enfin, il suffit de suivre les calculs pour trouver que l'équation aux dérivées partielles est vérifiée.

Exercice 11 - Espace de Wiener - *Troisième année* - $\star\star\star$

1. D'abord, si $f \in W$, alors par la formule d'inversion de la transformée de Fourier, $\hat{f}(x) = g(-x)$ où g est défini par $\hat{g} = f$. Donc $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Réciproquement, si $f \in L^1(\mathbb{R})$ est telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, il suffit de poser $g(x) = \hat{f}(-x)$, et la même formule d'inversion de la transformée de Fourier donne le résultat !
2. Soit $g \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $\hat{g} = f$. Par les propriétés de la transformée de Fourier d'une fonction intégrable, $f \in L^\infty$. D'autre part, par hypothèse, $f \in L^1$. Pour montrer que $f \in L^p$, avec $p \in]1,+\infty[$, on peut remarquer que :

$$|f(t)|^p \leq \|f\|_\infty^{p-1}|f(t)|,$$

ce qui donne le résultat.
3. D'abord, si $f \in W$, $\hat{f}$ est clairement dans W puisque c'est la transformée de Fourier d'une fonction intégrable. La réciproque est presque évidente en utilisant la formule de réciprocité de la transformation de Fourier. En effet, si $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, on sait que $f = \hat{g}$ où $g(x) = \hat{f}(-x)$. Ce qui prouve le résultat.
4. D'abord, les propriétés du produit de convolution entraînent $f \star g \in L^1(\mathbb{R})$. D'autre part, si $f = \hat{f_1}$ et $g = \hat{g_1}$, on a $\mathcal{F}(f_1g_1) = \hat{f_1} \star \hat{g_1} = f \star g$. Il suffit donc de vérifier que f_1g_1 est intégrable : mais ceci vient du fait que f_1 et g_1 sont encore dans W d'après la question 2., et sont donc dans L^2 d'après la question 1. Et le produit de deux fonctions de L^2 est dans L^1. Pour le produit, c'est presque pareil. Il est dans L^1 car les fonctions f et g sont dans L^2, et on a $\mathcal{F}(f_1 \star g_1) = fg$. Enfin, $f_1 \star g_1$ est intégrable comme produit de convolution de deux fonctions intégrables.
5. Il suffit de vérifier les 3 axiomes, ce qui se fait aisément d'après les propriétés de la norme et la linéarité de la transformation de Fourier.

6. (a) Remarquons que $\|f_n - f_p\|_1 \leq N(f_n - f_p)$ et $\|\hat{f}_n - \hat{f}_p\|_1 \leq N(f_n - f_p)$: les suites (f_n) et $(\hat{f}_n)$ sont de Cauchy dans $L^1(\mathbb{R})$, qui est complet, ce qui donne l'existence de f et g.
   (b) Par continuité de la transformation de Fourier de $L^1(\mathbb{R})$ dans $C_0(\mathbb{R})$, on a $\|\hat{f}_n - \hat{f}\|_\infty \to 0$. Fixons maintenant $A > 0$. De l'inégalité
   $$\int_{-A}^{A} |\hat{f}(t) - \hat{f}_n(t)|dt \leq 2A\|\hat{f}_n - \hat{f}\|_\infty,$$
   on déduit que $(\hat{f}_n)$ tend vers $\hat{f}$ dans $L^1([-A, A])$. Maintenant, on a aussi $(\hat{f}_n)$ qui tend vers g dans $L^1([-A, A])$. Par unicité de la limite, $\hat{f} = g$ pour presque tout $x \in [-A, A]$. A étant choisi arbitraire, en prenant une suite (A_k) qui tend vers $+\infty$, on en déduit que $\hat{f} = g$ presque partout.
   (c) On résume les travaux précédents : la fonction f précédemment exhibée est dans l'espace de Wiener, puisque sa transformée de Fourier est intégrable. En outre, on vient de prouver que $N(f_n - f) \to 0$. C'est que (f_n) converge vers f pour N dans W, ce qui prouve la complétude.
7. (a) Il s'agit d'une application immédiate du théorème de continuité sous le signe intégrale, une fois le produit de convolution écrit sous la forme
   $$f \star h_n(x) = \int_{\mathbb{R}} h_n(x-t)f(t)dt.$$
   (b) Remarquons d'abord que $f \star h_n$ est bien élément de L^1 (car $h_n \in L^\infty$). D'autre part, $\widehat{f \star h_n} = \hat{f}\hat{h_n}$ qui est élément de L^1 car $\hat{f}$ est élément de $L^\infty(\mathbb{R})$ et $\hat{h_n}$ est élément de $L^1(\mathbb{R})$. C'est une conséquence de la question 3., car $h_n \in W$: h_n est une gaussienne et la transformée de Fourier d'une gaussienne est une gaussienne (c'est-à-dire une fonction du type $x \mapsto e^{-ax^2}$).
8. (a) C'est une conséquence "standard" des propriétés des unités approchées.
   (b) $f \star h_n$ est dans W, et converge vers f : on en déduit que W est dense dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$, pour la norme de $L^p(\mathbb{R})$. Maintenant, $L^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$, puisqu'il contient les fonctions continues à support compact. D'où le résultat.
9. (a) Ce fait est à nouveau une propriété "standard" des unités approchées.
   (b) C'est le même raisonnement que précédemment, car une fois encore, les fonctions continues à support compact sont denses dans $C_0(\mathbb{R})$.

Exercice 12 - Non-surjectivité (bis) - *Quatrième année* - $\star\star$

1. C'est juste un petit calcul à faire... On trouve que $g_n \star h(x) = 2$ si x est dans $[-n+1, n-1]$, vaut 0 si x est hors de $[-n-1, n+1]$, et est linéaire sur $[-n-1, -n+1]$ et $[n-1, n+1]$.
2. On va en fait calculer la transformée de Fourier de $g_n \star h$. On a
   $$\mathcal{F}(g_n \star h) = \hat{g_n}\hat{h}.$$
   Un calcul facile montre que
   $$\mathcal{F}(1_{[-a,a]})(x) = \frac{\sin(2\pi a x)}{\pi x}.$$

En particulier, on remarque que $\mathcal{F}(g_n \star h)$ est dans $L^1(\mathbb{R})$. La formule d'inversion de la transformée de Fourier nous dit que

$$\overline{\mathcal{F}}(f_n) = g_n \star h.$$

On conclut en remarquant que $\mathcal{F}$ et $\overline{\mathcal{F}}$ coïncident sur les fonctions paires.

3. On utilise le fait que si $t \in [0, \pi/2]$, $\sin(t) \geq 2t/\pi$. Il vient

$$\|f_n\|_1 \geq C \int_0^{1/4} \left|\frac{\sin(2n\pi x)}{x}\right| dx \geq C \int_0^{(n\pi/2)} \left|\frac{\sin u}{u}\right| du.$$

Ceci tend vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$ car la fonction $u \mapsto \sin(u)/u$ n'est pas intégrable.

4. Si la transformée de Fourier était surjective, puisqu'on sait qu'elle est injective et que $L^1(\mathbb{R})$ et $C_0(\mathbb{R})$ sont des espaces de Banach, elle serait automatiquement un isomorphisme d'espace de Banach. En particulier, la réciproque serait continue, et il existerait $C > 0$ telle que, pour tout f de $L^1(\mathbb{R})$, on aurait

$$\|\hat{f}\|_\infty \geq C\|f\|_1.$$

C'est impossible, en testant cette inégalité avec $f = f_n$ (la transformée de Fourier de f_n est bornée par 1).

5. La transformée de Fourier étant un isomorphisme de l'ensemble $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ des fonctions à décroissance rapide, son image contient $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Il est aisé de vérifier que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $C_0(\mathbb{R})$.

Exercice 13 - Une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$ - *Quatrième année* - ⋆⋆

1. (a) Prenons $y \in E$. Alors clairement, $y \in (E^\perp)^\perp$. Ceci montre que $E \subset (E^\perp)^\perp$. Puisque ce dernier ensemble est fermé, il contient même $\overline{E}$. Prenons maintenant $y \notin \overline{E}$. $\overline{E}$ étant une partie convexe fermée d'un espace de Hilbert, y se décompose en $y = y_0+y_1$, où $y_0 \in \overline{E}$ et $y_1 \in \overline{E}^\perp$. En particulier, $y_1 \in E^\perp$. Mais alors, $\langle y, y_1\rangle = \|y_1\|^2 \neq 0$, et donc $y \notin (E^\perp)^\perp$.
   (b) C'est immédiat !
2. (a) Laissé au lecteur.
   (b) L'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que, quel que soit n, la fonction $x \mapsto x^n h(x)e^{-x^2/2}$ est dans $L^1(\mathbb{R})$. Ceci justifie la définition de la transformée de Fourier et le fait qu'elle est C^∞. En outre,
   $$g^{(n)}(0) = \langle h, x^n e^{-x^2/2}\rangle = 0.$$
   (c) Soit $R > 0$. Pour $|z| \leq R$, on a
   $$\left|h(x)e^{-x^2/2}e^{-2i\pi zx}\right| \leq |h(x)|e^{-x^2/2}e^{2\pi Rx}.$$
   La fonction qui majore est intégrable : ceci suffit à justifier que la formule
   $$g(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}h(x)e^{-2\pi xz}dx$$
   définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. Comme toutes ses dérivées en 0 sont nulles, on sait bien que $g = 0$.

(d) L'injectivité de la transformée de Fourier assure que $h = 0$.

3. (a) Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt garantit l'existence d'une telle famille. En outre, d'après les questions précédentes, l'espace vectoriel engendré par la famille $(H_n(x)e^{-x^2/2})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$. Cette famille est donc une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

   (b) Par unicité dans le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, il suffit de prouver que, pour $n \neq m$, on a
$$I = \langle H_n^*(x)e^{-x^2/2}, H_m^*(x)e^{-x^2/2}\rangle = 0.$$
Supposons par exemple $n < m$, on a
$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbb{R}} e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})\frac{d^m}{dx^m}(e^{-x^2}) \\ &= \int_{\mathbb{R}} P_n(x)\frac{d^m}{dx^m}(e^{-x^2})dx. \end{aligned}$$
Il suffit maintenant de prouver que, si $k < m$, on a
$$\int_{\mathbb{R}} x^k\frac{d^m}{dx^m}(e^{-x^2/2})dx = 0,$$
ce qui se fait en réalisant k intégrations par parties !

Cas L^2

Exercice 14 - Fonction triangle - *Troisième année* - ⋆

On sait que la transformée de Fourier-Plancherel est une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$ sur lui-même. En utilisant cette isométrie (relation de Parseval), on en déduit
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)^2dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^4(\pi x)}{\pi^4x^4}dx.$$
Avec le changement de variables $y = \pi x$, et en calculant la première intégrale, on trouve
$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^4}dx = \frac{\pi}{3}.$$

Exercice 15 - Sinus cardinal - *Troisième année* - ⋆

1. On a :
$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi\xi x}1_{[a,b](x)}dx = \int_a^b e^{-i2\pi\xi x}dx \\ &= \begin{cases} \dfrac{e^{-2ib\pi\xi} - e^{-2ia\pi\xi}}{-2i\pi\xi} & \text{si } a \neq b \\ b-a & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

2. C'est un résultat bien connu que θ est telle que $\int_0^x \theta(t)dt$ admet une limite quand $x \to +\infty$, sans que θ n'appartienne à $L^1(\mathbb{R})$. Pour le prouver, on peut par exemple utiliser
$$\frac{|\sin t|}{t} \geq \frac{\sin^2 t}{t} \geq \frac{1}{2t} - \frac{\cos 2t}{2t}.$$
On conclut car $\int_0^x \frac{1}{2t}dt$ tend vers l'infini, alors que $\int_0^x \frac{\cos 2t}{2t}$ converge si $x \to +\infty$. En revanche, il est clair que θ appartient à L^2 (précisons simplement qu'il n'y a aucun problème de convergence en 0 où la fonction est prolongée par continuité en posant $\theta(0) = 1$). Il est donc légitime de calculer la transformée de Fourier-Plancherel de θ. Il est difficile de calculer directement cette transformée. Mais remarquons que, si $f(x) = 1_{[-1/2\pi,1/2\pi]}(x)$, la question précédente nous donne
$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\pi}\theta(\xi).$$
On utilise la transformée de Fourier conjuguée, et on obtient :
$$\hat{\theta}(x) = \pi f(-x) = \pi 1_{[-1/2\pi,1/2\pi]}(x).$$

Exercice 16 - Fourier et Fourier-Plancherel - *Troisième année* - ⋆⋆

1. Le produit de convolution d'une fonction L^1 et d'une fonction L^2 étant une fonction L^2, la seule formule qui peut avoir un sens est la deuxième. On la démontre par densité de $S(\mathbb{R})$. Soit en effet (g_n) une suite de fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ qui converge vers g. Alors $f \star g_n$ est un élément de $L^1 \cap L^2$, là où les transformées de Fourier et de Fourier-Plancherel coïncident. On a donc :
$$\mathcal{F}(f \star g_n) = f \hat{\star} g_n = \hat{f}\hat{g_n} = \hat{f}\mathcal{F}(g_n).$$
La transformée de Fourier-Plancherel étant continue, on a $\mathcal{F}(g_n) \to \mathcal{F}(g)$. Il reste à remarque que
$$\|f \star g_n - f \star g\|_2 \leq \|f\|_1 \|g_n - g\|_2 \to 0,$$
et d'utiliser à nouveau la continuité de la transformée de Fourier-Plancherel pour obtenir le résultat.
2. Puisque f et g sont tous deux dans $L^2(\mathbb{R})$, leur produit est dans $L^1(\mathbb{R})$, seule la deuxième formule peut avoir un sens ! On démontre alors cette formule de la même façon que la précédente... Elle est vraie si f et g sont tous deux dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ -prendre par exemple la transformée de Fourier conjuguée, puis on procède en prenant une suite (f_n) qui converge vers f et une suite (g_n) qui converge vers g...
3. Posons $g_a = 1_{[-a/2,a/2]}(x)$, de sorte que $\mathcal{F}(g_a) = \hat{g_a} = f_a$. D'après la formule précédente, on a
$$f_a \star f_b = \mathcal{F}(g_a) \star \mathcal{F}(g_b) = \widehat{g_a g_b} = f_c,$$
où $c = \min(a, b)$.
4. Chaque fonction f_a est solution de l'équation.... alors que dans $L^1(\mathbb{R})$, cette équation n'a pas de solution non nulle !

Exercice 17 - **Densité** - *Troisième année* - ⋆⋆

1. Cette formule est vraie si $f\in L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n)$ (on peut faire le calcul effectif). On conclut par densité.
2. Puisque la transformée de Fourier-Plancherel est une isométrie, on a : $\langle g,h\rangle=\langle\mathcal{F}(g),\mathcal{F}(h)\rangle$. Maintenant, si h est dans $\mathrm{vect}(\tau_x f;x\in\mathbb{R}^n)$, il existe un entier p, des complexes $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ et $x_1,\dots,x_p$ tels que $\mathcal{F}(h)(y)=(\lambda_1e^{-2i\pi x_1y}+\dots+\lambda_pe^{-2i\pi x_py})\mathcal{F}(h)(y)$. On considère une fonction $g_1\in L^2(\mathbb{R}^n)$ non nulle presque partout et telle que $g_1=0$ là où $\mathcal{F}(f)\neq 0$. Alors $\langle g_1,\mathcal{F}(h)\rangle=0$ pour tout h comme précédemment. Puisque la transformée de Fourier-Plancherel est un isomorphisme, il existe un élément $g\in L^2(\mathbb{R}^n)$ non nul tel que $\mathcal{F}(g)=g_1$. Pour ce g, on a $\langle g,h\rangle=0$.
3. D'après la question précédente, et en utilisant le rappel du début de l'exercice, si $\mathcal{F}(f)$ est non nul sur un ensemble de mesure positive, alors $\mathrm{vect}(\tau_x f;x\in\mathbb{R}^n)$ n'est pas dense. Par contraposée, on déduit le résultat demandé.
4. En raisonnant comme précédemment, pour la fonction $h=\tau_x f$
$$\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{F}(g)\overline{\mathcal{F}(f)}e^{2i\pi xy}dy=0.$$
Puisque x peut-être choisie arbitrairement, la transformée de Fourier de la fonction $\overline{\mathcal{F}(f)}\mathcal{F}(g)$ est identiquement nulle. En particulier, par injectivité de la transformée de Fourier, $\overline{\mathcal{F}(f)}\mathcal{F}(g)$ est identiquement nulle, ce qui entraine $\mathcal{F}(g)=0$ par hypothèse sur f, puis $g=0$.

Exercice 18 - **Une projection** - *Troisième année* - ⋆⋆⋆

1. Il s'agit du produit de convolution de deux fonctions de L^2.
2. Attention, ceci n'est plus conséquence des résultats classiques sur le produit de convolution. Simplement, puisque $\sin x/\pi x$ et f sont éléments de $L^2(\mathbb{R})$, il existe g et h éléments de $L^2(\mathbb{R})$ tels que $\sin x/\pi x=\mathcal{F}(h)$ et $f=\mathcal{F}(g)$. On a alors :
$$Pf=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\star f=\mathcal{F}(g)\star\mathcal{F}(h)=\widehat{gh}.$$
Il reste à remarquer que la fonction h est l'indicatrice du segment $[-1/2\pi,1/2\pi]$. Elle est bornée et donc $gh\in L^2(\mathbb{R})\cap L^1(\mathbb{R})$. Par coïncidence de la transformée de Fourier et de la transformée de Fourier-Plancherel sur ces deux espaces, on en déduit que $\mathcal{F}(gh)\in L^2(\mathbb{R})$.
3. Soit $f\in L^2(\mathbb{R})$ qu'on écrit $f=\mathcal{F}(g)$. On a :
$$\begin{array}{rcl}\|Pf\|_2&=&\frac{1}{\pi}\|\mathcal{F}(gh)\|_2\\&=&\|gh\|_2\\&\leq&\|g\|_2=\|f\|_2.\end{array}$$
D'autre part,
$$\begin{array}{rcl}P\circ P(f)&=&P(\mathcal{F}(gh))\\&=&\mathcal{F}(gh^2).\end{array}$$
On conclut en remarquant que $gh^2=gh$.

Le cas de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

Exercice 19 - Produit et produit de convolution - *Troisième année* - $\star$

Pour le produit, c'est très facile en utilisant la formule de Leibniz pour la dérivée par exemple. Pour le produit de convolution, le mieux est d'utiliser la transformée de Fourier. En effet,

$$\mathcal{F}(f \star g) = \hat{f}\hat{g},$$

qui est élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. On peut alors appliquer la formule d'inversion de la transformée de Fourier qui donne

$$f \star g = \overline{\mathcal{F}}(\hat{f}\hat{g}),$$

et utiliser que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est stable par transformation de Fourier (inverse).

Exercice 20 - Une estimation d'intégrale - *Troisième année* - $\star$

1. On pose $g = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. Il est bien connu que la transformée de Fourier de g est :

   $$\hat{g}(x,y) = (2i\pi)^2 xy\hat{f}(x,y).$$

   En utilisant ensuite que la transformée de Fourier est une isométrie de L^2, on obtient

   $$\left\|\frac{\partial f}{\partial x \partial y}\right\|_2 = (2\pi)^2 \|xy\hat{f}\|_2.$$

2. De même, si on pose $h = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}$, la transformée de Fourier de h est

   $$\hat{h}(x,y) = (2i\pi)^2 x^2 \hat{f}(x,y) + (2i\pi)^2 y^2 \hat{f}(x,y).$$

   On en déduit que

   $$\|h\|_2 = \|(x^2+y^2)\hat{f}\|_2.$$

3. Il suffit d'utiliser l'inégalité classique $2|xy| \leq x^2 + y^2$ pour en déduire le résultat.

Exercice 21 - Principe d'incertitude d'Heisenberg - *Troisième année* - $\star\star$

1. Il suffit de faire une intégration par parties, en dérivant t et en intégrant $\varphi(t)\varphi'(t)$.
2. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

   $$\left|2\int_{\mathbb{R}} 2t\varphi'(t)\varphi(t)dt\right| \leq 2\left(\int_{\mathbb{R}} \varphi'(t)|^2 dt\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}} t^2\varphi^2(t)dt\right)^{1/2}.$$

   Maintenant, il suffit d'utiliser le fait que la transformée de Fourier est une isométrie de L^2 pour obtenir

   $$\int_{\mathbb{R}} \varphi'(t)^2 = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(\varphi')^2(\omega)d\omega = (2\pi)^2\int_{\mathbb{R}} \omega^2\hat{\varphi}(\omega)d\omega.$$

   On obtient donc bien l'estimation annoncée.
3. Pour qu'on ait égalité, il faut et il suffit qu'on ait égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ce qui revient à dire qu'il doit exister une constante λ telle que $\varphi'(t) = \lambda t\varphi(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. La résolution de cette équation donne $\varphi(t) = a\exp(\lambda t)$, et il est nécessaire (et suffisant) que $\lambda \leq 0$ pour que cette fonction soit élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.