Université Bordeaux 1
Licence de Sciences, Technologies, Santé
Mathématiques, Informatique, Sciences de la Matière et Ingénierie
M1MI1002 Fondamentaux pour les Mathématiques et l'Informatique

Fondamentaux pour les Mathématiques et l'Informatique

FASCICULE D'EXERCICES

Table des matières

Avant-propos

Ce fascicule rassemble un choix d'exercices couvrant le programme de l'UE **M1MI1002** *"Fondements pour les Mathématiques et l'Informatique"*. Il s'agit à la fois d'une base dans laquelle on pourra puiser les exercices à développer en travaux dirigés, et d'un outil de travail personnel pour les étudiants. Il va de soi que l'on ne pourra traiter l'intégralité de ces exercices pendant les 21 séances de cours/travaux dirigés.

Les exercices proposés sont de difficulté assez variable : les énoncés jugés un peu plus difficiles sont signalés par des étoiles ★.

Le contrôle des connaissances consiste, pour cette UE, en :

- deux devoirs surveillés d'une durée d'une heure, affectés chacun d'un coefficient 0.3,
- un devoir surveillé terminal d'un durée d'une heure trente, affecté d'un coefficient 0.4.

Le style et le niveau des exercices (sans étoile) de ce recueil donnent une indication de ce qui est attendu des étudiants pour ces devoirs surveillés.

Chapitre 1

Rudiments de logique

1.1 Opérations logiques

Exercice 1.1. P, Q et R désignent trois propositions logiques.

1. Construire les tables de vérité des propositions suivantes :
   (a) $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$
   (b) $P \Rightarrow (Q \Rightarrow (P \wedge Q))$
   (c) $(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg(P \Rightarrow \neg Q))$
2. Exprimer sans $\Rightarrow$ ni $\Leftrightarrow$:
   (a) $\neg(P \Leftrightarrow Q)$
   (b) $\neg((P \vee Q) \Rightarrow Q)$
   (c) $\neg(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R))$.

Exercice 1.2. Simplifier les propositions suivantes, éventuellement à l'aide d'une table de vérité :

1. $(\neg p \Rightarrow p) \Rightarrow p$
2. $(\neg p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$
3. $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$
4. $(\neg p) \vee (q \Leftrightarrow (p \Rightarrow q))$

Exercice 1.3. Les implications ci-dessous sont-elles vraies ?

1. si $\pi < 3$, alors $1 + 1 = 2$.
2. si 1+1=2, alors $\pi < 3$.
3. si c'est aujourd'hui lundi, alors $2 + 2 = 4$
4. si un nombre est divisible par 2 et par 6, alors il est divisible par 12
5. si 18 est divisible par 3 et par 4, alors 18 est divisible par 6

Exercice 1.4. On suppose que l'énoncé suivant est vrai : "S'il pleut le matin, je prends mon parapluie". Les argumentations ci-dessous sont-elles correctes ?

1. "J'ai pris mon parapluie, donc il a plu ce matin".
2. "Je n'ai pas pris mon parapluie, donc il ne pleuvait pas ce matin".
3. "Il a fait beau, donc je n'ai pas pris mon parapluie".

Exercice 1.5.

Dans un journal est annoncée la nouvelle suivante :

L'armée ne quittera pas le pays tant que le calme n'est pas revenu.

En considérant l'annonce officielle précédente comme vraie, dire si les argumentations suivantes sont correctes :

1. " Le calme est revenu, donc l'armée quitte le pays. "
2. " L'armée quitte le pays, donc le calme est revenu. "
3. " L'armée n'a pas quitté le pays, donc le calme n'est pas revenu."

Exercice 1.6. Le roi à Chimène : "Si Don Rodrigue a tué ton père, c'est qu'il avait bu ou qu'il faisait nuit. S'il faisait nuit, alors, s'il avait bu, il devait chanter. Or il ne sait pas chanter. Donc il n'a pas tué ton père."

Exprimer chaque phrase avec des connecteurs logiques. Si on suppose les trois premières phrases vraies, peut-on bien en déduire la dernière ?

Exercice 1.7. Dire si l'on peut remplacer MACHIN par "nécessaire", "suffisante" ou "nécessaire et suffisante" dans les phrases ci-dessous :

1. Avoir au moins 18 ans est une condition MACHIN pour voter en France.
2. Avoir 10 à toutes les matières est une condition MACHIN pour avoir le baccalauréat.
3. $x = 1$ est une condition MACHIN pour que $x^2 = x$.
4. $x > 0$ est une condition MACHIN pour que $\frac{1}{x} > 1$.
5. $|x| = 1$ est une condition MACHIN pour que $x^2 = 1$.

1.3 Quantificateurs

Exercice 1.8. On note C l'ensemble des chatons, $M(c)$ la formule "c est moustachu", $P(c)$ la formule "c aime le poisson" et $S(c)$ la formule "c a peur des souris". Écrire les phrases suivantes à l'aide de quantificateurs.
1. Les chatons moustachus aiment toujours le poisson.
2. Il est faux que tous les chatons qui aiment le poisson soient moustachus.
3. Aucun chaton qui aime le poisson n'a peur des souris.
4. Les chatons sont moustachus ou ont peur des souris.
5. Les chatons qui ont peur des souris ne sont pas moustachus.
On suppose vraies les phrases 1,2 et 3. Faire un schéma représentant l'ensemble des chatons, et les trois sous-ensembles pour lesquels M, P et S sont respectivement vraies. Que peut-on dire de la phrase 4 ? De la phrase 5 ?

Exercice 1.9. Écrire les négations logiques des propositions suivantes :

1. " Tous les hommes sont mortels. "
2. " Tout intervalle de $\mathbb{R}$ contient un élément de l'intervalle $[0, 1]$."
3. $\forall p \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ p \geq n$
4. $(x^2 \geq 1 \wedge x^3 < 2) \vee (x^2 \leq 9 \wedge x < 0)$
5. $\forall x \in \mathbb{R}, x < 1 \Rightarrow x^2 < 1$.

Exercice 1.10. Soit E un ensemble et A et B deux parties de E. La définition de $A \subset B$ est "tout élément de A est élément de B". À quelle(s) proposition(s) ci-dessous cela correspond-il ?

- $\forall x \in A, x \in B$
- $\forall x \in E, (x \in B \Rightarrow x \in A)$
- $\forall y \in E, (y \in A \Rightarrow y \in B)$
- $(\forall x \in E, x \in A) \Rightarrow (\forall x \in E, x \in B)$

Exercice 1.11. Si f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la définition de "f est bornée" est "$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M$". Donner la définition de "f n'est pas bornée".

La définition de "f est croissante" est "$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$". Donner la définition de "f n'est pas croissante".

Exercice 1.12. On considère l'application f de $\{0, 1, 2\}$ dans $\{-1, 3, 5\}$ définie par $f(0) = 3$, $f(1) = -1$ et $f(2) = 3$.

Pour chacune des propositions suivantes, donner sa négation, et dire si elle est vraie ou fausse.

1. $\forall i \in \{0, 1, 2\}, f(i) \geq 0$
2. $\exists i \in \{0, 1, 2\}, f(i) \geq 0$
3. $\forall j \in \{-1, 3, 5\}, \exists i \in \{0, 1, 2\}, f(i) = j$
4. $\forall j \in \{-1, 3\}, \exists i \in \{0, 1, 2\}, f(i) = j$
5. $\exists j \in \{-1, 3, 5\}, \forall i \in \{0, 1, 2\}, f(i) = j$.

Exercice 1.13. Pour chacune des propositions suivantes, donner sa négation, et dire si elle est vraie ou fausse (en justifiant la réponse)

1. $\forall x \in \mathbb{R}^*, x^2 > 0$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$
3. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = x$
5. $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(x + y = 0)$
6. $(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})(x + y = 0)$. Y a-t-il une différence entre les deux derniers énoncés ? Si oui, l'expliciter.
7. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}^+, x \geq y$
8. $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x \geq y$
9. $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^+, x \geq y$

Exercice 1.14. Écrire sous la forme d'une formule avec quantificateurs les énoncés suivants :

1. Tout entier naturel possède une racine carrée réelle.
2. Tout entier naturel possède un réel positif plus grand que lui.
3. Il existe un réel plus petit que tous les entiers naturels.
4. L'intervalle I est inclus dans $[1, 2]$.

1.4 Raisonnement par l'absurde

Exercice 1.15. Montrer par l'absurde que 0 n'est pas racine de $x^4 + 12x - 1$.

Exercice 1.16. Montrer par l'absurde que le polynôme $x^4 - 3x^3 + x^2 - x + \sqrt{2}$ n'admet pas de racine entière.

Exercice 1.17.
Démontrer la propriété suivante par l'absurde :

" Tout entier de carré impair est impair "

Exercice 1.18. *Principe des tiroirs* Démontrer que lorsque l'on range $(n + 1)$ paires de chaussettes dans n tiroirs distincts, alors au moins un des tiroirs contient au moins 2 paires de chaussettes.

Exercice 1.19. Soit $n \geq 1$ un entier naturel. On se donne $n + 1$ réels $0 \leq x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq 1$. On veut montrer la propriété (P) suivante :

Au moins deux de ces réels sont distants de moins de $\dfrac{1}{n}$

1. Écrire à l'aide de quantificateurs une formule logique portant sur les quantités $x_i - x_{i-1}$ équivalente à la propriété (P).
2. Écrire la négation de cette formule logique.
3. En déduire une démonstration par l'absurde de la propriété (P).

Exercice 1.20. Sur une île, on trouve deux sortes de personnes : les sincères, qui disent toujours la vérité, et les menteurs, qui mentent toujours.

1. Alice et Bob sont deux habitants de cette île. Alice déclare "L'un d'entre nous deux au moins est un menteur". Montrer par l'absurde que Alice est sincère. Qu'en est-il de Bob ?
2. Chloe et Denis sont deux autres habitants. Chloe déclare "Je suis menteuse ou Denis est sincère". Montrer par l'absurde que Chloe est sincère. Qu'en est-il de Denis ?
3. Gaspard, Melchior et Balthazar sont trois habitants. Gaspard déclare : "Nous sommes tous menteurs". Melchior dit : "Un et un seul d'entre nous est sincère". Montrer par l'absurde que Gaspard est un menteur, puis que Melchior est sincère. Qu'en est-il de Balthazar ?

Exercice 1.21. *Le but de cet exercice est de montrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel.*
Supposons qu'il existe deux entiers naturels tels que $p^2 = 2q^2$.

1 Montrer qu'on peut supposer que p et q sont premiers entre eux.
2 Montrer que p est pair.
3 En déduire que q est pair.
4 En déduire que p et q n'existent pas.

1.5 Raisonnement par la contraposée

Exercice 1.22.
Écrire les réciproques et les contraposées des implications suivantes :

1. " Si tous les hommes sont mortels, alors Socrate est mortel. "
2. " Si les nombres réels x et y sont différents, alors les nombres réels $(x+1)(y-1)$ et $(x-1)(y+1)$ sont différents. "
3. $(\forall \varepsilon > 0,\ |f(x)| < \varepsilon) \Rightarrow (f(x) = 0)$

Exercice 1.23.
Soit n un entier. Énoncer et démontrer la contraposée de l'implication suivante :

" Si n^2 est impair, alors n est impair."

Exercice 1.24. Soit x un réel. Montrer par contraposition "$x^3 = 2 \Rightarrow x < 2$".

Exercice 1.25.
Le but de cet exercice est de démontrer par contraposition la propriété suivante, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

" Si l'entier $(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par 8, alors l'entier n est pair "

1. Écrire la propriété ci-dessus sous la forme d'une formule mathématique.
2. Écrire la contraposée de la formule donnée à la question 1).
3. En remarquant qu'un entier impair n s'écrit sous la forme $n = 4k + r$, avec $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{1, 3\}$ (à justifier), prouver que la formule de la question 2) est vraie.
4. A-t-on démontré la propriété de l'énoncé ?

Exercice 1.26.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ un réel.
   (a) Quelle est la contraposée $\mathcal{Q}(x)$ de la proposition
   $\mathcal{P}(x)$: "$x < 0 \Rightarrow x < x^2$ " ?
   (b) Démontrez $\mathcal{Q}(x)$.
2. Peut-on en déduire la proposition : $\forall x \in \mathbb{R}, \mathcal{P}(x)$?

Chapitre 2

Ensembles

2.1 Opérations sur les ensembles

Exercice 2.1.

1. Soient $A = \{2, 3, 4, 5\}$ et $B = \{4, 5, 6\}$. Déterminer :

$$A \cap B \quad , \quad A \cup B \quad , \quad \complement_{\mathbb{N}} A \quad , \quad \complement_{\mathbb{R}} A \quad , \quad \complement_{\mathbb{N}} B \quad , \quad \complement_{A \cup B} A$$

2. Soient les intervalles (de $\mathbb{R}$) $I = [1, 3]$ et $J = [2, 4]$. Déterminer :

$$I \cap J \quad , \quad I \cup J \quad , \quad \complement_{\mathbb{R}} I \quad , \quad \complement_{\mathbb{R}} J \quad , \quad \complement_{\mathbb{R}}(I \cup J).$$

★ **Exercice 2.2.** Soit $A = \{0, 1, 2, 3\}$. Trouver deux parties de A F et G telles que

$$(F \backslash G) \cup G = F,$$

puis deux parties de A F' et G' telles que

$$(F' \backslash G') \cup G' \neq F'.$$

A quelle condition sur F et G a-t-on $(F \backslash G) \cup G = F$?

Exercice 2.3.

Montrer que si A et B sont deux parties d'un ensemble E, on a

$$A \subset B \Longrightarrow \complement_E B \subset \complement_E A.$$

Exercice 2.4.

Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E. On suppose que l'on a les inclusions suivantes :
$A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C$.
Montrer que l'on a l'inclusion $B \subset C$.

Exercice 2.5.

Soient E un ensemble, et F, G deux parties de E. Montrer

$$\begin{array}{rcl} F \subset G & \Longleftrightarrow & F \cup G = G \\ F \subset G & \Longleftrightarrow & \complement_E F \cup G = E \end{array}$$

Exercice 2.6. Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. Montrer que

$$A \cup B \cup C \ = \ (A \setminus B) \ \cup \ (B \setminus C) \ \cup \ (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C)$$

Exercice 2.7. Soient A_1, A_2 et A_3 trois parties d'un ensemble E. Donner une écriture plus simple des parties $C_E(C_E A_1 \cup (C_E A_2 \cap C_E A_3))$ et $(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap C_E A_2)$.

Exercice 2.8. Le plan étant rapporté à un repère orthonormé, représenter les ensembles suivants :

1. $\{1\} \times \{2, 3, 4\}$
2. $\{0, 2\} \times \{-1, 3\}$
3. $\{1\} \times \mathbb{R}$
4. $[0, 1] \times [1, 2]$
5. $[0, 1] \times \mathbb{R}^+$
6. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$
7. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
8. $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$

2.2 Applications

2.2.1 Images, antécédents

Exercice 2.9.
Soit f_1 définie par :

$$\begin{array}{rccc} f_1 : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

1 Déterminer les images de 0, 1, -2, $\sqrt{2}$.
2 Déterminer, s'ils existent, les antécédents de 0, 1, -2, $\sqrt{2}$.

Exercice 2.10.
Pour l'application f_2 définie par :

$$\begin{array}{rccc} f_2 : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) & \mapsto & (2x - 3y, -4x + 6y) \end{array}$$

1 Déterminer les images de $(0,0)$, $(-1,0)$, $(1,-2)$.
2 Déterminer, s'ils existent, les antécédents de $(0,0)$, $(-1,0)$, $(1,-2)$.

Exercice 2.11.
Pour l'application f_3 définie par :

$$f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2+y \end{array}$$

1 Déterminer les images de $(0,0)$, $(-1,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$.
2 Déterminer, s'ils existent, les antécédents de 0, 1.

Exercice 2.12.
Pour l'application f_4 définie par :

$$f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & (x^2, x+5) \end{array}$$

1 Déterminer les images de 0, 1, -1.
2 Déterminer, s'ils existent, les antécédents de $(0,0)$ $(-1,0)$, $(1,6)$.

2.2.2 Image directe et image réciproque

Exercice 2.13.
On considère l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$.
1 Déterminer les images directes :

$$f(\{-1,2\}) \quad ; \quad f([-3,-1]) \quad ; \quad f([-3,1]).$$

2 Déterminer les images réciproques :

$$f^{-1}(\{4\}) \quad ; \quad f^{-1}(\{-1\}) \quad ; \quad f^{-1}([-1,4]).$$

Exercice 2.14. Soit $f : A \to B$ une application, et soient X_1 et X_2 des parties de A. Montrer les propriétés suivantes :

1. si $X_1 \subseteq X_2$, alors $f(X_1) \subseteq f(X_2)$
2. $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$
3. $f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f(X_2)$

Exercice 2.15.
Soit une application $f : E \to F$ définie sur des ensembles quelconques. Déterminer l'image directe par f des ensembles X_0 et X_1 dans les cas suivants :

1. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(k) = k+1$; X_0 est l'ensemble des nombres pairs, $X_1 = f(X_0)$.
2. $p \in \mathbb{N}$ étant donné, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est définie par $f(k) = 2k$ si $k \geq p$ et $f(k) = 0$ sinon ; $X_0 = \mathbb{N}$, X_1 est l'ensemble des nombres impairs.

★ **Exercice 2.16.**
On considère l'application

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2+y^2. \end{array}$$

1 Calculer les images réciproques :

$$f^{-1}(\{0\}), \quad f^{-1}(]-\infty,0]), \quad f^{-1}(\{1\}), \quad f^{-1}(]-1,1]), \quad f^{-1}(]4,+\infty[).$$

2 Calculer les images directes :
a $f(X_1)$ où $X_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x > 0\}$.
b $f(C)$ où $C = [0,1] \times [-2,3]$.

2.2.3 Composition des applications

Exercice 2.17.
On considère les applications f et g suivantes :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R}^* \\ x & \mapsto & e^{\frac{1}{x}} \end{array} \qquad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R}^* \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

Les expressions $f \circ g$ et $g \circ f$ ont-elles un sens ? Si oui les expliciter.

Exercice 2.18.
Mêmes questions avec f et g définies par :

$$f : \begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \to &]0,+\infty[\\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array} \qquad g : \begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln x \end{array}$$

2.2.4 Injection, surjection, bijection

Exercice 2.19.
On considère les deux ensembles $E = \{a, b\}$ et $F = \{c, d, e\}$.
Déterminer toutes les applications de E dans F et dire, pour chacune d'entre elles, si elle est injective, surjective, bijective.

Exercice 2.20.
On considère les applications f et g suivantes :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & x+3 \end{array} \qquad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -x+5 \end{array}$$

1 Montrer que f et g sont bijectives.
2 Déterminer f^{-1}, g^{-1}, $f \circ g$, $(f \circ g)^{-1}$ et $g^{-1} \circ f^{-1}$.

Exercice 2.21.
L'application $h : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto 3n \end{cases}$ est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

Exercice 2.22. L'application $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ donnée par $f(k) = k^2 + k + 1$ est-elle injective ? surjective ?

Exercice 2.23.
On considère les applications f et g suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & xy \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & (x, x^2) \end{array}$$

1 Déterminer les applications $f \circ g$ et $g \circ f$.
2 Les applications f, g, $f \circ g$ et $g \circ f$ sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

★ **Exercice 2.24.** Soit $f : A \to B$ une application, et soient X_1 et X_2 des parties de A.
1 Montrer la propriété suivante : Si f est injective, $f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2)$.
2 Soient Y_1 et Y_2 des parties de B. À quelle condition a-t-on $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$? $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$?

Exercice 2.25.
Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ des applications. Montrer que :

$$f \text{ et } g \text{ surjectives } \Longrightarrow g \circ f \text{ surjective },$$

$$f \text{ et } g \text{ injectives } \Longrightarrow g \circ f \text{ injective.}$$

Exercice 2.26.
Dire si les applications f de E dans F suivantes sont injectives, surjectives, bijectives. Dans le cas où l'application est bijective, déterminer son application réciproque.
1 $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}$, $f : (x, y) \mapsto x + y$.
2 $E = F = \mathbb{R}^2$, $f : (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$.
3 $E = F = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $f : A \mapsto \complement_{\mathbb{N}} A$.

★ **Exercice 2.27.**
Soient f et g les applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par

$$f(n) = 2n, \qquad g(n) = E\left[\frac{n}{2}\right]$$

où $E[x]$ est la partie entière de x, c'est-à-dire $E[x] \in \mathbb{N}$ et $E[x] \leq x < E[x] + 1$.

1 Les applications f et g sont-elles bijectives ?
2 Calculer $g \circ f$ puis $f \circ g$. Les applications $g \circ f$ et $f \circ g$ sont-elles bijectives ?

★ **Exercice 2.28.** On se donne des ensembles E, F, G et des fonctions $g : E \to G$ et $f : F \to G$. On cherche dans quelles conditions il existe une fonction $h : E \to F$ telle que $g = f \circ h$.

1. On suppose $E = F = G = \mathbb{N}$. Déterminer s'il existe $h : F \to G$ telle que $g = f \circ h$ dans chacun des cas suivants :
   (a) $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$
   (b) $f(x) = x - 1$ et $g(x) = x^2$

(c) $f(x) = x^2$ et $g(x) = x - 1$

2. Démontrer que, si f est une application surjective, on peut trouver h.
3. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour assurer l'existence de h.

★ **Exercice 2.29.**
Soient E, F, G trois ensembles, f une application de E dans F et g une application de F dans G .
1 On suppose que $g \circ f$ est injective. Montrer que f est injective.
2 On suppose que $g \circ f$ est surjective. Montrer que g est surjective.
3 On suppose que $g \circ f$ et g sont bijectives, f est-elle bijective ?

2.2.5 Autres exercices

★ **Exercice 2.30.** *Fonctions caractéristiques des parties d'un ensemble.* Etant donnée une partie X d'un ensemble E, on définit $f_X : E \to \{0,1\}$ par :

$$\forall e \in E,\ f_X(e) = \begin{cases} 0 & \text{si } e \notin X, \\ 1 & \text{si } e \in X. \end{cases}$$

1 Dessiner le graphe de la fonction f_X lorsque X est la partie de $\mathbb{R}$: $X = [1;2[\cup \{3\}$.
2 Montrer que l'application $X \to f_X$ réalise une bijection de l'ensemble des parties de E sur l'ensemble des fonctions de E dans $\{0,1\}$; décrire, pour l'ensemble des fonctions de $E \to \{0,1\}$, l'analogue des opérations d'union et d'intersection des parties de E.

★ **Exercice 2.31.**
Soient E et F deux ensembles non vides et f une application de E dans F.
1 **a** Montrer que :

$$\forall A \in \mathcal{P}(E)\,,\ A \subset f^{-1}(f(A))$$

b Montrer que si f est injective, on a :

$$\forall A \in \mathcal{P}(E)\,,\ A = f^{-1}(f(A))$$

c Donner un exemple d'application f telle que :

$$\exists A \in \mathcal{P}(E)\,,\ A \neq f^{-1}(f(A))$$

2 **a** Montrer que :

$$\forall B \in \mathcal{P}(F)\,,\ f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$$

b Montrer que si f est surjectif, on a :

$$\forall B \in \mathcal{P}(F)\,,\ f\left(f^{-1}(B)\right) = B$$

c Donner un exemple d'application f telle que :

$$\exists B \in \mathcal{P}(F)\,,\ f\left(f^{-1}(B)\right) \neq B$$

★ **Exercice 2.32.** On se donne des ensembles E, F, G et des fonctions $f : E \to F$ et $g : E \to G$.
On cherche dans quelles conditions il existe une fonction $h : F \to G$ telle que $g = h \circ f$ (composée de f par h).

1. On suppose $E = F = G = \mathbb{N}$. Déterminer s'il existe $h\ :\ F \to G$ telle que $g = h \circ f$ dans chacun des cas suivants :
   (a) $f(x) = 2x + 3$ et $g(x) = 2x + 1$
   (b) $f(x) = 0$ et $g(x) = x + 1$
   (c) $f(x) = 0$ et $g(x) = 1$
   (d) $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x + 1$
   (e) $f(x) = x - 1$ et $g(x) = x^2$
   (f) $f(x) = x^2$ et $g(x) = x - 1$
2. Démontrer que, si f est injective et que f et g sont partout définies, on peut trouver h.
3. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour assurer l'existence de h.

Exercice 2.33. *($\mathbb{N}^2$ est dénombrable)*

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, il existe un unique couple $(q, k) \in \mathbb{N}^2$ tels que $n = 2^q(2k + 1)$.
2. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} f\ :\mathbb{N}^2 &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (q,k) &\longmapsto 2^q(2k+1) - 1 \end{aligned}.$$

   est une bijection.

2.3 Ensembles finis et dénombrement

2.3.1 Ensembles finis

Exercice 2.34. Soit E un ensemble fini et A une partie de E. Montrer que si il existe une bijection de A dans E alors $A = E$.

Ce résultat reste t-il vrai si E est infini ?

★ **Exercice 2.35.** Deux pays sont dits voisins si ils ont une frontière commune. On suppose qu'il y a un nombre fini de pays et que chaque pays a au moins un voisin. En considérant l'application qui à chaque pays associe son nombre de voisins, montrer qu'il existe au moins deux pays qui ont le même nombre de voisins.

Exercice 2.36. Soit E un ensemble de 10 nombres entiers distincts compris entre 1 et 100.

1. Quel est le nombre de parties non vides de E ?
2. Montrer que la somme des éléments d'une partie non vide de E est comprise entre 1 et 955.
3. En déduire qu'il existe au moins deux parties distinctes de E de même somme.
4. En déduire qu'il existe au moins deux parties disjointes de E de même somme.

Exercice 2.37. Soient E, F, G trois ensembles finis. Exprimer le cardinal de $E \cup F \cup G$ en fonction des cardinaux de $E, F, G, E \cap F, F \cap G, G \cap E$ et $E \cap F \cap G$.

2.3.2 Dénombrements

Exercice 2.38.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $E_n = \{1, 2, \dots, n\}$.

1. Expliciter $\mathcal{P}(E_n)$ pour $n = 1$, 2 et 3.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \text{Card}\,\mathcal{P}(E_n) = 2^n$.

★ **Exercice 2.39.**
Dans cet exercice, on note $|E|$ le nombre d'éléments d'un ensemble fini E.
Soit A, B deux ensembles finis non vides.

1. Montrer, par récurrence sur le nombre d'éléments de A, que le nombre d'applications de A dans B vaut $|B|^{|A|}$.
2. En déduire $|\mathcal{P}(A)|$ (on retrouve ainsi un résultat qu'il est indispensable de connaître).
3. Quel est le nombre de fonctions de A dans B ?

Exercice 2.40. Combien le mot POIRE a-t-il d'anagrammes ? Même question avec le mot ANANAS.

Exercice 2.41. Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les points à coordonnées entières forment un quadrillage. Pour aller d'un point à un autre on se déplace en suivant les points du quadrillage par une succession de mouvements horizontaux de gauche à droite ou verticaux de bas en haut.

1. Déterminer le nombre de chemins pour aller du point O au point A de coordonnées $(3, 2)$.
2. Soient p, p', q, q' des entiers tels que $p \leq p'$ et $q \leq q'$, M le point de cordonnées (p, q) et N le point de coordonnés (p', q').
   (a) Déterminer le nombre de chemins pour aller de M à N.
   (b) Déterminer le nombre de chemin pour aller de O à N en passant par M.

Exercice 2.42. On considère un jeu de trente-deux cartes. La moitié de ces cartes sont rouges. Les seize autres sont noires. Une *main* est constituée de huit cartes parmi les trente-deux.

1. Quel est le nombre total de *mains* ?
2. Parmi ces mains, combien contiennent exactement
   (a) une carte rouge et sept cartes noires ?
   (b) deux cartes rouges et six cartes noires ?
   (c) trois cartes rouges et cinq cartes noires ?
   (d) quatre cartes rouges et quatre cartes noires ?
3. Montrez que

$$2\binom{16}{0}\binom{16}{8} + 2\binom{16}{1}\binom{16}{7} + 2\binom{16}{2}\binom{16}{6} + 2\binom{16}{3}\binom{16}{5} + \binom{16}{4}\binom{16}{4} = \binom{32}{8}.$$

4. Soient ℓ, m, et n trois entiers positifs tels que $\ell \leq m$ et $\ell \leq n$
   Proposez une expression simplifiée pour la somme

$$\sum_{0 \leq k \leq \ell} \binom{m}{k} \binom{n}{\ell - k}.$$

★ ★ Exercice 2.43.

1 On doit ranger dans p tiroirs ($p \geq 1$), n boules blanches indiscernables ($n \geq 0$). Chaque tiroir peut recevoir entre 0 et n boules.

Démontrer que le nombre de rangements possibles est égal à $\displaystyle\binom{n+p-1}{p-1}$.

2 Soit $n \geq 0$ un entier. Déterminer le nombre de p-uplets $(x_1, x_2, \cdots, x_p) \in \mathbb{N}^p$ qui vérifient

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_p = n$$

Exercice 2.44. *(extrait DST 2011-2012)* Soit E un ensemble fini non vide, et a_0 un élément fixé de E. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E et on considère l'application

$$\begin{aligned} f \ : \mathcal{P}(E) \ &\longrightarrow \mathcal{P}(E) \\ A \ &\longmapsto \begin{cases} A \cup \{a_0\} & \text{si } a_0 \notin A \\ A \setminus \{a_0\} & \text{si } a_0 \in A \end{cases} \end{aligned}.$$

1. Montrez que si $\operatorname{Card} A$ est pair alors $\operatorname{Card} f(A)$ est impair, et que si $\operatorname{Card} A$ est impair alors $\operatorname{Card} f(A)$ est pair.
2. Montrer que $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ f \circ f(A) = A$.
3. En déduire que f est bijective.
4. Déduire de ce qui précède une démonstration de l'affirmation : « *Un ensemble fini et non vide possède autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair* ».

2.3.3 Propriétes des cœfficients binomiaux

Exercice 2.45.
Soit x un réel et soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = (1+x)^n$.
1 Développer $f(x)$.
2 En déduire, si k et n sont deux entiers tels que $0 \leq k \leq n$, les deux égalités :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k}$.

Exercice 2.46. Calcul de $\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$:

1 Soit $n \geq p \geq 1$. Montrer que

$$p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}$$

En déduire la somme $\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$.

2 Retrouver ce résultat en dérivant $f(x) = (1+x)^n$.

2.4 Manipulation de sommes

Exercice 2.47. Ecrire en utilisant le signe $\sum$ les quantités suivantes :

1. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{100}$
2. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{100}$
3. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{99}$

Exercice 2.48. Soient n un entier positif et $(x_1, \ldots, x_n)$ n réels.

1. Si a est un réel quelconque, montrer que $\sum_{k=1}^{n}(x_k - a)^2 = \sum_{k=1}^{n} {x_k}^2 - 2a \sum_{k=1}^{n} x_k + na^2$.
2. On note $m = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$ la moyenne arithmétique des x_k. Vérifier $\sum_{k=1}^{n}(x_k - m)^2 = \sum_{k=1}^{n} {x_k}^2 - nm^2$.

Exercice 2.49. Ecrire les expressions suivantes sans le signe $\sum$:

1. $\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{j=0}^{n+2}(j+1)^2$
2. $\sum_{k=2}^{10} \frac{1}{k(k-1)}$ (on pourra utiliser $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.)
3. $\sum_{k=1}^{100} \ln(1 + \frac{1}{k})$
4. $\sum_{k=3}^{30} \frac{k^2-k-2}{k-2}$ (utiliser un changement d'indice $j = k - 2$; on rappelle de plus $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$)

Chapitre 3

Entiers

3.1 Raisonnement par récurrence

Exercice 3.1. Montrer que $\forall n \geq 15$, $\dfrac{3^n}{n!} \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Exercice 3.2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $2^{n-1} \leq n! \leq n^n$.

Exercice 3.3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété suivante

$$P_n \ : \ 2^n > n^2.$$

1. Montrer que, pour $n \geq 3$, l'implication $P_n \Longrightarrow P_{n+1}$ est vraie.
2. Quels sont les entiers n pour lesquels la propriété P_n est vraie ?

Exercice 3.4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $(n+1)! \geq \sum_{k=1}^{n} k!$.

Exercice 3.5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} k, \qquad b_n = \sum_{k=1}^{n} k^2, \quad \text{et } c_n = \sum_{k=1}^{n} k^3.$$

Montrer que $a_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, $b_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $c_n = a_n^2$.

Exercice 3.6. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k = \frac{(-1)^n(2n+1) - 1}{4}.$$

Exercice 3.7.

1. Montrez que la somme des n premiers entiers impairs est égal à n^2.
2. Montrez que la somme des *carrés* des n premiers entiers impairs est égal à $\dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.
3. Montrez que la somme des *cubes* des n premiers entiers impairs est égal à $2n^4 - n^2$.

★ **Exercice 3.8.** On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par le procédé suivant

- $u_0 = 1$,
- $u_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{u_n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ u_n + 1 & \text{sinon.} \end{cases}$

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = \begin{cases} \frac{2^{n+1}-1}{2^n} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}} & \text{sinon.} \end{cases}$

Exercice 3.9. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

- $u_0 = 1$,
- $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = 2^{n-1}$.

Exercice 3.10. Trouver l'erreur dans le raisonnement par récurrence suivant :

Soit à prouver que si, dans une pièce, il se trouve n personnes dont au moins une fille, les n personnes sont des filles.

La propriété est évidemment vraie pour $n = 1$. Supposons-la vraie pour n, et soit dans une pièce $n+1$ personnes, dont une fille F. On fait sortir une personne P, qui n'est pas F. Restent n personnes dont F : d'après l'hypothèse de récurrence, toutes ces personnes sont des filles. On fait alors sortir F et rentrer P : il se trouve dans la pièce n personnes qui sont toutes des filles, sauf peut-être P ; d'après l'hypothèse de récurrence, ce sont donc toutes des filles. On fait rentrer F : il y a bien $n+1$ filles dans la pièce. Donc la propriété est vraie pour $n+1$.

Exercice 3.11. Soient P_n la propriété "9 divise $10^n - 1$" et Q_n la propriété "9 divise $10^n + 1$".

1. Montrer que si n est un entier, $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ et $Q_n \Rightarrow Q_{n+1}$ (on pourra utiliser $10^{n+1} = 10^n.(9+1)$)
2. "$\forall n \in \mathbb{N}, P_n$" est-elle vraie ? Et "$\forall n \in \mathbb{N}, Q_n$" ?

3.2 Arithmétique

3.2.1 Division euclidienne

Exercice 3.12.

1 Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de 430 par 38. Peut-on en déduire, sans faire une nouvelle division, le quotient et le reste de la division euclidienne de 860 par 76 ?

2 Connaissant le reste de la division euclidienne d'un entier par 10, pouvez vous en déduire celui de la division euclidienne de cet entier par 5 ? par 6 ?

Exercice 3.13. Si on divise 4373 et 826 par un même nombre positif b on obtient 8 et 7 pour restes. Déterminer b.

Exercice 3.14. Connaissant la division euclidienne de deux entiers n et n' par un entier $b \geq 1$, donner un moyen simple de déterminer la division euclidienne de $n + n'$ par b.

3.2.2 PGCD- Algorithme d'Euclide - Théorème de Bézout

Exercice 3.15.
1 Sachant que $6471 = 123 \times 52 + 75$, déterminer, sans faire la division, le quotient et le reste de la division euclidienne du nombre 6471 par chacun des nombres 123 et 52.
2 Déterminer par l'algorithme d'Euclide PGCD$(585, 247)$ et PGCD$(2006, 1789)$.

Exercice 3.16.
1 Déterminer le PGCD de 357 et 252.
2 Déterminer les couples (x, y) d'entiers relatifs solutions de $357x + 252y = 0$.
3 Pour chacune des équations suivantes, déterminer, quand cela est possible, un couple (x, y) d'entiers relatifs qui en est solution :

$$\begin{aligned} 357x + 252y &= 21 \\ 357x + 252y &= 24 \end{aligned}$$

Exercice 3.17.
Soit n un élément de $\mathbb{Z}$ et a et b deux élément de $\mathbb{N}^*$. Soient q le quotient dans la division euclidienne de n par a et q' celui de q par b.
Montrer que q' est aussi le quotient de n par le produit ab.

Exercice 3.18.
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les nombres $2n^2 + 2n$ et $2n + 1$ sont premiers entre eux, c'est-à-dire que leur pgcd est 1.

Exercice 3.19.
Déterminer les entiers n appartenant à $\mathbb{N}$ tels que PGCD$(3n + 1, 2n) = 1$.

Exercice 3.20. (Extrait de DS)
Montrer que l'application f de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{Z}$ définie par :

$$f(x, y) = 15x - 8y$$

est une application surjective.
Décrire l'ensemble $f^{-1}(\{0\})$.
L'application f est-elle injective ?

Exercice 3.21.
Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On note $m\mathbb{Z}$ la partie de $\mathbb{Z}$ suivante :

$$m\mathbb{Z} = \{mk\,,\, k \in \mathbb{Z}\}$$

Montrer que l'on a $10\mathbb{Z} \cap 6\mathbb{Z} \;=\; 30\mathbb{Z}$.

Exercice 3.22. Soient a et b deux entiers naturels, d leur PGCD et m leur PPCM.

1. Montrer que $\dfrac{ab}{d}$ est un entier et qu'il est divisible par m. En déduire que md divise ab.

2. Rappeler pourquoi il existe u et v dans $\mathbb{Z}$ tels que

$$au + bv = d. \tag{3.1}$$

   En multipliant l'équation (3.1) par m, en déduire que ab divise dm.

3. Conclure que $ab = dm$.
4. Retrouver le résultat de la question précédente en utilisant la décomposition en facteurs premiers de a et de b.

Exercice 3.23. *(extrait DST 2011-2012)*

1. On souhaite déterminer tous les couples (a, b) d'entiers naturels solutions du système

$$(S) : \quad \begin{cases} \mathrm{PGCD}(a, b) = & 15 \\ a + b = & 180 \end{cases}$$

   (a) Déterminer tous les couples (x, y) d'entiers naturels premiers entre eux tels que $x + y = 12$ (on rappelle que deux entiers x et y sont *premiers entre eux* si $\mathrm{PGCD}(x, y) = 1$).

   (b) Montrer que (a, b) est solution du système (S) si et seulement si il existe des entiers naturels a' et b' premiers entre eux tels que $a = 15a'$, $b = 15b'$ et $a' + b' = 12$.

   (c) Déduire de ce qui précède la liste de tous les couples (a, b) d'entiers naturels dont le PGCD vaut 15 et la somme 180.

2. Soit

$$\begin{aligned} f\ : \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* &\longrightarrow \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \\ (x, y) &\longmapsto (\mathrm{PGCD}(x, y), x + y) \end{aligned}$$

   L'application f est-elle injective ? Surjective ? Justifiez.

Chapitre 4

Relations binaires sur un ensemble

4.1 Relations d'équivalence - Relations d'ordre

Exercice 4.1. On définit sur $\mathbb{R}$ la relation binaire $\mathcal{R}$ par

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x^2 - y^2 = x - y.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer les classes d'équivalence de $0, 1$ et $\frac{1}{2}$.

Dans $\mathbb{C}$ on définit la relation $\mathcal{R}$ par :

$$z\mathcal{R}z' \Longleftrightarrow |z| = |z'|.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence d'un élément z de $\mathbb{C}$.

Exercice 4.2. On définit une relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{R}^2$ en posant, pour tous réels x, y, x' et y' :

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \Longleftrightarrow y - 2x = y' - 2x'$$

Montrer que$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et décrire l'ensemble quotient $\mathbb{R}^2/\mathcal{R}$

Exercice 4.3. On définit une relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{N}^2$ en posant, pour tous entiers naturels a, b, c et d :

$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \Longleftrightarrow a + d = b + c$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer les classes d'équivalence respectives de $(0, 0)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$, $(1, 3)$ et $(7, 5)$.
3. Décrire l'ensemble quotient $\mathbb{N}^2/\mathcal{R}$.

Exercice 4.4. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x\mathcal{R}y \iff x(y^2+1) = y(x^2+1)$$

est une relation d'équivalence. Décrire la classe d'équivalence modulo $\mathcal{R}$ d'un élément x de $\mathbb{R}$.

Exercice 4.5. On définit dans $\mathbb{N}^*$ une relation $\preceq$ en posant

$$x \preceq y \iff \exists n \in \mathbb{N}^* \mid y = x^n.$$

Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre. La partie $\{2,3\}$ est-elle majorée ?

Exercice 4.6. *(Ordre lexicographique)*. Sur $\mathbb{N}^2$, on définit la relation $\ll$ par :

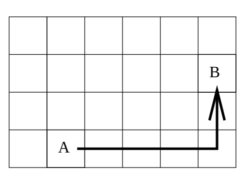
$$(x,y) \ll (x',y') \iff \begin{cases} x < x' \\ \quad \text{ou} \\ x = x' \text{ et } y \leq y'. \end{cases}$$

1. Vérifier que $\ll$ est un ordre. Est-il total ?
2. Préciser, pour tout $(x,y) \in \mathbb{N}^2$, l'ensemble des majorants de (x,y) dans $\mathbb{N}^2$ pour $\ll$.
3. Comparer les neuf éléments $(1,1)$, $(2,1)$, $(3,1)$, $(1,2)$, $(2,2)$, $(3,2)$, $(1,3)$, $(2,3)$ et $(3,3)$.

★ **Exercice 4.7.** Le *diagramme de Hasse* d'une relation d'ordre sur un ensemble E est un graphe (au sens de l'informatique) dont les sommets sont les éléments de E ; deux sommets x et y sont reliés par une arête si $x < y$ et s'il n'existe pas d'élément intermédiaire z tel que $x < z < y$; dans ce cas on dit que y est un successeur *immédiat* de x et que x est un prédécesseur *immédiat* de y.

1. On ordonne $\mathbb{N}$ par la relation *divise*.
   Dessiner le diagramme de Hasse pour les entiers compris entre 1 et 16. Quels sont les éléments minimaux de l'ensemble $\mathbb{N}$ privé de 1 ? Que peut-on dire d'un entier qui a un et un seul prédécesseur immédiat ?
2. Sur $\mathbb{N}$ on considère la relation R définie par $x\ R\ y$ si et seulement si soit $x = y$, soit x est impair et $x < y$.
   Montrer que la relation R est un ordre. Dessiner le diagramme de Hasse pour les entiers inférieurs à 8. Y a-t-il pour cet ordre des éléments minimaux ? maximaux ? un plus petit élément ? un plus grand élément ?

★ **Exercice 4.8.** Sur l'ensemble des cases d'un rectangle quadrillé, on définit la relation R par $A\ R\ B$ si l'on peut aller de la case A à la case B en se déplaçant d'abord de gauche à droite, puis de bas en haut (les déplacements peuvent être nuls), comme dans l'exemple ci-dessous :



1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une relation d'ordre. Est-ce un ordre total ou partiel ?

2. Mêmes questions, mais en définissant l'ordre sur une partie des cases du damier (ne constituant pas nécessairement un rectangle) : les déplacements ne sont autorisés que si l'on reste dans ces cases.

★ **Exercice 4.9.** Soit E un ensemble.

1. Montrer, pour toutes parties A, B, C, D de E on a l'implication

$$\left\{\begin{array}{l} B \setminus C \subset A \\ \text{ et} \\ C \setminus D \subset A \end{array}\right. \Longrightarrow B \setminus D \subset A.$$

2. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que la relation $\mathcal{R}_A$ dans $\mathcal{P}(E)$ définie par :

$$B\,\mathcal{R}_A\,C \Longleftrightarrow (B \setminus C) \cup (C \setminus B) \subset A$$

est une relation d'équivalence. Pour tout $B \in \mathcal{P}(E)$, préciser la classe de B modulo $\mathcal{R}_A$.

Exercice 4.10. On munit $\mathbb{N}^2$ de la relation notée $\preccurlyeq$ définie par :

$$(x, y) \preccurlyeq (x', y') \Longleftrightarrow x \leq x' \text{ et } y \leq y'.$$

1. Démontrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre. L'ordre est-il total ?
2. Soient $A = \{(1,4), (2,3), (3,2), (3,4), (4,4)\}$ et $B = \{(1,n) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Étudier l'existence de minorants, majorants, borne inférieure, borne supérieure, plus petit élément, plus grand élément pour A et B.

Exercice 4.11. Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire dans $\{0,1,2,3,4\}$ définie par

$$x\,\mathcal{R}\,y \;\; \textit{si et seulement si} \;\; x + y \; \textit{est divisible par 3}$$

1. Donner une représentation graphique de $\mathcal{R}$.
2. $\mathcal{R}$ est-elle réflexive ?
3. $\mathcal{R}$ est-elle symétrique ? antisymétrique ?
4. Montrer que $\mathcal{R}$ n'est pas transitive.

★ **Exercice 4.12.** Dans l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, on définit la relation binaire $\mathcal{R}$: $A\,\mathcal{R}\,B$ si et seulement si pour tout élément x de A, il existe un élément y de B tel que $x \leq y$. $\mathcal{R}$ est-elle une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$?

★ **Exercice 4.13.** Soit $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur l'ensemble $\{0,1\}$:

- ou bien 0 et 1 ne sont pas comparables par $\mathcal{R}$ (et $\mathcal{R}$ est alors la relation $=$, ordre partiel)
- ou bien 0 et 1 sont comparables par $\mathcal{R}$: dans ce cas, on a soit $0\,\mathcal{R}\,1$ ($\mathcal{R}$ est alors la relation $\leq$), soit $1\,\mathcal{R}\,0$ ($\mathcal{R}$ est alors la relation $\geq$).

En définitive, il n'y a que trois relations d'ordre possibles sur un ensemble à deux éléments. Combien y a-t-il d'ordres possibles sur un ensemble à *trois* éléments ?

4.2 Congruences

Exercice 4.14. Montrer que pour élément d de $\mathbb{Z}$, l'entier $d^2(d-1)(d+1)$ est divisible par 12.

Exercice 4.15.
1 Vérifier que $35 \equiv 2 \mod 11$.
2 Montrer que $2^{10} \equiv 1 \mod 11$.
3 En déduire que $35^{57} - 7$ est un multiple de 11.
4 En procédant de manière analogue, montrer que $9518^{42} \equiv 4 \mod 5$.

Exercice 4.16.

1. Est-ce que 13 divise $2^{70} + 3^{70}$?
2. Quel est le reste de la division euclidienne par 17 de 7^{77} ?

Exercice 4.17.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a
   (a) $10^k \equiv 1 \mod 3$,
   (b) $10^k \equiv 1 \mod 9$,
   (c) $10^k \equiv (-1)^k \mod 11$.
2. Soit n un entier naturel, $a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0$ son écriture en base 10. Autrement dit, les a_i sont des entiers compris entre 0 et 9 (les *chiffres* du développement en base 10 de n) et on a
$$n = a_k.10^k + a_{k-1}.10^{k-1} + \cdots + a_0.10^0.$$
   Montrer que
   (a) $n \equiv a_0 \mod 2$,
   (b) $n \equiv a_0 \mod 5$,
   (c) $n \equiv a_0 + 10a_1 \mod 4$,
   (d) $n \equiv a_0 + a_1 + \cdots + a_k \mod 3$,
   (e) $n \equiv a_0 + a_1 + \cdots + a_k \mod 9$,
   (f) $n \equiv a_0 - a_1 + \cdots + (-1)^k a_k \mod 11$.

   En déduire des critères (bien connus...) de divisibilité par 2, 3, 4, 5, 9 et 11.

Exercice 4.18. Donner les tables d'addition et de multiplication de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

Exercice 4.19. *(Petit théorème de Fermat)* Soit p un nombre premier. Dans tout l'exercice, la notation $\overline{k}$ désigne la classe d'un entier k modulo p. On pose
$$E = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \left\{\overline{0}\right\} = \left\{\overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{p-1}\right\}.$$
Le but de l'exercice est de montrer que pour tout entier a non divisible par p on a
$$a^{p-1} \equiv 1 \mod p.$$

1. Montrer que si y est un entier non divisible par p, et x en entier quelconque, on a
$$\overline{xy} = \overline{y} \Longleftrightarrow \overline{x} = \overline{1}.$$
2. À tout entier a non divisible par p on associe l'application
$$\varphi \ : \begin{array}{ll} E & \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \\ \overline{k} & \longmapsto \overline{a} \cdot \overline{k} \end{array}.$$
   (a) Montrer que $\varphi(E) = E$.
   (b) En déduire que $\prod_{\overline{k} \in E} \overline{k} = \prod_{\overline{k} \in E} \varphi(\overline{k})$ puis que $\overline{a}^{p-1} = \overline{1}$.

Chapitre 5

Devoirs surveillés des années antérieures

Université Bordeaux 1
Licence de Sciences et Technologies
2011-2012

Fondamentaux pour
les Mathématiques et l'Informatique
M1MI1002

Devoir surveillé 1

10 Octobre 2011, Durée 1h
Documents non autorisés

Exercice 1. p et q désignent des propositions logiques.

1. Exprimer sans connecteur $\Rightarrow$ ni $\Leftrightarrow$ la proposition $(p \Rightarrow q) \Rightarrow q$ (on pourra par exemple s'aider d'une table de vérité).
2. Donner la table de vérité de la proposition $(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$.
3. La proposition $((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow p))$ est-elle une tautologie (on rappelle qu'une *tautologie* est une proposition qui ne prend que la valeur VRAI) ? Justifier la réponse.

Exercice 2. On note $d(x, y)$ la propriété «x est divisible par y» (x et y s'interprétant comme des entiers naturels). On rappelle qu'un entier naturel est *premier* s'il n'a pas d'autres diviseurs que 1 et lui-même. Écrire sous forme d'une formule avec quantificateurs faisant intervenir la propriété $d(x, y)$, les énoncés suivants :

1. Tout entier naturel est divisible par 1.
2. Tout entier naturel est divisible par lui-même.
3. 2011 est un nombre premier.

Exercice 3.

1. Nier la proposition : "tous les habitants de la rue du Havre qui ont les yeux bleus gagneront au loto et prendront leur retraite avant 50 ans".
2. Un truand déclare : "Tous les truands sont des menteurs" (c'est-à-dire des individus qui **mentent toujours**). La proposition entre guillemets est–elle alors vraie ou fausse (on pourra faire un raisonnement par l'absurde) ?

Exercice 4. Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. On pose $X = A \cup (B \setminus C)$ et $Y = (A \cup B) \setminus C$.

1. Montrer que $Y \subset X$.
2. A-t-on nécessairement $X \subset Y$? Justifier la réponse.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$.

1. Déterminer l'image directe par f de l'intervalle $[0, 2]$.
2. Déterminer l'image réciproque par f de l'intervalle $[0, 1]$.

Université Bordeaux 1
Licence de Sciences et Technologies
Fondamentaux pour les Mathématiques et l'Informatique M1MI1002
2011–2012

Devoir surveillé 2

Novembre 2011, Durée 1h, Documents non autorisés

Toutes vos réponses devront être justifiées

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ deux applications définies par :

$$f(x) = \begin{cases} -3x & \text{si } x \leq 0 \\ 3x+1 & \text{sinon .} \end{cases}$$

$$g(x,y) = x^2 + xy - x \ .$$

1. Montrer que f est injective mais pas surjective. Est-elle bijective ?
2. Déterminer l'image par g de $(0,1)$, de $(0,2)$.
3. Montrer que g n'est pas injective.
4. Soit $y \in \mathbb{N}$. Déterminer l'image de $(1,y)$ par g .
5. L'application g est-elle surjective ?
6. Les expressions $f \circ g$ et $g \circ f$ ont-elles un sens ? Si oui, les expliciter.

Exercice 7. Soit E un ensemble. Soit $X \in \mathcal{P}(E)$ une partie de E. On définit une relation binaire $\mathcal{R}_X$ sur $\mathcal{P}(E)$ par :

$$A \ \mathcal{R}_X \ B \Leftrightarrow (A \cap X \subseteq B \cap X) \ .$$

1. Montrer que $\mathcal{R}_X$ est une relation réflexive et transitive.
2. Soit $E = \mathbb{N}$ et $X = \{1\}$. Montrer que $\mathcal{R}_X$ n'est pas antisymétrique. Est-ce une relation d'ordre ?

Exercice 8. Soit $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs, et $\mathcal{R}$ la relation binaire sur $\mathbb{Z}$ définie par :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow ((x < 0 \wedge y < 0) \vee (x = 0 \wedge y = 0) \vee (x > 0 \wedge y > 0)) \ .$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de 0 .
3. Décrire l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/\mathcal{R}$.

Université Bordeaux 1
Licence de Sciences et Technologies
2011-2012

Fondamentaux pour
les Mathématiques et l'Informatique
M1MI1002

Devoir surveillé terminal

16 janvier 2012, Durée 1h30
Documents non autorisés.

Les cinq exercices sont indépendants.

Exercice 9. Formuler en langage courant la proposition suivante :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, (a < b \Rightarrow \exists c \in \mathbb{Q}, a < c < b)$$

Exprimer sa négation à l'aide de quantificateurs, puis en langage courant.

Exercice 10. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n on a :

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i i = \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}$$

Exercice 11. On définit sur $\mathbb{R}$ la relation binaire $\mathcal{R}$ par

$$x\mathcal{R}y \iff x^2 - y^2 = x - y.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer les classes d'équivalence de $0, 1$ et $\frac{1}{2}$.

Exercice 12.

1. On souhaite déterminer tous les couples (a, b) d'entiers naturels solutions du système

$$(S) : \quad \begin{cases} \text{PGCD}(a,b) = & 15 \\ a + b = & 180 \end{cases}$$

   (a) Déterminer tous les couples (x, y) d'entiers naturels premiers entre eux tels que $x + y = 12$ (on rappelle que deux entiers x et y sont *premiers entre eux* si $\text{PGCD}(x, y) = 1$).

   (b) Montrer que (a, b) est solution du système (S) si et seulement si il existe des entiers naturels a' et b' premiers entre eux tels que $a = 15a'$, $b = 15b'$ et $a' + b' = 12$.

   (c) Déduire de ce qui précède la liste de tous les couples (a, b) d'entiers naturels dont le PGCD vaut 15 et la somme 180.

2. Soit

$$\begin{aligned} f \ : \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* &\longrightarrow \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \\ (x, y) &\longmapsto (\text{PGCD}(x, y), x + y) \end{aligned}$$

   L'application f est-elle injective ? Surjective ? Justifiez.

tourner svp $\rightarrow$

Exercice 13. Soit E un ensemble fini non vide, et a_0 un élément fixé de E. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E et on considère l'application

$$\begin{array}{rcl} f \ : \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ A & \longmapsto & \begin{cases} A \cup \{a_0\} & \text{si } a_0 \notin A \\ A \setminus \{a_0\} & \text{si } a_0 \in A \end{cases} \end{array}.$$

1. Montrez que si $\operatorname{Card} A$ est pair alors $\operatorname{Card} f(A)$ est impair, et que si $\operatorname{Card} A$ est impair alors $\operatorname{Card} f(A)$ est pair.
2. Montrer que $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ f \circ f(A) = A$.
3. En déduire que f est bijective.
4. Déduire de ce qui précède une démonstration de l'affirmation : « *Un ensemble fini et non vide possède autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair* ».