Licence de Biologie, 3e semestre
S. Vinatier Compléments de Mathématiques

Exercices supplémentaires corrigés

Exercice 1

(a) Décomposer en éléments simples la fraction : $\dfrac{2s+1}{(s-2)(s^2+1)}$.

(b) Résoudre l'équation différentielle :

$$y''(x) - \frac{5}{2}y'(x) + y(x) = -\frac{5}{2}\sin x \ , \quad \text{avec } y(0) = 0,\ y'(0) = 2 \ .$$

Exercice 2

Résoudre le système :

$$\begin{cases} y'' + (z' - y') = -\dfrac{3}{4}y \\[2ex] z'' - (z' - y') = -\dfrac{3}{4}z \ , \end{cases}$$

avec les conditions initiales $y(0) = z(0) = 0$, $y'(0) = 1$ et $z'(0) = -1$.

Exercice 3

Résoudre le système :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} y_1'(x) & + & 2y_2'(x) & + & 3y_3'(x) & = & 0 \\ y_1'(x) & - & y_2'(x) & & & = & 3x - 3 \\ & & y_2'(x) & + & 2y_3(x) & = & 1 - x^2 \ , \end{array} \right.$$

avec conditions initiales : $y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = 0$.

Exercice 4

Soit $\omega \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = x\sin(\omega x)$.

(a) Montrer que $f''(x) = 2\omega\cos(\omega x) - \omega^2 f(x)$.

(b) En déduire la transformée de Laplace de f.

(c) De quelle fonction $\dfrac{s}{(s^2+3)^2}$ est-elle la transformée de Laplace ?

Eléments de correction

Exercice 1

(a) On trouve : $\dfrac{2s+1}{(s-2)(s^2+1)} = \dfrac{1}{s-2} - \dfrac{s}{s^2+1}$.

(b) La transformée de Laplace de l'équation différentielle est :

$$s^2Y - 2 - \frac{5}{2}sY + Y = -\frac{5}{2}\frac{1}{s^2+1}\ , \qquad \text{d'où } Y = \frac{2s+1}{(s-2)(s^2+1)}\ ,$$

et l'on déduit du (a) que $y(x) = \mathrm{e}^{2x} - \cos x$, qui vérifie bien les conditions initiales.

Exercice 2

La transformée de Laplace du système est :

$$\left\{\begin{array}{l} s^2Y - 1 + s(Z-Y) = -\frac{3}{4}Y \\ s^2Z + 1 - s(Z-Y) = -\frac{3}{4}Z \end{array}\right. , \qquad \text{d'où} \qquad \left\{\begin{array}{l} s^2(Y+Z) = -\frac{3}{4}(Y+Z) \\ s^2(Y-Z) - 2 + 2s(Z-Y) = -\frac{3}{4}(Y-Z) \end{array}\right. ,$$

si bien que

$$\left\{\begin{array}{l} Y+Z=0 \\ 2s^2Y - 2 - 4sY = -\frac{3}{2}Y \end{array}\right. , \qquad \text{d'où} \qquad Y = \frac{1}{(s-1/2)(s-3/2)} = -\frac{1}{s-1/2} + \frac{1}{s-3/2} = -Z\ .$$

On a donc $y(x) = -\mathrm{e}^{x/2} + \mathrm{e}^{3x/2} = -z(x)$, qui vérifie bien les conditions initiales.

Exercice 3

La transformée de Laplace du système est :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} sY_1 & + & 2sY_2 & + & 3sY_3 & = & 0 \\ sY_1 & - & sY_2 & & & = & 3/s^2 - 3/s \\ & & sY_2 & + & 2Y_3 & = & 1/s - 2/s^3 \end{array}\right. , \qquad \text{d'où} \qquad \left\{\begin{array}{l} sY_1 = -2sY_2 - 3sY_3 \\ -sY_2 - sY_3 = 1/s^2 - 1/s \\ sY_2 + 2Y_3 = 1/s - 2/s^3 \end{array}\right. ,$$

puis

$$\left\{\begin{array}{l} sY_1 = -2sY_2 - 3sY_3 \\ -sY_2 - sY_3 = 1/s^2 - 1/s \\ (2-s)Y_3 = 1/s^2 - 2/s^3 \end{array}\right. , \qquad \text{donc} \qquad \left\{\begin{array}{l} Y_1 = -2/s^2 + 3s^3 \\ Y_2 = 1/s^2 \\ Y_3 = -1/s^3 \end{array}\right. .$$

On obtient $y_1(x) = -2x + \dfrac{3}{2}x^2$, $y_2(x) = x$, $y_3(x) = -\dfrac{1}{2}x^2$.

Exercice 4

(a) On a : $f'(x) = \sin(\omega x) + x\omega\cos(\omega x)$, donc

$$f''(x) = \omega\cos(\omega x) + \omega\cos(\omega x) - x\omega^2\sin(\omega x) = 2\omega\cos(\omega x) - \omega^2 f(x)\ .$$

(b) En prenant la transformée de Laplace de f'', on trouve :

$$s^2\,\mathcal{L}(f) - sf(0) - f'(0) = \frac{2\omega s}{s^2+\omega^2} - \omega^2\,\mathcal{L}(f) \qquad \text{d'où} \qquad \mathcal{L}(f) = \frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}\ .$$

(c) On en déduit :

$$\frac{s}{(s^2+3)^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{2\sqrt{3}s}{\left(s^2+\sqrt{3}^2\right)^2} = \mathcal{L}\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}x)\right)\ .$$