Feuille de TD 2

1 Résolution d'équations différentielles

Exercice 1.

Résoudre les équations différentielles

1. $y' + 6y = 4$ (E_1) avec la condition initiale $y(0) = 0$.
2. $y' + 7y = 3e^x$ (E_2) avec la condition initiale $y(0) = -2$
3. $y' + y = xe^{-x} + 2$ (E_3).
4. $3y' + 2y = 2x^3 + 9x^2 + 14 \Leftrightarrow y' + \frac{2}{3}y = \frac{2x^3+9x^2+14}{3} (E_4)$.
5. $y' - y = \sin x + 2\cos x$ (E_5).
6. $y' + y = (x^2 - 1)e^x$ (E_6).
7. $y' = 3y + e^{3x}\sin x$ (E_7).

Exercice 2. Résoudre les équations différentielles

1. $y' = xy$ (H_1).
2. $y' + xy = x$ (E_2).
3. $xy' - y = x^3 \Leftrightarrow y' - \frac{1}{x}y = x^2$ (E_3).
4. $y' + (\tan x)y = \sin x \cos x$ (E_4).

Exercice 3.

Pour chacune des équations différentielles suivantes, déterminer l'ensemble des solutions, puis, la solution qui vérifie les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ pour les équations 1,2,4 et 6.

1. $y'' + 2y' - 3y = -t + 1$ (E_1).
2. $y'' + 2y' - 3y = e^{2t}$ (E_2).
3. $y'' + 2y' - 3y = -t + 1 + e^{2t} + \cos t$ (E_3).
4. $y'' - 6y' + 9y = 3 + e^t$ (E_4).
5. $y'' - 3y' = 3 + t^2$ (E_5).
6. $y'' + y = t + \sin(2t)$ (E_6).

Exercice 4.

Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes.

1. $y'' + 5y' - 6y = e^x$ (E_1).
2. $y'' + 5y' - 6y = e^{2x}(x^2 + 1)$ (E_2).
3. $y'' + 5y' - 6y = \cos(3x)$ (E_3).
4. $y'' + 2y' - 3y = 1 + x + e^x$ (E_4).
5. $y'' - 2y' + y = x - 1 + e^x$ (E_5).
6. $y'' - y' = x^2$ (E_6)
7. $y'' + y' + y = x + 1$ (E_7).
8. $y'' + 4y = x + \sin(2x)$ (E_8).

2 Applications à la biologie

Exercice 5. Croissance de population.

On considère une population formée de N individus et évoluant en fonction du temps t.

1. Dans le modèle de Malthus on suppose que le taux d'accroissement de la population est proportionnel au nombre d'individus.
   (a) Justifier que dans ce modèle N vérifie l'équation $\frac{N(t+h)-N(t)}{h} = kN(t)$ puis si on suppose N dérivable $N'(t) = kN(t)$ avec k constante (égale à la différence entre le taux de natalité et de mortalité qui sont supposés constants dans ce modèle).
   (b) Déterminer N si à l'instant $t = 0$ la population est de N_0 individus.
   (c) Comment évolue cette population lorsque t tend vers l'infini ?
2. Le modèle de Verhulst prend en compte que les ressources de l'environnement ne sont pas illimitées et suppose que le taux k n'est plus constant mais proportionnel à la différence entre une population maximale et la population à l'instant t. On a alors $k(t) = r(N^* - N(t))$ et N est solution de l'équation $N'(t) = rN(t)(N^* - N(t))$ (appelée *équation logistique*).
   (a) On admet que la population n'est jamais nulle et on pose $y(t) = \frac{1}{N(t)}$, justifier que y est dérivable puis calculer N' en fonction de y et y'.
   (b) Remplacer N et N' par leurs expressions en fonctions de y et y' dans l'équation logistique et vérifier que y est solution de l'équation différentielle
   $$y' = r(1 - N^*y).$$
   (c) Résoudre l'équation précédente.

(d) En déduire que $N(t) = \dfrac{N^*}{1 + Ke^{-rN^*t}}$ avec K constante réelle.

(e) Comment évolue cette population lorsque t tend vers l'infini ?

Exercice 6. Décroissance radioactive.
Pour les substances radioactives, des expériences ont montré que, en l'absence d'apport extérieur, le taux de variation du nombre $Q(t)$ d'atomes radioactifs est proportionnel au nombre d'atomes radioactifs présents. La fonction Q est donc solution de l'équation différentielle

$$y' = -\mu y$$

où μ est une constante propre à la substance radioactive.

1. On appelle *temps de demi-vie* pour une substance radioactive le temps T nécessaire pour que la moitié de ses noyaux radioactifs disparaissent, trouver une relation reliant T et μ.
2. Pour le carbone 14, T est de 5700 ans, que vaut approximativement μ ?
3. L'analyse des restes d'un arbre mort lors d'une éruption volcanique fait apparaitre que l'arbre ne contient plus que 40 % du carbone 14 qu'il contenait avant l'éruption. De quand date l'éruption si l'analyse a été effectuée en 2006 (penser à utiliser le temps de demi-vie du carbone 14).
4. Même question avec une analyse plus fine qui donne 42 % ?

3 Applications à la physique

Exercice 7. Loi de refroidissement de Newton.
Cette loi de refroidissement (ou de réchauffement ...) suppose que le taux de variation de la température d'un objet est proportionnel à la différence de température entre l'objet et le milieu ambiant. Le coefficient de proportionnalité k dépend essentiellement de la surface de contact entre l'objet et son milieu (on le considèrera constant). On note $T(t)$ la température de l'objet à l'instant t.

1. Donner l'équation différentielle dont est solution la fonction T si l'on suppose que le milieu ambiant est à température constante T_a.
2. Déterminer $T(t)$ si l'objet possède une température initiale $T(0) = T_0$.
3. On suppose maintenant que la température ambiante varie avec le temps (par exemple cas du sol exposé aux rayons du soleil). Déterminer $T(t)$ lorsque $T_a(t) = T_m \sin(\omega t)$.

Exercice 8. On cherche à déterminer l'ensemble des solutions en fonction du paramètre m de l'équation différentielle

$$(E_m) \quad : \quad y'' - (m+1)y' + my = e^x - x - 1.$$

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation homogène (H) en distinguant les cas $m = 1$ et $m \neq 1$.
2. Déterminer une solution particulière de l'équation non homogène (NH) en distinguant les cas $m = 1$, $m = 0$ et $m \notin \{0; 1\}$.
3. Déterminer l'ensemble des solutions en fonction du paramètre m de l'équation différentielle (E_m).

Exercice 9. Chute
Le principe fondamental de la dynamique de Newton dit que le centre d'inertie d'un corps de masse m subit une accélération $\vec{a} = \frac{1}{m}\vec{F_e}$ où $\vec{F_e}$ est la somme des forces extérieures exercées sur l'objet.
On choisit un axe vertical repéré par le vecteur $\vec{\jmath}$ orienté vers le haut et d'origine O d'altitude 0. Ainsi le champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{\jmath}$ et la vecteur accélération $\vec{a} = a(t)\vec{\jmath}$.

1. Si $z(t)$ désigne l'altitude du centre d'inertie du corps à l'instant t, exprimer $a(t)$ en fonction de $z(t)$.
2. En l'absence de frottement, la seule force extérieure est la force de pesanteur $m\vec{g}$. En déduire que la fonction z satisfait l'équation différentielle

$$z'' = -g.$$

   Puis la résoudre en supposant que la position initiale est $z(0) = h$ et que le corps n'a pas de vitesse initiale.
3. Avec frottements, on suppose que le corps est soumis à une force de frottements proportionnelle à la vitesse (hypothèse valable seulement pour une vitesse pas trop élevée). Vérifier que la fonction z vérifie alors l'équation différentielle

$$z'' = -g - \frac{k}{m}z'$$

   puis la résoudre.
4. Dans le cas précédent, calculer la limite lorsque t tend vers l'infini de z', quelle interprétation pouvez-vous en donner ?

Exercice 10. Masse suspendue à un ressort.
On considère un corps ponctuel M de masse m suspendu à un ressort et plongé dans un milieu ayant une certaine viscosité (air, eau, huile, ...). On repère la position de M sur un axe vertical, repéré par un vecteur $\vec{\jmath}$ orienté vers le haut, et on prend pour origine la position d'équilibre de M. On note $y(t)$ la cote de M sur cet axe à l'instant t (soit $\overrightarrow{OM} = y(t)\vec{\jmath}$).

1. En l'absence de force d'excitation agissant sur M , trois forces interviennent pour déterminer le mouvement de M, la force d'inertie proportionnelle à y'' (coefficient la masse m), la force de viscosité proportionnelle à y' (coefficient de viscosité $b > 0$) et la force de rappel proportionnelle à y (coefficient de raideur du ressort $c > 0$). Alors y vérifie l'équation

$$my'' + by' + cy = 0.$$

   Résoudre cette équation en cas de
   (a) Viscosité nulle ($b = 0$).
   (b) Viscosité faible (b petit tel que $b^2 - 4mc < 0$).
   (c) Viscosité grande (b grand tel que $b^2 - 4mc > 0$).

(d) Dans chaque cas comment se comporte $y(t)$ lorsque t tend vers l'infini ? (Pour avoir une idée de l'allure de la courbe lorsque $b^2 - 4mc < 0$ on pourra utiliser, en l'ayant vérifié, que $A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x) = C\sin(\omega x + \varphi)$ avec $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ et φ tel que $\cos\varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$ et $\sin\varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$.)

2. On suppose maintenant de plus que M est soumis à une force sinusoïdale de pulsation λ, soit

$$my'' + by' + cy = k\sin\lambda t$$

où k est une constante. Résoudre cette équation dans chacun des cas précédents.

3. Que peut-on dire maintenant sur $y(t)$ lorsque t tend vers l'infini ?

4 Encore des exercices pour s'entrainer

Exercice 11. Déterminer les solutions aux problèmes homogènes suivants :

1. $y'(x) = xy(x)$
2. $y'(x) = \frac{1}{x}y(x)$
3. $y'(x) = x^2y(x)$
4. $y'(x) = \frac{1}{x^2}y(x)$
5. $y'(x) = e^x y(x)$
6. $y'(x) = \frac{xy(x)}{\sqrt{4+x^2}}$
7. $y'(x) = log(x)y(x)$
8. $y'(x) = sin(x)cos(x)y(x)$

Exercice 12. Problèmes avec condition initiale
Déterminer la solution de chaque problème ci-dessus telle que

1. $y(0) = 1$
2. $y(1) = \pi$
3. $y(1) = e$
4. $y(2) = 1$
5. $y(0) = e$
6. $y(0) = 2$
7. $y(1) = 1$
8. $y(\frac{\pi}{2}) = 1$

Exercice 13. Determiner les solutions aux problèmes homogènes suivants

1. $y'(x) = \frac{2}{x+1}y(x)$
2. $y'(x) + cos(x)y(x) = 0$
3. $xy'(x) + 3y(x) = 0$

Exercice 14. Déterminer les solutions aux problèmes ce dessous

1. $y(x) = \frac{2}{x+1}y(x) + (x+1)^2cos(x)$
2. $y'(x) + cos(x)y(x) = sin(x)cos(x)$
3. $xy'(x) + 3y(x) = x^2$
4. $y'(x) + 2xy(x) = 2xe^{-x^2}$