Exercice 3
L'étude des points critiques d'une fonction se fait toujours en 4 étapes, qu'on vous détaillera dans les énoncés des exercices, en contrôle et au DS:

1. Calculer les dérivées partielles de la fonction;
2. En déduire ses points critiques;
3. Calculer les dérivées partielles secondes de la fonction;
4. En déduire la nature des points critiques.

---

1. Fait en TD.
2. $\rightsquigarrow$ **Étape 1: Calcul des dérivées partielles.**

$$\tfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \tfrac{-\sin(x)}{y^2+1} \quad \text{et} \quad \tfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \cos(x)\tfrac{-2y}{(y^2+1)^2} \quad .$$

$\rightsquigarrow$ **Étape 2: Recherche des points critiques.** On a à résoudre le système

$$\nabla_f(x,y) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-\sin(x)}{y^2+1} &= 0 \\ \cos(x)\frac{-2y}{(y^2+1)^2} &= 0 \end{cases}$$

Comme y^2+1 ne s'annule jamais, la première ligne donne $-\sin(x)=0$, donc

$$x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Comme $\cos(k\pi) = \pm 1 \neq 0$, la deuxième ligne donne alors

$$y = 0.$$

La fonction g admet donc une infinité de points critiques, ce sont les points $(k\pi, 0), k \in \mathbb{Z}$.

$\rightsquigarrow$ **Étape 3: Calcul des dérivées secondes.**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-\sin(x)}{y^2+1}\right) = \frac{-\cos(x)}{y^2+1};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\cos(x)\frac{-2y}{(y^2+1)^2}\right) = \cos(x)\frac{-2(y^2+1)^2 - (-2y)(4y(y^2+1))}{(y^2+1)^4}$$
$$= \cos(x)\frac{(y^2+1)(6y^2-2)}{(y^2+1)^4} = \cos(x)\frac{6y^2-2}{(y^2+1)^3}l;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\cos(x)\frac{-2y}{(y^2+1)^2}\right) = -\sin(x)\frac{-2y}{(y^2+1)^2}.$$

$\rightsquigarrow$ **Étape 4: Nature des points critiques.** On a deux types de points critiques:

- $(k\pi, 0)$ avec k pair: dans ce cas, $\sin(k\pi) = 0$ et $\cos(k\pi) = 1$;

- $(k\pi, 0)$ avec k impair: dans ce cas, $\sin(k\pi) = 0$ et $\cos(k\pi) = -1$.

• En $(k\pi, 0)$ avec k pair: On évalue les dérivées secondes:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(k\pi, 0) = \frac{-1}{0+1} = -1;$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(k\pi, 0) = 1 \times \frac{6 \times 0 - 2}{(0+1)^3} = -2;$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(k\pi, 0) = -0 \times \frac{0}{(0+1)^2} = 0.$$

La matrice hessienne de f vaut donc

$$H_f(k\pi, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

et $\det(H_f(k\pi, 0)) = (-1) \times (-2) - 0 = 2 > 0$. Ces points sont donc des extrêma locaux. Comme de plus le premier cœfficient de H_f vaut $-1 < 0$, **ce sont des maxima locaux**.

• En $(k\pi, 0)$ avec k impair: On évalue les dérivées secondes:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(k\pi, 0) = \frac{-(-1)}{0+1} = 1;$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(k\pi, 0) = -1 \times \frac{6 \times 0 - 2}{(0+1)^3} = 2;$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(k\pi, 0) = -0 \times \frac{0}{(0+1)^2} = 0.$$

La matrice hessienne de f vaut donc

$$H_f(k\pi, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

et $\det(H_f(k\pi, 0)) = 1 \times 2 - 0 = 2 > 0$. Ces points sont donc des extrêma locaux. Comme de plus le premier cœfficient de H_f vaut $1 > 0$, **ce sont des minima locaux**.

3. $\rightsquigarrow$ **Étape 1: Calcul des dérivées partielles.**

$$\tfrac{\partial h}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - y \quad \text{et} \quad \tfrac{\partial h}{\partial y}(x, y) = -x + 2y.$$

$\rightsquigarrow$ **Étape 2: Recherche des points critiques.** On a á résoudre le sytème

$$\nabla_h(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - y &= 0 \\ -x + 2y &= 0 \end{cases}$$

La deuxième ligne donne

$$y = \frac{1}{2}x.$$

En injectant dans la première ligne, on trouve donc $3x^2 - \frac{1}{2}x = 0$, c'est-à-dire

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \tfrac{1}{6}.$$

Combinant ces deux résultats, on trouve deux points critiques: $(0, 0)$ et $(\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$.

⇝ **Étape 3: Calcul des dérivées secondes.**

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y) = 6x;$$
$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x,y) = 2;$$
$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x,y) = -1.$$

⇝ **Étape 4: Nature des points critiques.**

• <u>En $(0,0)$:</u>

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(0,0) = 0;$$
$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(0,0) = 2;$$
$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(0,0) = -1.$$

La matrice hessienne de h vaut donc

$$H_h(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et $\det(H_h(0,0)) = (0) \times 2 - (-1) \times (-1) = -1 < 0$, $(\mathbf{0},\mathbf{0})$ **est un point selle.**

• <u>En $(\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$:</u>

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}) = 6 \times \frac{1}{6} = 1;$$
$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}) = 2;$$
$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}) = -1.$$

La matrice hessienne de h vaut donc

$$H_h(0,0) = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et $\det(H_h(\frac{1}{6}, \frac{1}{12})) = 6 \times (2) - (-1) \times (-1) = 11 > 0$, $(\mathbf{\frac{1}{6}}, \mathbf{\frac{1}{12}})$ **est un extrêmum local**. Comme de plus le premier coefficient de H_h vaut $1 > 0$, c'est un **minimum local**.

4. ⇝ **Étape 1: Calcul des dérivées partielles.**

$$\tfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2x + y - 3 \quad \text{et} \quad \tfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = x + 2y$$

⇝ **Étape 2: Recherche des points critiques.** On a á résoudre le sytème

$$\nabla_u(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

C'est un système linéaire. On le résout par notre méthode preférée, et on trouve un point critique:

$$(2, -1).$$

⇝ **Étape 3: Calcul des dérivées secondes.**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) = 2;$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 2;$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y) = 1.$$

⇝ **Étape 4: Nature des points critiques.** On évalue les dérivées secondes en $(2,-1)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(2,-1) = 2;$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(2,-1) = 2;$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}(2,-1) = 1.$$

La matrice hessienne de u vaut donc

$$H_u(2,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et $\det(H_u(2,1)) = 2 \times 2 - 1 \times 1 = 3 > 0$, $(\mathbf{2},\mathbf{1})$ **est un extrêmum local**. Comme de plus le premier coefficient de H_u vaut $2 > 0$, c'est un **minimum local**.

5. ⇝ **Étape 1: Calcul des dérivées partielles.**

$$\tfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 2x - 2y \quad \text{et} \quad \tfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 4y - 2x - 2.$$

⇝ **Étape 2: Recherche des points critiques.** On a á résoudre le sytème

$$\nabla_v(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x - 2y & = & 0 \\ 4y - 2x - 2 & = & 0 \end{cases}$$

C'est un système linéaire. On le résout par notre méthode preférée, et on trouve un point critique:

$$(1,1).$$

⇝ **Étape 3: Calcul des dérivées secondes.**

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y) = 2;$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 4;$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y) = -2.$$

$\rightsquigarrow$ **Étape 4: Nature des points critiques.** En évaluant ces dérivées en $(1,1)$, on trouve donc

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(1,1) = 2;$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(1,1) = 4;$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}(1,1) = -2.$$

La matrice hessienne de v vaut donc

$$H_v(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

et $\det(H_v(1,1)) = 2 \times 4 - (-2) \times (-2) = 4 > 0$, $(\mathbf{1}, \mathbf{1})$ **est un extrêmum local**. Comme de plus le premier coefficient de H_v vaut $2 > 0$, c'est un **minimum local**.