Chapitre 1

Intégration et calcul de primitives

1.1 Définitions

Définition 1.1.1.
Si $a < b$, f continue sur $[a, b]$

- *positive : $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire (en unité d'aire) de la surface limitée par les droites d'équations $y = 0$, $x = a$ et $x = b$ et la courbe représentative de la fonction f sur $[a, b]$*
- *de signe quelquonque $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire algébrique de cette même surface.*

Si $a > b$ $\int_a^b f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx$

Examples 1.1.2.

- $\int_{-2}^1 xdx = -1 + \frac{1}{2} = \frac{-1}{2}$
- $\int_{-2}^1 |x|dx = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

1.2 Propriétés

Propriété 1.2.1 (Linéarité de l'intégrale)**.**
Si f, g fonctions continues sur $[a,\ b]$ et $k \in \mathbb{R}$ alors $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + k\int_a^b g(x)dx$

Propriété 1.2.2 (Relation de chasles)**.**
Si f fonction continue sur I contenant a, b et c alors $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx$

1.3 Notion de primitive

Définition 1.3.1.
Soient f et F deux fonctions définies sur I intervalle, on suppose, de plus que F est dérivable sur I. F est une primitive de f sur I si $\forall x \in I$, $F'(x) = f(x)$

Remarque 1.3.2. *F primitive de f sur I alors pour tout réèl c, $F + c$ est une primitive de f sur I.*

Théorème 1.3.3 (Lien entre intégrale et primitive)**.**
Soient f continue sur I intervalle et $a \in I$

1. *La fonction F définie sur I par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f sur I*
2. *Soit G une primitive de f sur I alors $\forall x \in I$, $\int_a^x f(t)dt = G(x) - G(a)$*

Conséquences 1.3.4.

1. *Toute fonction continue admet une primitive sur un intervalle.*
2. *Si on connait une primitive de f alors le calcul de $\int_a^b f(t)dt$ se fait à l'aide de cette primitive. En particulier, si g est dérivable sur $[a,\ b]$, $\int_a^b g'(x)dx = g(b) - g(a)$*

Remarque 1.3.5.

- *$x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f sur I qui s'annule en a.*
- *$\int f(x)dx$ désignera une primitive de f*

1.4 Tableau de primitives usuelles

Par lecture inverse du tableau des dérivées

F	f	f'
$x+c$	1	0
$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	x^n sur $\mathbb{R}$	$nx^{n-1},\ n \geq 1$
$-\frac{1}{n-1}\frac{1}{x^{n-1}}+c,\ n \geq 1$	$\frac{1}{x^n}$ sur $]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$	$-n\frac{1}{x^{n+1}},\ n \geq 1$
$ln\|x\|+c$	$\frac{1}{x}$ sur $]-\infty,0[$ ou $]0,\ +\infty[$	$-\frac{1}{x^2}$
e^x+c	e^x sur $\mathbb{R}$	e^x
$\frac{1}{1+\alpha}x^{\alpha+1}+c$	x^α sur $]0,\ +\infty[$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$sin\ x+c$	$cos\ x$ sur $\mathbb{R}$	$-sin\ x$
$-cos\ x+c$	$sin\ x$ sur $\mathbb{R}$	$cos\ x$

Primitive et composition :

f	F
$u'(x)exp(u(x))$	$exp(u(x))$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$ln\|u(x)\|$
$u'(x)\frac{1}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)}$
$u'(x)(u(x))^n$	$\frac{(u(x))^{n+1}}{n+1}$....
$\mathbf{u'(x)g(u(x))}$	$\mathbf{G(u(x))}$ où G primitive de g

Exercices d'application :

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_{-1}^{2}(x+3)dx$
2. $\int_{-1}^{2}x^2dx$
3. $\int_{\frac{\Pi}{2}}^{\Pi}cos\ xdx$
4. $\int_{1}^{2}\frac{1}{1+x}dx$
5. $\int_{1}^{2}\frac{1}{\sqrt{x+1}}dx$
6. $\int_{0}^{1}2e^{2x-1}dx$
7. $\int_{0}^{\Pi}2cos(2x)dx$

1.5 Méthodes de calculs de primitives

1.5.1 Formule d'intégration par parties

On se donne I un intervalle contenant a et b, u et v fonctions de classe C^1 sur I
La formule d'intégration par parties est donc :

$$\begin{aligned}\int_a^b (uv)'(x)dx &= [uv]_a^b - \int_a^b (u'v)(x)dx \\ &= (uv)(b) - (uv)(a) - \int_a^b (u'v)(x)dx\end{aligned}$$

Remarque 1.5.1.
On note que la formule provient simplement du fait que $(uv)' = u'v + uv'$
on a $\int uv'dx = uv - \int u'vdx$

Examples 1.5.2.

$$\begin{aligned}\int_0^\Pi xsin\ xdx &= [-xcos\ x]_0^\Pi - \int_0^\Pi -cos\ xdx \\ &= \Pi + [sin\ x]_0^\Pi = \Pi\end{aligned}$$

avec

$$\begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = sin\ x & v = -cos\ x \end{array}$$

Exercices d'application courant :
- Calculer $\int_0^1 x^2 e^x dx$.
- Calculer $\int_O^{\frac{\Pi}{2}} cos\ xe^{-x}dx$.

1.5.2 Formule de changement de variable

On se donne I un intervalle contenant a et b, u de classe C^1 sur I, f continue sur $J = u(I)$ alors

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt$$

Démonstration. Si F désigne une primitive de f alors $F \circ u$ est une primitive de $(f \circ u) \times u'$ donc

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)dx = F(u(b)) - F(u(a)) = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt$$

□

Remarque 1.5.3. *Dans le cas particulier où* $u(x) = ax + b$ *la primitive de* $x \mapsto f(u(x)) = f(ax + b)$ *est* $x \mapsto \frac{1}{a}F(ax + b)$

Examples 1.5.4.

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\Pi}{4}} tan\ xdx &= \int_0^{\frac{\Pi}{4}} \frac{sin\ x}{cos\ x}dx &&= -\int_0^{\frac{\Pi}{4}} \frac{cos'\ x}{cos\ x}dx \\ &= -\int_{cos\ 0}^{cos\ \frac{\Pi}{4}} \frac{dt}{t} &&= -\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{t} \\ &= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{dt}{t} &&= ln\ 1 - ln(\frac{\sqrt{2}}{2}) \\ &= 0 - ln(\frac{1}{\sqrt{2}}) &&= \frac{ln\ 2}{2}\end{aligned}$$

1.6 Intégrale généralisée

Définition 1.6.1.

1. *Soit f une fonction continue sur $[a,\ +\infty[$.*
   On pose $I(T) := \int_a^T f(x)dx$. *Si* $\lim\limits_{T\to\infty} I(T)$ *existe alors* $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{T\to+\infty} I(T)$.
2. *Si f est continue sur* $]-\infty, a]$, $\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim\limits_{R\to-\infty} \int_R^a f(x)dx$.
3. *Si f est continue sur $\mathbb{R}$, soit $a \in \mathbb{R}$ alors* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim T \to +\infty \int_a^T f(x)dx + \lim\limits_{P\to\infty} \int_P^a f(x)dx$ *(indépendant de a).*

Exercice d'application : Calcule $\int_0^{+\infty} exp(-2x)dx$