Feuille de TD 1

1 Primitives

Exercice 1. Ensemble de primitives
Déterminer l'ensemble des primitives des fonctions suivantes sur l'intervalle I considéré.

1. $f\ :\ x \mapsto x^4 - 6x + 5$, $I = \mathbb{R}$
2. $f\ :\ x \mapsto e^{-2x-5}$, $I = \mathbb{R}$
3. $f\ :\ x \mapsto \frac{-5}{x} - \frac{3}{\sqrt{2x}}$, $I =]0, +\infty[$

Exercice 2. Primitive avec condition initiale
Déterminer la primitive F de la fonction f donnée dans l'exercice ci-dessus telle que $F(x_0) = y_0$.

1. $x_0 = 1, y_0 = -3$;
2. $x_0 = -1, y_0 = 0$;
3. $x_0 = e, y_0 = -1$.

Exercice 3.
Déterminer les primitives des fonctions suivantes :
$x \to x^7 + 4x^3 + 8x + 7$, $x \to (x+2)^5 - (x-3)^2 + 3$, $x \to e^{8x-4}$, $x \to \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \to \sqrt{x+1}$, $x \to \frac{1}{\sqrt{x+2}}$, $x \to \frac{1}{2x\sqrt{x}}$

Dans chaque cas préciser la primitive qui s'annule au point $x = 0$ sauf la dernière où l'on cherchera la primitive telle que $F(1) = 0$.

Exercice 4.
Calculer les primitives des fonctions suivantes (en précisant l'intervalle maximal de définition)
$x \mapsto xe^{(x^2+3)}$; $x \mapsto \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$; $x \mapsto \frac{x}{x^2+5}$; $x \mapsto \frac{7x^2}{5x^3+1}$; $x \mapsto x^4(1+9x^5)^5$; $x \mapsto \frac{2\ln x}{x}$; $x \mapsto e^x\sqrt{1+2e^x}$; $x \mapsto \sin x\cos^2 x$; $x \mapsto x\sqrt{x^2+1}$; $x \mapsto \frac{4e^x}{e^x+1}$

2 Intégration par parties

Exercice 5.
En intégrant par parties, calculer les intégrales suivantes :
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\cos x\,dx$, $\int_0^{\pi}(x^2 - 2x + 1)\sin 3x\,dx$, $\int_0^1(1-2x^2)e^{-x}\,dx$, $\int \frac{log(x)}{x}dx$.

Exercice 6.

1. Dériver la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x\ln x$ et en déduire les primitives de la fonction $\ln$ sur $]0, +\infty[$.
2. Calculer $\int_1^3 \ln t\,dt$ et $\int_{1/e}^e \ln x\,dx$.
3. Calculer $\int_{1/e}^e |\ln x|\,dx$.
4. Retrouver à l'aide d'une intégration par partie le résultat de la première question.
5. Calculer $\int_1^3 t^2\ln t\,dt$.

Exercice 7.
En effectuant deux intégrations par parties calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{3x}\sin x\,dx$.

Exercice 8.

1. Ecrire la dérivée de la fonction $\tan$ en fonction de la fonction $\cos$.
2. Calculer $\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 t}\,dt$.
3. Calculer en intégrant par parties $\int_0^{\pi/4} \frac{t}{\cos^2 t}\,dt$.

Exercice 9.
Calculer les primitives des fonctions suivantes
$x \mapsto (x^2 - 3x)e^x$; $x \mapsto (-2x+7)e^{(2x-1)}$; $x \mapsto (x^2-3x)\cos x$; $x \mapsto (-2x+7)\sin(2x-1)$; $x \mapsto \cos xe^{3x}$; $x \mapsto \sin xe^{3x}$.

3 Formule du changement de variable

Exercice 10.
En utilisant la formule du changement de variable calculer : $\int_0^1 e^{-x}dx$, $\int_0^1 2e^{2x}$, $\int_0^1 2xe^{x^2}$, $\int_0^1 e^x\sqrt{e^x+3}dx$

4 Intégrales de fonctions rationnelles

Exercice 11.

1. Déterminer deux réels a et b tels que l'on ait pour tout réel x différent de -1 et 5 :
$$\frac{1}{x^2-4x-5}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-5}.$$
2. Calculer $\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x-5}$.

Exercice 12.

1. Touver deux réels a et b tels que
$$\frac{1}{x^2-x-2}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-2}.$$
2. Déterminer les primitives de $x \rightarrow \frac{x}{x^2-x-2}$, définies sur l'intervalle $]2,+\infty[$.

5 Intégrale des fonction cos et sin

Exercice 13.

1. Exprimer $\cos^2 x$ en fonction de $\cos 2x$.
2. Calculer $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^2 x\, dx$.
3. Montrer que $\cos^4 x \sin^3 x$ peut s'exprimer sous la forme $\sin x \times P(\cos x)$ avec P fonction polynomiale de degré 6.
4. Calculer $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^4 x \sin^3 x\, dx$.

Exercice 14.

1. Calculer la dérivée de la fonction $x \rightarrow \ln(x+\sqrt{x^2+1})$.
2. Calculer $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$.

Exercice 15.
Calculer
$$\int_0^{\pi} \sin(2x)\cos(3x)\, dx.$$
on pourra utiliser l'égalité : $\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b)+\sin(a-b))$.

6 Exercices supplémentaires

Exercice 16. Loi Exponentielle.
Soient λ et T deux réels strictements positifs.

1. Calculer $I(T)=\int_0^T \lambda e^{-\lambda t}\, dt$, puis $\lim_{T\rightarrow+\infty} I(T)$. Interpréter graphiquement ces résultats en terme d'aire.
2. Calculer $E(T)=\int_0^T \lambda t e^{-\lambda t}\, dt$, puis $\lim_{T\rightarrow+\infty} E(T)$.

Exercice 17. Loi Normale.

1. Justifier que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$.
2. Vérifier de deux manières différentes que pour tout réel x : $\int_0^x t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = -xe^{-\frac{x^2}{2}}+F(x)$.
3. On admet que $\lim_{x\rightarrow+\infty} F(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, que vaut $\lim_{x\rightarrow+\infty} \int_0^x t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$?