

## Feuille de TD 4

**Exercice 1.**

Soit  $P$  une probabilité sur un espace  $\Omega$  et  $A \subset \Omega$ . On suppose  $P(A) \neq 0$ . Calculer  $P(\emptyset|A)$ ,  $P(A|A)$ ,  $P(\bar{A}|A)$ ,  $P(\Omega|A)$ .

**Exercice 2.**

Soit  $(\Omega, \mathcal{T}, P)$  un espace probabilisé et  $B$  un événement tel que  $P(B) \neq 0$ . Donner une condition suffisante sur l'événement  $A$  pour que

(a)  $P_B(A) = 1$ ;      (b)  $P_B(A) = 0$ ;      (c)  $P_B(A) = \frac{P(A)}{P(B)}$ .

**Exercice 3.**

Une urne contient 10 boules, 7 rouges et 3 vertes.

On tire 2 boules avec remise ; quelle est la probabilité de tirer deux boules rouges ?

On tire 2 boules sans remise ; quelle est la probabilité de tirer deux boules rouges ?

**Exercice 4.**

1. Mon voisin a deux enfants, l'aînée est une fille qu'elle est la probabilité que le cadet soit un garçon ?

2. Mon voisin a deux enfants, l'un est une fille qu'elle est la probabilité que l'autre soit un garçon ?

**Exercice 5.**

Soit une urne contenant quatre boules blanches et trois boules noires. On tire une à une et sans remise trois boules de l'urne. Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit blanche, la deuxième blanche et la troisième noire ?

**Exercice 6.**

On considère une population composée de 48% d'hommes et de 52% de femmes. La probabilité qu'un homme soit daltonien est 0,05 ; qu'une femme soit daltonienne est 0,0025. Quelle proportion de la population est-elle daltonienne ?

**Exercice 7.**

Une expérience est conduite pour étudier la mémoire des rats. Un rat est mis devant trois couloirs. Au bout de l'un d'eux se trouve la nourriture qu'il aime, au bout des deux autres, il reçoit une décharge électrique. Cette expérience élémentaire est répétée jusqu'à ce que le rat trouve le bon couloir. Soit chacune des hypothèses suivantes :

( $H_1$ ) le rat n'a aucun souvenir des expériences antérieures,

( $H_2$ ) le rat se souvient de l'expérience immédiatement précédente,

( $H_3$ ) le rat se souvient des deux expériences précédentes,

avec qu'elle probabilité la première tentative réussie est-elle la première ? la deuxième ? la troisième ? la  $k$ -ième ?

**Exercice 8.**

On lance deux dés ordinaires.

a) Quelle est la probabilité conditionnelle d'avoir obtenu un double sachant que la somme des points est égale à 8.

b) Quelle est la probabilité conditionnelle d'avoir obtenu un double sachant que la somme des points est supérieure ou égale à 10.

**Exercice 9.**

Un système complexe est formé de trois machines  $A$ ,  $B$ , et  $C$  dont les probabilités de panne (événements indépendants) sont respectivement : 0,05 ; 0,03 et 0,01. Le système tombe en panne dès que l'une au moins des machines tombe en panne.

1. Déterminer la probabilité de panne du système.

2. Le système tombe en panne, quelle est la probabilité que la machine  $A$  soit en panne ?

**Exercice 10.**

On considère un test servant à dépister une maladie. Soient les événements  $M$  = "l'individu est malade" et  $P_0$  = "le test est positif". On sait expérimentalement que  $P_M(\bar{P}_0) = 10^{-3}$  et que  $P_{\bar{M}}(P_0) = 2 \times 10^{-3}$  appliqué à une maladie qui touche un individu sur 10000. Calculer la probabilité que l'individu soit malade lorsque le test est positif. Commentaire ?

**Exercice 11.**

Devant un certain tableau clinique, on estime qu'une personne a 6 chance sur 10 d'être atteinte d'une maladie. On effectue alors deux tests biologiques. Le premier est positif à 70% sur les malades, à 20% sur les non-malades. Le deuxième est positif à 90% sur les malades, à 30% sur les non-malades.

On suppose que les deux tests sont indépendants. Quelle est la probabilité conditionnelle que le deuxième test soit positif si le premier l'a été ?

**Exercice 12.**

Un veilleur de nuit doit ouvrir l'une des portes à contrôler pendant sa tournée dans le noir. Il possède un trousseau de 10 clés d'allures semblables, mais une seule peut ouvrir la porte en question. L'essai des clés se fait au hasard. Le gardien dispose de deux méthodes :

– Méthode rationnelle, dite méthode  $A$ , qui consiste à essayer chaque clé, l'une après l'autre, en prenant garde de ne pas réutiliser la même clé.

– Méthode désordonnée, dite méthode  $B$ , qui consiste à essayer une clé après avoir agité le trousseau ; chaque fois que le gardien essaye une clé, celle-ci peut avoir ou non déjà été essayée.

Il a le temps d'essayer au maximum 10 clés.

1. Calculer la probabilité d'essayer au moins 8 clés par la méthode  $A$ , par la méthode  $B$ .

2. Le veilleur utilise la méthode  $A$  lorsqu'il est à jeûn et la méthode  $B$  lorsqu'il est ivre, il est ivre un jour sur trois. Quelle est la probabilité pour que le gardien soit ivre, sachant que les 7 premiers essais ont échoués ?

**Exercice 13.**

Un sac contient 3 jetons. L'un de ces jetons a 2 faces noires, un autre 2 faces blanches et le troisième a une face noire et une face blanche. On tire au hasard un jeton du sac et on le pose sur la table. La face visible est noire. Quelle est la probabilité que le jeton tiré ait 2 faces noires ?

**Exercice 14.**

On dispose d'un jeu de cinquante-deux cartes.

a) On retire du jeu le roi de trèfle ; quelle est la probabilité de tirer l'as de coeur ?

b) On retire une carte au hasard ; quelle est la probabilité de tirer l'as de coeur ?

**Exercice 15.**

Lors d'une épidémie, on estime que la probabilité de contamination d'un individu est de  $\frac{1}{20}$ . Pour contrer l'épidémie, on a développé un test  $T$  pour

repérer si un individu est contaminé ou non. On estime le test fiable à 90%, c'est-à-dire que le résultat du test est positif (respectivement négatif) sachant que l'individu est contaminé (respectivement n'est pas contaminé) avec une probabilité de  $\frac{9}{10}$ .

Quelle est la probabilité qu'un individu soit contaminé sachant que le test est négatif ?

#### Exercice 16.

On considère 3 urnes :

$U_1$  contient 2 boules noires et 3 boules rouges ;

$U_2$  contient une boule noire et 4 boules rouges

$U_3$  contient 3 boules noires et 4 boules rouges.

On tire une boule dans  $U_1$  et une boule dans  $U_2$ , et on les met dans  $U_3$ . On tire une boule dans  $U_3$ , elle est noire.

Quelle est la probabilité que la boule tirée de  $U_1$  soit rouge ?

#### Exercice 17.

Une usine fabrique des ampoules électriques l'aide de trois machines  $A$ ,  $B$  et  $C$ . La machine  $A$  assure 20% de la production et 5% des ampoules fabriquées par  $A$  sont défectueuses. La machine  $B$  assure 30% de la production et 4% des ampoules fabriquées par  $B$  sont défectueuses. La machine  $C$  assure 50% de la production et 1% des ampoules fabriquées par  $C$  sont défectueuses.

a) On choisit au hasard une ampoule. Calculer les probabilités :

- pour que l'ampoule soit défectueuse et produite par  $A$ ,
- pour que l'ampoule soit défectueuse et produite par  $B$ ,
- pour que l'ampoule soit défectueuse et produite par  $C$ .

b) Calculer la probabilité pour qu'une ampoule défectueuse :

- provienne de  $A$ ,
- provienne de  $B$ ,
- provienne de  $C$ .

#### Exercice 18.

##### Loi de Hardy-Weinberg

Lorsqu'un gène porte deux allèles  $A$  et  $a$ , un individu peut avoir l'un des trois génotypes  $AA$ ,  $Aa$  ou  $aa$  ; il transmet alors aléatoirement un des deux allèles à son enfant.

1. Calculer  $P(AA)$ ,  $P(Aa)$  et  $P(aa)$  pour un enfant dont les deux parents ont pour génotypes respectifs

(a)  $AA$  et  $AA$  ; (b)  $Aa$  et  $AA$  ; (c)  $aa$  et  $AA$  ; (d)  $Aa$  et  $Aa$ .

2. On considère une population (génération 0) pour laquelle les proportions respectives des trois génotypes  $AA$ ,  $Aa$  et  $aa$  sont  $p_0$ ,  $q_0$  et  $r_0$ . On admet que l'appariement est aléatoire.

(a) Exprimer en fonction de  $p_0$ ,  $q_0$  et  $r_0$  la probabilité  $p_1$  qu'un enfant de la génération 1 ait le génotype  $AA$ .

(b) Mêmes questions pour  $q_1$  et  $r_1$ .

3. Soit  $\alpha = p_0 - r_0$ , montrer que  $p_1 = \left(\frac{\alpha+1}{2}\right)^2$ ,  $q_1 = \frac{1-\alpha^2}{2}$  et  $r_1 = \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2$ .

4. Calculer  $p_1 - r_1$ , que peut-on en déduire sur  $p_n$ ,  $q_n$  et  $r_n$  pour  $n \geq 1$  ?