La fiche ci-après détaille le programme du DSI : les points de cours (c'est-à-dire les formules, les théorèmes, les propositions, etc.), les méthodes pratiques et les exercices types que vous devez connaître par chapitres.

Quand je dis exercice type, c'est les exercices que vous devez avoir **fait et refait plusieurs fois**, être sûrs de maitriser à 100%. Je vous indique ceux pour lesquels une correction est en ligne. Ces exos viennent :

1. Des feuilles de TD ;
2. Des contrôles fait en cours ;
3. Des contrôles que j'ai donné l'an passé (onglet "archives" sur ma page) ;
4. Du DSI de l'an dernier (onglet "archives" sur ma page) ;
5. Des contrôles donnés par mes collègues cette année et l'an passé (disponibles (avec les corrigés) sur leur page, dont l'adresse est sur ma page).

Vous pouvez (devez ?) bien sûr refaire **tous** les exercices de **toutes** les feuilles de TD, une fois que vous vous sentez très à l'aise sur les exercices types.

Bonnes révisions !

Chpt 1 Systèmes linéaires.

A Points de cours :

Ce chapitre ne possède pas vraiment de points de cours à connaître. Il y a essentiellement une méthode à maîtriser : le pivot de Gauss.

B Méthode, savoir faire :

Étude des systèmes 2×2, 2×3, 3×2, et 3×3 :

- ⇝ Résolution par la méthode du pivot de Gauss,
- ⇝ Expression correcte des solutions : il peut n'y en avoir qu'une seule, aucune, une infinité paramétrée par un paramètre, une infinité paramétrée par deux paramètres, ou une infinité paramétrée par trois paramètres. **Note sur le premier contrôle** : soignez cette partie de la rédaction : sachez écrire correctement l'ensemble des solutions. Par contre, n'en dites pas plus que ce qu'on vous demande : ne parlez pas de variables principales, de rang, de droite etc. si on ne vous le demande pas !

C Exercices types :

- ⇝ Feuille de TD 1 : exercices **1**, **2**, **3** et **6** (corrigés).
- ⇝ Feuille de révisions du premier contrôle : exercices **1**, **2** et **3**. (Dans ces exercices, vous voyez tous les types d'ensembles solutions possibles). (corrigés).
- ⇝ Premier contrôle 2014 : exercice **1** (2 sujets $\times$ 2 groupes = 4 exercices) (corrigés).
- ⇝ Premier contrôle 2013 : exercice **1**. (corrigés)
- ⇝ Sur la page de G. Lazzarini : premier contrôle 2014 exercice **1** et premier contrôle 2013, exercice **1**. (corrigés).

Chpt 2 Matrices.

1 Opérations sur les matrices.

A Points de cours :

- Connaître le critère de compatibilité des dimensions pour pouvoir multiplier des matrices entre elles :

> **Critére de compatibilité :** Soient A une matrice de taille $m \times n$ et B une matrice de taille $k \times p$. Alors le produit $A \times B$ existe si et seulement si $n = k$.

B Méthode, savoir faire :

- Savoir effectuer des produits matriciels.

C Exercices types :

- Feuille de TD 2 : exercices **4** et **6**.
- DSI 2013 : exercice **1** (corrigé).
- Sur la page de G. Lazzarini : premier contrôle de 2014 : exercice **1** et premier contrôle de 2013 : exercice **3** (corrigés).
- Sur la page de J.B. Boyer : premier contrôle de 2014 : exercice **1**(corrigé).

2 Inversion des matrices 2×2 et 3×3.

A Points de cours :

- Formule pour le déterminant des matrices 2×2,
- Une matrice 2×2 est inversible si et seulement si son déterminant est non nul,
- Formule pour l'inversion d'une matrice 2×2.

> **Inversion des matrices 2×2 :** Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors A est inversible si et seulement si son déterminant $\det(A) = ad - bc$ est non nul. Dans ce cas, on a $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

- Pas de formule pour l'inversion des matrices 3×3. Une matrice 3×3 n'est pas inversible si au bout d'un certain nombre d'étapes dans le processus d'inversion on se retrouve avec une ligne ou une colonne entière de 0. Elle est inversible si on peut aller au bout du processus d'inversion.

B Méthode, savoir faire :

- Inverser des matrices 2×2 (application de la formule du cours).
- Inverser des matrices 3×3 (méthode du pivot de Gauss).

C Exercices types :

- $\rightsquigarrow$ Feuille de TD 2 : exercice **10.1** et exercice 11.
- $\rightsquigarrow$ Feuille de révision du premier contrôle : exercice **4.2** (corrigé).
- $\rightsquigarrow$ Premier contrôle de 2013 : exercice **2** (corrigé).
- $\rightsquigarrow$ Premier contrôle de 2013 : exercice **2** (2 sujets $\times$ 2 groupes = 4 exercices)(corrigés).
- $\rightsquigarrow$ DSI 2013 : exercice **2** (corrigé).
- $\rightsquigarrow$ Sur la page de G. Lazzarini : premier contrôle de 2014, exercice **3**, et premier contrôle de 2013, exercice **4** (corrigés).
- $\rightsquigarrow$ Sur la page de J.B. Boyer : premier contrôle 2014 : exercice **2** et premier contrôle 2013 : exercices **1** (corrigés).

3 Diagonalisation des matrices 2×2.

A Points de cours :

$\rightsquigarrow$ Les définitions suivantes sont à maitriser parfaitement. J'insiste sur le fait qu'un vecteur propre est **non nul** (erreur très fréquente dans vos copies...)

Polynôme caractéristique : Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Le polynôme caractérisique de A est le polynôme

$$\chi(A) = \det(A - \lambda.I_2) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + \det(A).$$

$\rightsquigarrow$ **Nota Bene :** On peut donc vous poser la question du calcul du polynôme caractéristique de plusieurs manières : "calculer $\chi(A)$", "calculer $\det(A - \lambda.I_2)$"... pas de panique, il s'agit toujours du même polynôme vu en TD !

Valeurs propres : Une valeur propre de A est une racine du polynôme $\chi(A)$.

Vecteur propre : Si λ_1 est une valeur propre de A, un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_1 est un vecteur $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ **non nul** solution de l'équation

$$A - \lambda_1 I_2 = 0.$$

$\rightsquigarrow$ Le critère de diagonalisation est à connaître !! (ce n'est pas (au hasard) le fait d'avoir un déterminant non nul qui fait qu'une matrice est diagonalisable...)

Théorème : Soit A une matrice 2×2. Alors

1. Si A est diagonale, elle est en particulier diagonalisable.
2. Sinon, A est diagonalisable si et seulement elle possède deux valeurs propres différentes, c'est-à-dire si et seulement si son polynôme caractéristique $\chi(A)$ a deux racines distinctes.

B Méthode, savoir faire :

- Savoir déterminer si une matrice est diagonalisable ou non.
- Diagonaliser une matrice 2×2, c'est-à-dire déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que
$$\begin{array}{rcl} A & = & P \times D \times P^{-1} \\ & \Longleftrightarrow & \\ P^{-1} \times A \times P & = & D \end{array}$$
(Les deux écritures peuvent vous être demandées.)
- Calculer A^n après avoir diagonalisé A.

C Exercices types :

- La fiche pratique sur la diagonalisation (3 exemples) (corrigés).
- Feuille de TD 2 : exercices **12** et **13**.
- Premier contrôle 2013 : exercice **3** (corrigé).
- Premier contrôle 2014 : exercice **3** (2 sujets $\times$ 2 groupes $=$ 4 exercices) (corrigés).
- DSI 2013 : exercice **3** (corrigé).
- Sur la page de G. Lazzarini : son second contrôle de 2014 : exercice **1**, et son second contrôle de 2013 : exercice **1** (corrigés). (Faites les ! La rédaction est un peu différente de la mienne, cela vous entraîne à répondre à des questions posées différemment).
- Sur la page de J.B. Boyer : son second contrôle de 2014 : exercice **1**, et son premier contrôle de 2013 : exercice **2** (corrigés).

Chpt 3 Fonctions : continuité, négligeabilité, dérivabilité.

A Points de cours :

- Les dérivées des fonctions usuelles sont à connaître parfaitement. Cela correspond à la première colonne de la fiche sur les dérivées et les primitives que vous pouvez trouver sur ma page.
- La formule de Leibniz : $\boxed{(u \times v)' = u'v + uv'}$.
- La formule pour la dérivée d'une fonction composée :
$\boxed{(u \circ v(x))' = (u(v(x))' = v'(x).u'(v(x)).}$

B Méthode, savoir faire :

- Savoir calculer des limites simples (somme, produit de fonctions usuelles, sans forme indéterminées).
- Savoir calculer la limite en 0 ou en ∞ d'une fraction rationnelle (on factorise par les termes de plus haut degré en l'∞, et par les termes de plus petit degré en 0).
- Savoir reconnaître en taux d'accroissement pour calculer une limite (auquel cas on vous précise dans l'énoncé "en utilisant la définition de la dérivée"...)
- Savoir dériver des fonctions !

C Exercices types :

- $\rightsquigarrow$ Feuille de TD 3 : exercices **2** et **6**.
- $\rightsquigarrow$ Second contrôle de 2013 : exercice **1** (Corrigé).
- $\rightsquigarrow$ Second contrôle de 2014 : exercice **1** (2 sujets $\times$ 2 groupes $=$ 4 exercices) (Corrigés).
- $\rightsquigarrow$ DSI 2013 : exercice **4** (corrigé).
- $\rightsquigarrow$ Sur la page de G. Lazzarini : son second contrôle de 2014 : exercice **3**, et son second contrôle de 2013 : exercice **2** (Corrigés).

Nota Bene : Travailler les exercices sur les développements limités vous fait aussi bien travailler la d'erivation.

Chpt 4 Intégration.

A Points de cours :

- $\rightsquigarrow$ Connaître les primitives des fonctions usuelles et de quelques composées de fonctions usuelles. Vous devez connaître par cœur la deuxième colonne de la fiche sur les dérivées et les primitives que vous pouvez trouver sur ma page.
- $\rightsquigarrow$ Formule d'intégration par parties, absolument par cœur, en faisant bien attention aux hypothèses !!

> **Théorème :** Soit u et v deux fonction $\mathcal{C}^1$ d'un intervalle $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Alors :
>
> $$\int_a^b u'(x)v(x)dx \quad = \quad [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

B Méthode, savoir faire :

Il faut maitriser parfaitement les trois techniques d'intégration : recherche directe d'une primitive, intégration par parties, changement de variable.

Recherche directe d'une primitive.

C'est la première technique à maitriser : à la fin d'une intégration par parties, ou d'un changement de variable, pour conclure il vous reste une primitive directe à trouver ! Il faut connaitre parfaitement les primitives des fonctions usuelles, et savoir les reconnaitre, *à une constante près* : c'est cette constante qui en a embtê̂té plus d'un au dernier devoir. Par exemple, peu d'entre vous ont su voir qu'une primitive de $\frac{3}{1+u^2}\frac{1}{\sqrt{2}}$ était $\frac{3}{\sqrt{2}}\arctan(u)$...

- $\rightsquigarrow$ Insistez particulièrement sur les fonctions que vous avez découvert cette année : $\arcsin, \arccos, \arctan$.
- $\rightsquigarrow$ En plus des primitives des fonctions usuelles, il faut savoir trouver immédiatement les primitives de deux (au moins !) fonctions composées classiques :
  - $\rightsquigarrow$ $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$; donc les primitives de $\frac{u'}{u}$ sont les $\ln(|u|) + c, c \in \mathbb{R}$;
  - $\rightsquigarrow$ $(e^u)' = u'e^u$; donc les primitives de $u'e^u$ sont les $e^u + c, c \in \mathbb{R}$.
- $\rightsquigarrow$ Il faut pouvoir trouver les primitives d'une fonction composée très simple : par exemple, une primitive de $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ est $2\sqrt{1+x}$, une primitive de $\sin(3x)$ est $-\frac{\cos(3x)}{3}$...
- $\rightsquigarrow$ N'oubliez pas que la racine carrée est une puissance comme une autre ! Il faut donc pouvoir trouver une primitive de $\sqrt{x}$, $\sqrt{x}x$, $\frac{1}{x\sqrt{x}}$, ... en utilisant la formule pour la primitive de x^α.
- $\rightsquigarrow$ Il faut également savoir primitiver quelques fractions rationnelles :

- $\frac{\text{n'importe quoi}}{x^\alpha}$: on divise chaque terme du haut par x^α, et on se ramène ainsi à une somme de fonctions que l'on sait primitiver. (**Exemple :** deuxième fonction de l'exo 2 de la feuille 4).
- $\frac{x}{x+a} = \frac{x+a-a}{x+a} = 1 - \frac{a}{x-a}$ et on sait primitiver cette fonction : ses primitives sont les $x - a\ln(|x-a|) + c, c \in \mathbb{R}$.
- $\frac{x^2}{x+a} = \frac{x^2-a+a}{x+a} = \frac{(x-a)(x+a)+a}{x+a} = x - a + \frac{a}{x-a}$ et on sait primitiver cette fonction : ses primitives sont les $\frac{x^2}{2} - ax + a\ln(|x-a|) + c, c \in \mathbb{R}$.

Intégration par parties.

⇝ Il faut connaitre la formule sur le bout des doigts !!!

⇝ Une fois la formule bien apprise, la principale difficulté est de savoir choisir qui dériver et qui primitiver. Il y a quelques cas où vous n'avez pas à hésiter :

- Les fonctions $\ln, \arcsin, \arctan$ et $\arccos$ n'ont pas de primitives sympathiques : vous devez toujours choisir de les dériver. **Exemple :** $\int x\ln(x)dx$ on choisit $u'(x) = x$, $v(x) = \ln(x)$; $\int(x+4)\arctan(x)dx$ on choisit $u'(x) = x+4, v(x) = \arctan(x)$, etc. ...
- Les polynômes se simplifient quand on les dérivent. Les fonctions $\exp, \cos$ et $\sin$ ne se compliquent pas quand on les primitive. Donc (polynôme)$\times$($\exp, \cos, \sin$) : c'est le polynôme qu'on dérive. **Remarque :** il faudra faire autant d'IPP que le degré du polynôme ! **Exemple :** $\int x^2\cos(x)dx$: il faudra deux IPP (le corrigé est en ligne : c'est le deuxième exo du DS2 de l'an dernier).

⇝ Souvenez vous que la fonction 1 est la dérivée de la fonction x ! C'est par exemple ainsi que l'on calcule $\int \ln(x)dx$: on fait une IPP en posant $u(x) = x$ donc $u'(x) = 1$ et $v(x) = \ln(x)$; ou encore $\int \arctan(x)dx$, $\int \arccos(x)dx, \ldots$

Changement de variable.

En contrôle, on vous donnera toujours le changement de variable à choisir. Il vous suffit ensuite d'appliquer les trois étapes du changement de variable. Les deux premières étapes sont les mêmes selon qu'on vous demande de calculer une *intégrale* ou des *primitives*, la troisième étape est différente.

Nota bene : J'ai indiqué au dernier TD une modification de la seconde étape : au lieu de dériver uniquement la nouvelle relation obtenue à la première étape, *il faut dériver les deux relations : celle qu'on vous donne, et celle que vous obtenez après inversion.* Lisez attentivement les exemples ci-dessous, et **faites impérativement les nouveaux exercices** sur le changement de variable (corrigés) que j'ai mis sur ma page.

1. **Calcul d'une intégrale.** Exemple : Calculer $I = int_0^1 \frac{e^t}{e^t+1}dt$ en posant $u = e^t$.

   ⇝ **Étape 1 :** On inverse la relation donnée. Ici, $u = e^t \Leftrightarrow \ln \mathbf{u} = \mathbf{t}$.

   ⇝ **Étape 2 :** On dérive ces deux relations : (1) $\ln u = t \Rightarrow \mathbf{\frac{1}{u}du = dt}$ et (2) $u = e^t \Rightarrow \mathbf{du = e^t dt}$

   ⇝ **Étape 3 :** On change les bornes : $t = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u = 1}$ et $t = 1 \Leftrightarrow \mathbf{u = e}$.

   Puis on remplace tout dans l'intgrale :

   – Soit en utilisant la relation (1)pour remplacer dt par $\frac{1}{u}du$: $I = int_1^e \frac{u}{u+1}\frac{1}{u}du = \int_1^e \frac{1}{u+1}du = [\ln(u+1)]_1^e = \ln(e+1) - \ln(2)$.

   – Soit, en remarquant le $e^t dt$ au numérateur, qui vaut du d'aprés la relation (2) : $I = int_1^e \frac{du}{u+1} = [\ln(u+1)]_1^e = \ln(e+1) - \ln(2)$.

2. **Calcul de primitives.** Exemple : Déterminer $\displaystyle\int \frac{dt}{t+t\ln(t)^2}$ en posant $u = \ln(t)$.

   ⇝ **Étape 1 :** On inverse la relation donnée. Ici, $u = \ln(t) \Leftrightarrow \mathbf{e^u = t}$.

   ⇝ **Étape 2 :** On dérive ces relations : $e^u = t \Rightarrow \mathbf{e^u du = dt}$ et $u = \ln(t) \Rightarrow \mathbf{du = \frac{1}{t}dt}$.

   Il n'y a pas de bornes à changer, on remplace donc directement dans l'intégrale :

   – Soit en utilisant la relation (1) pour remplacer dt par $e^u du$: $\displaystyle\int \frac{dt}{t+t\ln(t)^2} = \int \frac{e^u}{e^u+e^u u^2}du = \int \frac{1}{1+u^2}du =$ $\arctan(u) + c, c \in \mathbb{R}$.

   – Soit en remarquant que $\frac{dt}{t+t\ln(t)^2} = \frac{dt}{(1+\ln(t)^2)t} = \frac{1}{1+\ln(t)^2}\frac{dt}{t}$ et en remplaąnt $\frac{dt}{t}$ par du par la relation (2) : $\displaystyle\int \frac{dt}{t+t\ln(t)^2} = \int \frac{1}{1+u^2}du = \arctan(u) + c, c \in \mathbb{R}$.

   On veut des primitives exprimées en la variable de départ, donc

   ⇝ **Étape 3 :** On remplace la nouvelle variable par sa valeur en la variable de départ. Ici $u = \ln(t)$ donc finalement $\int \frac{\mathbf{dt}}{\mathbf{t+t\ln(t)^2}} = \arctan(\ln(\mathbf{t})) + \mathbf{c}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}$.

C Exercices types :

⇝ **À comprendre impérativement :** nouveaux exercices (manuscrits) sur le changement de variable, sur ma page. (corrigés).

⇝ Feuille de TD 4 : exercices **1**, **2**, et **3** (corrigés).

⇝ Second contrôle de 2013 : exercices **3** et **4**. (corrigés).

⇝ Second contrôle de 2014 : exercices **3** et **4** (2 exercices × 2 sujets × 2 groupes = 8 exercices) (corrigés).

⇝ DSI 2013 : exercice **4** et **5** (corrigé).

⇝ Sur la page de G. Lazzarini : son second contrôle de 2014 : exercices **3**, **4** et **5** ; son second contrôle de 2013 : exercices **3** et **4** (corrigés).

⇝ Sur la page de J.B. Boyer : son second contrôle de 2013 : exercice **2** (corrigé).

Chpt 5 Dérivées d'ordre supérieurs, formules de Taylor, développements limités.

A Points de cours :

⇝ La formule de Taylor-Young à l'ordre 1 et 2 est à connaître absolument par cœur. Comme pour l'intègration par parties, faites bien attention aux hypothèses : "dérivable" pour l'ordre 1, "deux fois dérivable" pour l'ordre 2 :

Théorème [Taylor-Young à l'ordre 1] : Soit f une fonction dérivable de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ et x_0 un point de $[a, b]$. Alors :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0).h + \underset{h\to 0}{o}(h).$$

Théorème [Taylor-Young à l'ordre 2] : Soit f une fonction deux fois dérivable de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ et x_0 un point de $[a, b]$. Alors :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0).h + \frac{f''(x_0)}{2}.h^2 + \underset{h\to 0}{o}(h^2).$$

B Méthode, savoir faire :

- Savoir calculer le développement limité à l'ordre 1 ou 2 d'une fonction en un point, en appliquant la formule de Taylor-Young. Bien vérifier que les hypothèses sont remplies avant de se lancer dans le calcul. Par exemple, pour un $DL_1(\pi)$: "**f est dérivable en π donc la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 donne**", et pour un $DL_2(0)$: "**f est deux fois dérivable en 0 donc la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 donne**"...
- Savoir lever des indéterminations dans le calcul de limites en utilisant les développements limités.

C Exercices types :

- Feuille de TD 5 : exercices **1** et **2** pour le calcul de DL (certains DL sont plus durs : je l'ai indiqués avec des $\star$ dans le corrigé. On ne vous demandera pas ce niveau de difficulté au DSI). Et exercices **5** et **6**, **6** pour le calcul de limite (corrigés).
- Les deux exercices supplémentaires (sur ma page) issus des annales des années précédentes (corrigés).
- Sur la page de J.B. Boyer : son second contrle de 2013 : exercice **1**. (corrigé).