Dérivation et calcul direct de primitive.

Exercice 1

1. (a) $f'(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$, $f''(x) = -4\cos(x)\sin(x)$;
   (b) $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin(\sqrt{x})$, $f''(x) = -\frac{1}{4x}\cos(\sqrt{x}) + \frac{1}{4x^{3/2}}\sin(\sqrt{x})$;
   (c) $f'(x) = 2x\arctan(x) + \frac{x^2}{1+x^2}$, $f''(x) = 2\arctan(x) + 4\frac{x}{1+x^2} - 2\frac{x^3}{(1+x^2)^2}$;
   (d) $f'(x) = 2xex^2 + 1$, $f''(x) = 2e^{x^2+1} + 4x^2e^{x^2+1}$;
   (e) $f'(x) = \frac{1}{(x+1)x} - \frac{\ln(x+1)}{x^2}$, $f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2x} - \frac{2}{(x+1)x^2} + \frac{2\ln(x+1)}{x^3}$.
2. **Rappel de cours :** si une fonction f est dérivable deux fois en un point x_0, son $DL_2(x_0)$ est donné par la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en x_0 :
$$f(x-x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)(x-x_0)^2 + \underset{x\to x_0}{\circ}((x-x_0)^2).$$
   Ici, on demande un $DL_2(0)$. Il faut donc remplacer dans la formule ci-dessus x par x_0 et calculer $f(0), f'(0), f''(0)$ **sauf** pour la dernière fonction, qui n'est pas définie en 0, pour laquelle on cherchera le DL en 1.
   (a) $f(x) = x + \underset{x\to 0}{\circ}(x^2)$;
   (b) $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{24}x^2 + \underset{x\to 0}{\circ}(x^2)$;
   (c) $f(x) = \underset{x\to 0}{\circ}(x^2)$;
   (d) $f(x) = e + ex^2 + \underset{x\to 0}{\circ}(x^2)$;
   (e) **Erratum :** cette fonction n'est pas définie en 0... Donnons en donc par exemple le $DL_2(1)$. On applique la formule de Taylor-Young avec $x_0 = 1$. On trouve
$$f(x-1) = \ln(2) + (\frac{1}{2} - \ln(2))(x-1) + (-\frac{5}{8} + \ln(2))(x-1)^2 + \underset{x\to 1}{\circ}((x-1)^2).$$

Exercice 2

L'enjeu de cet exercice est de vous rappeler quelques formules de primitives de fonctions composées. **Il est à bien maîtriser !** Dans tous les exercices d'intégration et d'équations différentielles, la principale difficulté réside dans la recherche d'une primitive...

1. On reconnait une expression de la forme $\frac{\mathbf{u}'}{\mathbf{u}}$ **dont une primitive est** $\ln(\mathbf{u})$. Une primitive de cette expression est donc $\ln(x^2+1)$.
2. On reconnait presque une expressions de la forme $\mathbf{u'e^u}$ **dont une primitive est** e^u. En effet, la dérivée de $\cos(x)$ est $-\sin(x)$. **Quand il manque une constante pour avoir une forme de dérivée connue, on multiplie par l'inverse de cette constante pour trouver la primitive**. Ici, il manque un -1, on multiplie donc par -1. Finalement, une primitive est donnée par $-2e^{cos(x)}$.
3. A la multiplication par 3 près, on reconnait la dérviée de $\ln(x)$. Une primitive de $\frac{3}{x}$ est donc $3\ln(x)$= $\ln(\mathbf{x^3})$ (pensez à revoir les règles de multiplicativité de ln et de exp !!)
4. Toujours à la multiplication par une constante près, on reconnait $\frac{u'}{u}$, dont une primitive est $\ln(u)$. Une primitive de cette expression est donc $3\ln(x+1) = \ln((x+1)^3)$.
5. La dérivée de $\sin(2x)$ vaut $2\cos(2x)$ et il manque un 2 pour avoir une forme de dérivée connue. On multiplie donc par l'inverse de 2, $\frac{1}{2}$ pour trouver la primitive : une primitive de cette expression est $\frac{1}{2}\sin(2x)$.

Calcul d'intégrale par changement de variable.

Nb : on vous donnera *toujours* le changement de variable à effectuer. Par conséquent, si rien n'est indiqué pour le calcul d'une intégrale, c'est que vous pouvez vous en sortir sans changement de variable...

Exercice 3

Pour caculer une intégrale par changement de variable, souvenez-vous que vous avez toujours trois étapes préalables à effectuer :

- **Étape 1 :** Exprimer t (ou x) en fonction de u. Quand on vous donne le changement de variable, on vous donne une équation du type $u = f(t)$, où f est une certaine fonction. Commencez par inverser cette équation pour vous trouver avec $g(u) = t$.
- **Étape 2 :** Exprimer dt en fonction de du. Il vous suffit pour cela de dériver l'équation $g(u) = t$ obtenue à la première étape, puis de "rajouter les du et les dt". Vous trouvez une équation du type $g'(u)du = dt$.
- **Étape 3 :** Calculer les nouvelles bornes de l'intégrales.

Une fois ces trois étapes franchies, vous remplacez tout dans l'intégrale pour n'avoir plus que de la nouvelle variable. Vous vous trouvez avec une intégrale simple à calculer. La difficulté des deux premières questions est exactement ce qui pourra vous être demandé au DST. La dernière question est légèrement au-dessus du niveau du DST.

1. - **Étape 1 :** $u = \sqrt{t} \Leftrightarrow \boxed{u^2 = t}$.
   - **Étape 2 :** Dérivant l'expression ci-dessus, il vient $\boxed{2udu = dt}$.
   - **Étape 3 :** $t = 1 \Leftrightarrow \boxed{u = \sqrt{1} = 1}$ et $t = 4 \Leftrightarrow \boxed{u = \sqrt{4} = 2}$.

   On remplace à présent dans l'intégrale.

$$\begin{aligned} \int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt &= \int_1^2 \frac{1-u}{u} 2udu &= 2\int_1^2 (1-u)du \\ &= 2\left[u - \frac{u^2}{2}\right]_1^2 &= 2(-\tfrac{1}{2}) = -1. \end{aligned}$$

2. - **Étape 1 :** $u = \ln(x) \Leftrightarrow \boxed{e^u = x}$.
   - **Étape 2 :** Dérivant l'expression ci-dessus, on trouve $\boxed{e^u du = dx}$.
   - **Étape 3 :** $x = 1 \Leftrightarrow \boxed{u = \ln(1) = 0}$ et $x = e \Leftrightarrow \boxed{u = \ln(e) = 1}$.

   On remplace à présent dans l'intégrale.

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{(\ln(x))^n}{x} dx &= \int_0^1 \frac{u^n}{e^u} e^u du &= \int_0^1 u^n du \\ &= \left[\tfrac{u^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 &= \tfrac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

3. - **Étape 1 :** $u = \sqrt{e^t - 1} \Leftrightarrow u^2 + 1 = e^t \Leftrightarrow \boxed{\ln(u^2+1) = t}$.
   - **Étape 2 :** Dérivant l'expression ci-dessus, on trouve $\boxed{\dfrac{2u}{u^2+1} du = dt}$.
   - **Étape 3 :** $t = 1 \Leftrightarrow \boxed{u = \sqrt{e-1}}$ et $t = 3 \Leftrightarrow \boxed{u = \sqrt{e^3 - 1}}$.

On remplace à présent dans l'intégrale.

$$\begin{aligned}
\int_1^3 \frac{e^t}{(3+e^t)\sqrt{e^t-1}}dt &= \int_{\sqrt{e-1}}^{\sqrt{e^3-1}} \frac{e^{\ln(u^2+1)}}{(3+e^{\ln(u^2+1)})u}\frac{2u}{u^2+1}du &= \int_{\sqrt{e-1}}^{\sqrt{e^3-1}} \frac{u^2+1}{(3+u^2+1)u}\frac{2u}{u^2+1}du \\
= \int_{\sqrt{e-1}}^{\sqrt{e^3-1}} \frac{2}{u^2+4}du &= \int_{\sqrt{e-1}}^{\sqrt{e^3-1}} \frac{2}{4}\frac{1}{\frac{u^2}{4}+1}du &= \frac{1}{2}\int_{\sqrt{e-1}}^{\sqrt{e^3-1}} \frac{1}{(\frac{u}{2})^2+1}du \\
&= \frac{1}{2}\left[\arctan(u/2)\right]_{\sqrt{e-1}}^{\sqrt{e^3-1}} &= \frac{1}{2}(\arctan(\sqrt{e^3-1})-\arctan(\sqrt{e-1})).
\end{aligned}$$

Fonctions de deux variables : dérivées partielles et étude des points critiques.

Exercice 4

1. – $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2+2y$;
   – $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2yx+2x$.
2. On a à résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcl} y^2+2y &=& 0 \\ 2yx+2x &=& 0 \end{array}\right.$ La première ligne donne $y=0$ ou $y=-2$. Si y vaut 0, en injectant dans la seconde ligne, on trouve $x=0$. Si $y=-2$, la deuxième ligne donne également $x=0$. Finalement, f admet deux points critiques, $(0,0)$ et $(0,-2)$.
3. – $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0$;
   – $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2y+2$;
   – $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2x$;
4. Pour connaître la nature des points critiques, on doit *pour chaque point critique*
   (a) Évaluer les dérivées secondes au point ;
   (b) En déduire la matrice hessienne au point ;
   (c) Calculer le déterminant de la matrice hessienne et en déduire la nature du point.

   Remarques :
   – Je vous conseille vraiment de faire les étapes *dans cet ordre* et non pas – comme vous avez pu le lire dans le corrigé du contrôle de l'an passé – de former la matrice hessienne directement avec les dérivées secondes, puis d'évaluer son déterminant en chaque point.
   – Pour ceux qui préfèrent calculer r, t, s et Δ puis raisonner sur le signe de Δ et de r, vous pouvez tout-à-fait le faire. **Par contre** ne mélangez pas les deux méthodes : si vous parlez de hessienne, ne parlez pas de Δ, si vous parlez de r, t et s, pas besoin de faire la matrice hessienne ...

   Ici :
   – <u>En $(0,0)$:</u> $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=0$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=0$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)=2$. La matrice hessienne de f en $(0,0)$ vaut donc
   $$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$
   et $\det(H_f(0,0)) = -4 < 0$, le point $(0,0)$ est donc un point selle.
   – <u>En $(0,-2)$:</u> $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=0$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=0$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)=-2$. La matrice hessienne de f en $(0,-2)$ vaut donc
   $$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},$$
   et $\det(H_f(0,-2)) = -4 < 0$, le point $(0,-2)$ est donc un point selle.

Fonctions de deux variables : intégration (théorème de Fubini)

Exercice 5

1. Posons $\phi_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et $\phi_2(y) = \frac{1}{y}$. Alors, d'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}\int_\Delta \frac{1}{y(1+x^2)} &= \int_\Delta \phi_1(x)\phi_2(y)dxdy &&= \left(\int_0^1 \phi_1(x)dx\right)\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \phi_2(y)dy\right)\\ &= \left([\arctan(x)]_0^1\right)\left([\ln(y)]_{\frac{1}{2}}^1\right) &&= (\arctan(1)-\arctan(0))(\ln(1)-\ln(\tfrac{1}{2})) = -\tfrac{\pi}{4}\ln(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{\pi}{4}\ln(2).\end{aligned}$$

2. Posons $\phi_1(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $\phi_2(y) = \frac{\cos(y)}{\sin(y)}$. Alors, d'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}\int_\Delta &= \int_\Delta \phi_1(x)\phi_2(y)dxdy &&= \left(\int_0^1 \phi_1(x)dx\right)\left(\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \phi_2(y)dy\right)\\ &= \left([\sqrt{x}]_0^1\right)\left([\ln(\sin(y))]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\right) &&= -\ln(\tfrac{\sqrt{3}}{2}).\end{aligned}$$

3. Pour calculer cette intégrale, on commence par la diviser en deux intégrales, par linéarité. Posons donc

$$I_1 = \int_0^1 x^2ydxdy \quad I_2 = \int_0^1 yxe^{y^2} \quad .$$

– **Calcul de I_1.** Soient $\phi_1(x) = x^2$ et $\phi_2(y) = y$. Alors, d'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_\Delta \phi_1(x)\phi_2(y)dxdy &&= \left(\int_0^1 \phi_1(x)dx\right)\left(\int_0^1 \phi_2(y)dy\right)\\ &= \left(\left[\tfrac{x^3}{3}\right]_0^1\right)\left(\left[\tfrac{y^2}{2}\right]_0^1\right) &&= \tfrac{1}{6}.\end{aligned}$$

– **Calcul de I_2.** Soient $\psi_1(x) = x$ et $\psi_2(y) = ye^{y^2}$. Alors, d'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}I_2 &= \int_\Delta \psi_1(x)\psi_2(y)dxdy &&= \left(\int_0^1 \psi_1(x)dx\right)\left(\int_0^1 \psi_2(y)dy\right)\\ &= \left(\left[\tfrac{x^2}{2}\right]_0^1\right)\left(\left[\tfrac{1}{2}e^{y^2}\right]_0^1\right) &&= \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}e-\tfrac{1}{2})\end{aligned}$$

Finalement, on a

$$\int_\Delta (x^2y - yxe^{y^2})dxdy = I_1 - I_2 = \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}e - \tfrac{1}{2}).$$

Equation différentielles linéaires d'ordre 1.

Exercice 6

1. Une primitive de $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ est $\sqrt{x}$. L'ensemble des solutions de l'équation homogène est donc constitué des fonctions
$$y : x \mapsto Ce^{\sqrt{x}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$
2. On utilise la méthode de variation de la constante : on cherche une solution particulière y_p sous la forme $c(x)e^{\sqrt{x}}$. $c(x)$ vérifie $c'(x) = \frac{e^{2\sqrt{x}}/\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$. Comme une primitive de $\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ est $2e^{\sqrt{x}}$, $c(x) = 2e^{\sqrt{x}}$ convient, et $y_p = 2e^{\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}} = 2e^{2\sqrt{x}}$.
3. L'ensemble des solutions est obtenu en additionnant y_p aux solutions de l'équation homogène. Il est donc constitué des fonctions
$$y : x \mapsto 2e^{2\sqrt{x}} + Ce^{\sqrt{x}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$
4. Si une solution y de (E_1) vérifie $y(1) = 0$, alors, $2e^2 + Ce = 0$, donc $C = 2e$ et l'unique solution au problème de Cauchy est la fonction
$$y : x \mapsto 2e^{2\sqrt{x}} + 2e.e^{\sqrt{x}} = 2e^{2\sqrt{x}} + 2e^{\sqrt{x}+1}.$$

Exercice 7

1. Une primitive de $\frac{\sin(x)}{\cos(x)+2}$ est $-\ln(\cos(x)+2) = \ln((\cos(x)+2)^{-1}) = \ln(\frac{1}{\cos(x+2)})$. L'ensemble des solutions de l'équation homogène est donc constitué des fonctions
$$y : x \mapsto Ce^{\ln(\frac{1}{\cos(x+2)})} = C\frac{1}{\cos(x+2)}, \quad C \in \mathbb{R}.$$
2. On utilise la méthode de variation de la constante : on cherche une solution particulière y_p sous la forme $c(x)\frac{1}{\cos(x+2)}$. $c(x)$ vérifie $c'(x) = \frac{x/\cos(x)+2}{\cos(x)+2} = x$. Comme une primitive de x est $\frac{x^2}{2}$, $c(x) = \frac{x^2}{2}$ convient, et $y_p = \frac{x^2}{2(\cos(x)+2)}$.
3. L'ensemble des solutions est obtenu en additionnant y_p aux solutions de l'équation homogène. Il est donc constitué des fonctions
$$y : x \mapsto \frac{x^2}{2(\cos(x)+2)} + C\frac{1}{\cos(x+2)}, \quad C \in \mathbb{R}.$$
4. Si une solution y de (E_2) vérifie $y(0) = 1$, alors, $\frac{C}{\cos(2)} = 1$, donc $C = \cos(2)$ et l'unique solution au problème de Cauchy est la fonction
$$y : x \mapsto y : x \mapsto \frac{x^2}{2(\cos(x)+2)} + \frac{\cos(2)}{\cos(x+2)}.$$

Equation différentielles linéaires d'ordre 2 (à cœfficients constants).

Nb : pour la recherche d'une solution particulière, on vous dira *toujours* sous quelle forme la chercher. Le tableau distribué en TD n'est pas à connaître par cœur.

Exercice 8

1. On considère l'équation caractérisique associée
$$x^2 - 1 = 0 \quad (E.C.)$$
Cette équation possède deux racines réelles distinctes, $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$ donc d'après le cours, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme
$$y : t \mapsto Ae^t + Be^{-t}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

2. Comme indiqué, on cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 3, c'est-à-dire $y_p(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$, où a, b, c et d sont des réels à déterminer. Pour déterminer ces cœfficients, on injecte y_p dans l'équation (E_3) (puisque y_p est solution, elle vérifie (E_3) !!). Il nous faut pour cela dériver deux fois y_p.
   - $y_p'(t) = 3at^2 + 2bt + c$;
   - $y_p''(t) = 6at + 2b$, donc
   $$6at + 2b - (at^3 + bt^2 + ct + d) = t^3 - 4.$$
   En identifiant les coefficients de ces polynômes, on trouve un système de 4 équations :
   $$\begin{cases} a &= -1 \quad \text{(en identifiant les cœff de degré 3)} \\ b &= 0 \quad \text{(en identifiant les cœff de degré 2)} \\ 6a - c &= 0 \quad \text{(en identifiant les cœff de degré 1)} \\ 2b - d &= -4 \quad \text{(en identifiant les constantes).} \end{cases}$$
   On trouve donc $a = -1, b = 0, c = -6, d = 4$ et $y_p(t) = -t^3 - 6t + 4$.
3. L'ensemble des solutions est obtenu en additionnant y_p aux solutions de l'équation homogène. Il est donc constitué des fonctions
   $$y : t \mapsto -t^3 - 6t + 4 + Ae^t + Be^{-t}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$
4. Soit y une solution de (E_3). Alors, $y(0) = 4 + A + B$, et
   $$y'(t) = -3t^2 - 6 + Ae^t - Be^{-t}$$
   donc $y'(1) = -9 + Ae - Be^{-1}$. On à donc à résoudre
   $$\begin{cases} A + B &= 1 \\ -9 + Ae - Be^{-1} &= 0 \end{cases},$$
   ce qui donne $A = -\frac{3(e^{-1}-3)}{e+e^{-1}}, B = -\frac{3(e+3)}{e+e^{-1}}$, et finalement, l'unique solution au problème de Cauchy est la fonction
   $$y : t \mapsto -t^3 - 6t + 4 + -\frac{3(e^{-1} - 3)}{e + e^{-1}}e^t + -\frac{3(e + 3)}{e + e^{-1}}e^{-t}.$$

Exercice 9

1. On considère l'équation caractérisique associée
   $$2x^2 - 8x + 8 = 0 \quad (E.C.)$$
   Cette équation possède une racine réelle double, $\lambda = 2$ donc d'après le cours, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme
   $$y : t \mapsto (A + Bt)e^{2t}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$
2. Comme indiqué, on cherche une solution particulière sous la forme $Q(t)e^t$, où $Q(t)$ est un polynôme de degré 2, c'est-à-dire $y_p(t) = (at^2 + bt + c)e^t$, où a, b et c sont des réels à déterminer. Pour déterminer ces cœfficients, on injecte y_p dans l'équation (E_4) (puisque y_p est solution, elle vérifie (E_4) !!). Il nous faut pour cela dériver deux fois y_p.
   - $y_p'(t) = (2at + b)e^t + (at^2 + bt + c)e^t = (at^2 + (2a + b)t + (b + c))e^t$;
   - $y_p''(t) = (2at + 2a + b)e^t + (at^2 + (2a + b)t + (b + c))e^t = (at^2 + (4a + b)t + (2a + 2b + c))e^t$, donc

$$2(at^2+(4a+b)t+(2a+2b+c))e^t - 8(at^2+(2a+b)t+(b+c))e^t + 8(at^2+bt+c)e^t = t^2e^t.$$

On regroupe les termes en t^2e^t, les termes en te^t et les termes en e^t, et on les identifie.On trouve un système de 3 équations :

$$\begin{cases} 2a &= 1 \quad \text{(en identifiant les termes en } t^2e^t\text{)} \\ -8a+2b &= 0 \quad \text{(en identifiant les termes en } te^t\text{)} \\ 4a-4b+2c &= 0 \quad \text{(en identifiant les termse en } e^t\text{)} \end{cases}$$

On trouve donc $a = 1/2, b = 2, c = 3$ et $y_p(t) = (\frac{t^2}{2}+2t+3)e^t$.

3. L'ensemble des solutions est obtenu en additionnant y_p aux solutions de l'équation homogène. Il est donc constitué des fonctions

$$y : t \mapsto (\tfrac{t^2}{2}+2t+3)e^t + (A+Bt)e^{2t}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

4. Soit y une solution de (E_4). Alors, $y(1) = \frac{11}{2}e + (A+B)e^2$, et

$$y'(t) = (t+2)e^t + (\frac{1}{2}t^2+2t+3)e^t + Be^{2t} + 2(1+Bt)e^{2t}$$

donc $y'(0) = 5 + B + 2A$. On à donc à résoudre

$$\begin{cases} \frac{11}{2}e + (A+B)e^2 &= \frac{11}{2}e \\ 5+B+2A &= 0 \end{cases},$$

ce qui donne $A = -5, B = 5$, et finalement, l'unique solution au problème de Cauchy est la fonction

$$y : t \mapsto (\frac{t^2}{2}+2t+3)e^t + (-5+5t)e^{2t}.$$

Exercice 10

1. On considère l'équation caractérisique associée

$$x^2 + x + \tfrac{1}{2} = 0 \quad (E.C.)$$

Cette équation possède deux racines complexes conjuguées, $-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i$ donc d'après le cours, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme

$$y : t \mapsto (A\cos(\tfrac{1}{2}t) + B\sin(\tfrac{1}{2}t))e^{\frac{t}{2}}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

2. Comme indiqué, on cherche une solution particulière sous la forme $y_p(t) = a\cos(2t) + b\sin(2t)$, où a et b sont des réels à déterminer. Pour déterminer ces cœfficients, on injecte y_p dans l'équation (E_4) (puisque y_p est solution, elle vérifie (E_5) ! !). Il nous faut pour cela dériver deux fois y_p.
- $y_p'(t) = -2a\sin(2t) + 2b\cos(2t) = 2(b\cos(2t) - a\sin(2t))$;
- $y_p''(t) = 2(-2b\sin(2t) - 2a\cos(2t)) = -4(a\cos(2t) + b\sin(2t))$, donc

$$-4(a\cos(2t)+b\sin(2t)) + 2(b\cos(2t) - a\sin(2t)) + \frac{1}{2}(a\cos(2t)+b\sin(2t)) = 2\cos(2t).$$

On regroupe les termes en $\cos(2t)$, les termes en $\sin(2t)$, et on les identifie.On trouve un système de 2 équations :

$$\begin{cases} -\frac{7}{2}a + 2b &= 2 \quad \text{(en identifiant les termes en } \cos(2t)\text{)} \\ -\frac{7}{2}b - 2a &= 0 \quad \text{(en identifiant les termes en } \sin(2t)\text{)} \end{cases}$$

On trouve donc $a = -28/65, b = 16/65$ et $y_p(t) = \frac{-28}{65}\cos(2t) + \frac{16}{65}\sin(2t)$.

3. L'ensemble des solutions est obtenu en additionnant y_p aux solutions de l'équation homogène. Il est donc constitué des fonctions

$$y : t \mapsto \tfrac{-28}{65}\cos(2t) + \tfrac{16}{65}\sin(2t) + (A\cos(\tfrac{1}{2}t) + B\sin(\tfrac{1}{2}t))e^{\frac{t}{2}}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

4. Soit y une solution de (E_5). Alors, $y(0) = \frac{28}{65} + A$, et

$$y'(t) = \frac{56}{65}\sin(2T) + \frac{32}{65}\cos(2t) + (-\frac{1}{2}A\sin(\frac{1}{2}t) + \frac{1}{2}B\cos(\frac{1}{2}t))e^{\frac{1}{2}t} + \frac{1}{2}(A\cos(\frac{1}{2}t) + B\sin(\frac{1}{2}t))e^{\frac{1}{2}t}$$

donc $y'(0) = \frac{32}{65} + \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$. On à donc à résoudre

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{28}{65} + A & = & 0 \\ \frac{32}{65} + \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B & = & 0 \end{array} \right. ,$$

ce qui donne $A = \frac{28}{65}, B = -\frac{92}{65}$, et finalement, l'unique solution au problème de Cauchy est la fonction

$$y : t \mapsto \frac{-28}{65}\cos(2t) + \frac{16}{65}\sin(2t) + (\frac{28}{65}\cos(\frac{1}{2}t) - \frac{92}{65}\sin(\frac{1}{2}t))e^{\frac{t}{2}}.$$